

УДК 519.853:005



Г.Г. Асеев

Харьковская академия культуры, г. Харьков, Украина
gaseyev@ic.ac.kharkov.ua

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПАРЕТО РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ И ЛОГИСТИКИ

Описан метод решения гладких нелинейных задач многокритериальной оптимизации с ограничениями, позволяющий восстанавливать весь Парето-фронт, учитывающих критерии управления производством (задачи управления издержками, прибылью, минимальных расходах энергоресурсов, сырья, комплектующих и т. д.) и критериев управления звеньев в цепях поставок логистики (задачи выбора способа поставки товара, выбора места дислокации склада, оптимизации решений при управлении рисками, оптимизации решений при управлении запасами и т.д.).

ЭЛЕКТРОННЫЙ ДОКУМЕНТООБОРОТ, ОПТИМИЗАЦИЯ, ПАРЕТО-МНОЖЕСТВО, ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, НАПРАВЛЕНИЕ НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА, ЭКСТРЕМУМ

Введение

В работе [1] описан ряд методов поиска Парето оптимального решения многокритериальной оптимизации в электронном документообороте для задач управления издержками, прибылью, минимальных расходах энергоресурсов, сырья и т. д., но вопросы оптимизации решений в логистике, с учетом этих задач, не рассматривались. В центре методологии оптимизации решений в логистике находится операция количественного / качественного сравнения альтернатив для выбора одной, подлежащей реализации. Поэтому, используемые в рамках такого анализа оценки являются многопараметрическими, чтобы более полно отображать основные свойства альтернатив, включая конечный экономический результат, стоимость, издержек, эффективность, риск, цепи поставок и т.д.

Поэтому в формате задач выбора наилучших решений для систем логистики, сегодня требуется учитывать требования многокритериальности рассматриваемых задач оптимизации управления производством.

Оптимизации многокритериальных решений в логистике. Практические задачи системного анализа в логистике нередко соотносятся с ситуациями, когда для нахождения оптимального решения требуется учитывать одновременно ряд целей или критериев (например, максимизировать рентабельность, качество, надежность и т.д. минимизация стоимости, издержек и т.п.), которые обозначим как критерии управления производством. Стремительное развитие логистики, которое наблюдается в последнее время, отчетливо проявляет следующий атрибут задач такого типа в указанной области исследований. В полной мере это относится к задачам управления цепями поставок. В частности, к ним относятся задачи, которые формулируются как задачи выбора способа поставки товара, выбора места дислокации склада, оптимизации решений при управлении рисками, оптимизации решений при управлении запасами и т.д.

Постановки таких задач обуславливаются необходимостью оптимизации решений при нескольких критериях одновременно [2].

Указанная особенность заранее предусматривается в формате методов многокритериальной оптимизации. Менеджер может реализовать ее, например, задавая конкретный критерий выбора с учетом его линий уровня.

В [3] подчеркивается, что понятие цепи поставок в слове ANNEX (Terminology in Logistics. ANNEX Dictionary. European Logistics Association) трактуется, по существу, как «интеграция основных функциональных сфер бизнеса (логистических функций) компании и ее партнеров». При этом понятие управления цепями поставок (SCM – supply chain management), как отмечено в [4], – «это высокоинтерактивный, комплексный и системный подход, который требует одновременного рассмотрения и учета многих актов обмена». Таким образом, при решении соответствующих задач управления в цепях поставок приходится иметь дело с ситуациями, когда нахождение оптимального решения в рамках, например, анализируемого звена / звеньев цепи поставок осложняется необходимостью одновременной оптимизации целого ряда показателей (имеется в виду критериев управления производством).

В таких ситуациях от менеджера требуется умение находить наилучшие (в рамках заданной области допустимых анализируемых альтернатив) решения. Учитывая подчеркнутые выше особенности, понятно, что это – не простая задача для менеджера. Из-за указанной специфики задач оптимизации при многих критериях требуется находить для любого из следующих случаев.

1. Имеющиеся критерии в рамках задачи оптимального управления в цепи поставок формализованы в виде конкретных критериальных функций, причем сама задача управления также формализована как соответствующая задача многокритериальной оптимизации.

2. Имеющиеся критерии не удается формализовать в виде конкретных критериальных функций, но, тем не менее, лицо, принимающее решения (ЛПР) может задать свои предпочтения на основе попарного сравнения как самих критериев (между собой), так имеющихся альтернатив с позиций каждого из критериев [2].

Применительно к любому из указанных случаев существуют свои специальные методы, приемы и подходы для нахождения оптимальных или наилучших решений (такие решения также называют компромиссными). А именно, применительно к первому из указанных случаев – это методы решения задач многокритериальной оптимизации, а применительно ко второму – например, метод аналитической иерархии (процессы аналитической иерархии). В формате таких подходов используются методы и приемы сведения многокритериальных задач к решению задач скалярной оптимизации [2].

1. Постановка задачи оптимизации

В [4] подчеркнуто, что «управление цепочками поставок есть управление восемью ключевыми бизнес-процессами: взаимоотношениями с потребителями; обслуживанием потребителей; спросом; выполнением заказов; производственным потоком; снабжением; разработкой продукции и доведением ее до коммерческого использования; возвратными потоками». Каждый из указанных процессов характеризуется своими атрибутами и показателями. Будем рассматривать два вида критериев. Пусть уже выделено M критериев, формализующих издержки или потери применительно к указанным выше процессам. Такие исходно заданные критерии являются критериями управления производством (чтобы отличать их от критерия выбора, на основе которого затем будет найдено оптимальное решение в формате задачи многокритериальной оптимизации и для задач логистики). Обозначим указанные критерии управления производством следующим образом:

$$d^{(t)}(y), t=1,2,\dots, M, \text{ при ограничениях } y \in Y \leq 0,$$

где $d^{(t)}(y)$ — некоторая функция t переменных (при фиксированном значении t), формализуемая в качестве критериев управления производством; y — переменная, координаты которой представляют управляемые параметры для задачи многокритериальной оптимизации в рамках ограничений $y \in Y$, формализуемая в качестве критерия управления производством $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$. Множество всех допустимых точек обозначим:

$$\Omega_d = \{y | d^{(t)}(y) \leq 0.\}$$

Для организации оптимального управления в рамках анализируемого звена (звеньев) цепи поставок системы логистики менеджеру потребуется задать определенные критерии, обуславливаемые

желанием оптимизировать указанные показатели. Обозначим критерии в формате задачи многокритериальной оптимизации для задач логистики :

$$g^{(k)}(x), k=1,2,\dots, N, \text{ при ограничениях } x \in X \leq 0,$$

где $g^{(k)}(x)$ — некоторая функция n переменных (при фиксированном значении k), формализуемая в качестве критериев звена / звеньев цепи поставок; x — переменная, координаты которой представляют управляемые параметры звена/звеньев цепи поставок для задачи многокритериальной оптимизации в рамках ограничений $x \in X$, анализируемого критерия $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Множество всех допустимых точек обозначим:

$$\Omega_g = \{x | g^{(k)}(x) \leq 0.\}$$

Задача многокритериальной оптимизации рассматривается как задача одновременной оптимизации критериев $d^{(t)}(y)$ и $g^{(k)}(x)$. Требуется найти точки $y \in Y \leq 0$ и $x \in X \leq 0$, которые, в некотором смысле (будут