Дослідження динамічних систем з використанням системи комп'ютерної математики Maple

Т. М. Крохмаль[1], О. М. Нікітенко[2]

[1] *Комунальний заклад «Харківська загально-освітня школа № 63», Харків, Україна*

[2]*Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна*

nikonxipe@gmail.com

Розглядаються приклади застосування системи комп'ютерної математики Maple для дослідження динамічних систем, зокрема для побудови фазових портретів таких систем.

Ключові слова: Maple, динамічна система, фазовий портрет, фазова траєкторія.

Дуже часто у низці наук зустрічається ситуація коли модель процесу, який розглядають, зводися до диференційного рівняння чи системи таких рівнянь. У більшості реальних моделей для цих рівнянь неможливо отримати розв'язок аналітичними методами, а застосовують різноманітні чисельні методи.

Вельми широке коло питань, що відносяться до вивчення рухів динамічних систем, укладається в рамки вивчення структури розбиття фазового простору на фазові траєкторії.

Для побудови фазового простору і фазових траєкторій застосовують різноманітні методи, в тому числі й з використанням комп'ютерних програм.

Метою цієї роботи є ілюстрація можливостей побудови фазових портретів динамічних систем, використовуючи систему комп'ютерної математики (СКМ) Maple.

Під динамічною системою розуміють будь–який об'єкт або процес, для якого однозначно визначено поняття стану як сукупності деяких величин у певний момент часу й задано оператор, що описує еволюцію початкового стану в часі. Динамічні системи можуть бути механічними, фізичними, хімічними та біологічними об'єктами, обчислювальними процесами та процесами перетворення інформації, які відбуваються у відповідності до конкретних алгоритмів.

Опис динамічних систем також дозволяє велику різноманітність: він може здійснюватися або за допомогою диференційних рівнянь, або такими засобами, як функції алгебри логіки, графи, марківські ланцюги тощо [1].

Математична модель динамічної системи вважається заданою, якщо введено параметри (координати) системи, що визначають однозначно її стан, й вказано еволюційний оператор, який дозволяє розв'язувати задачу визначення зміни стану в часі [1].

Сутність цього методу полягає у тому, що він дозволяє будувати фазові траєкторії з використанням диференційних рівнянь у такий системі координат:

- відхилення керованої величини x;
- швидкість зміни керованої величини $y = \dfrac{dx}{dt}$.

Процес зміни траєкторії є рухом певної твірної точки на фазовій площині. Початкові умови визначатиме початкове значення твірної точки на фазовій площині.

Сукупність фазових траєкторій на площині (x, y) є фазовим портретом.

Фазовий простір – не пов'язана зі звичайним простором умовно–геометрична інтерпретація станів процесів динамічної системи. Певний стан будь-якої динамічної системи зображується відповідним цій системі фазовим простором. Перехід системи від одного стану до іншого (процес) зображується траєкторією фазової точки у фазовому просторі

Як вже відмічалося, з кожної точки фазового простору виходить одна і тільки одна фазова траєкторія, й тим самим увесь фазовий простір динамічної системи розбивається на фазові траєкторії.

З геометрично наочної точки зору під структурою розбиття фазового простору на траєкторії розуміється геометрична картина взаєморозташування фазових траєкторій у фазовому просторі.

Метод фазової площини — це точний графоаналітичний метод дослідження, який надає змогу досліджувати як наявність стану рівноваги, так і режиму автоколивань у нелінійних системах. Обмеженням цього методу є те, що математична модель об'єкту дослідження повинна бути не більше другого порядку.

З усіх систем комп'ютерної математики для побудови фазових портретів найпривабливішою виглядає СКМ вищого класу Maple, яка має найбільше розповсюдження серед таких систем. На ядрі СКМ Maple базуються такі популярні СКМ нижчого класу як Matlab та MathCad [2].

Інша СКМ вищого класу Matematica під час експлуатації має суттєво більше проблем різноманітного характеру [3].

Розглянемо можливість застосування СКМ Maple для побудови фазових портретів.

Як приклади розглянемо добре відому задачу про коливання фізичного маятника і задачу про рух заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями.

Почнемо з простого прикладу: розглядатимемо коливання стрижня, який підвішений за один з кінців. Як відомо, коливання цієї фізичної системи описують таким диференційним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \sin x = 0,$$

тут x — кут відхилення стрижня від вертикального положення;
ω — коефіцієнт, що залежить від розміру та маси стрижня.

Побудова фазового портрету будь-якої динамічної системи в СКМ Maple відбувається за таким алгоритмом:

1. підключаємо бібліотеку DEtools, яка містить інструменти для перетворення, розв'язання та малювання систем диференційних рівнянь;

2. задаємо рівняння системи;

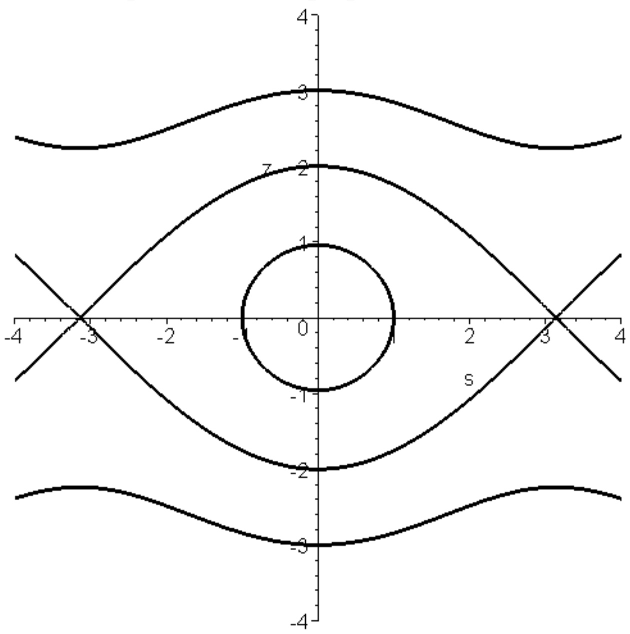
3. задаємо набір початкових точок через які проходитимуть фазові траєкторії;

4. за допомогою команди DEplot розв'язуємо рівняння системи та будуємо фазовий портрет.

Використовуючи команду

```
DEplot([eq1,eq2], [s(t),z(t)], t=0..40, s=-4..4, z=-4..4,
stepsize=0.05, linecolour=black, init, scene=[s,z],color=black,
arrows=none);
```

отримаємо добре відомий фазовий портрет

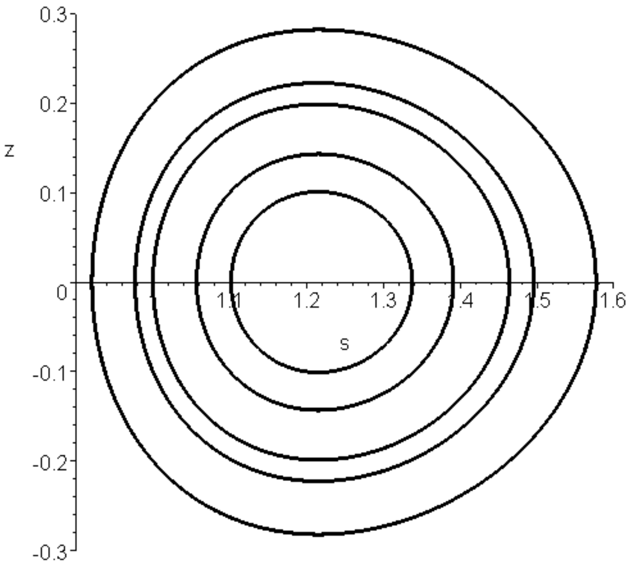


Тепер розглянемо рух заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями, який описується таким диференційним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{4} + \frac{b}{x} + \frac{1}{4x^3},$$

тут b — коефіцієнт, який враховує вплив електростатичного та магнітостатичного полів на рух заряджених частинок в таких приладах.

Фазовий портрет для цієї системи матиме вигляд



Показано можливість застосування системи комп'ютерної математики Maple для побудови фазових портретів динамічних систем. Застосування комп'ютерних технологій під час вивчення поведінки динамічних систем дозволяє отримати інформацію по систему, не розв'язуючи диференційних рівнянь.

Список літератури

1. Банах С. (1948) Курс функціонального аналізу (лінійні операції). Київ : Радянська школа. — 216 с.

2. Гречко А.Л. (2013) Сучасний стан програмного забезпечення в курсах якісної теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем. *У Матеріалах Другої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»,* Київ, 20—21 грудня (с. 296–298). Київ: НТУУ «КПІ».

3. Аладьев В. З. (2006) *Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования.* Таллинн: Лаборатория базовых знаний. – 792 с.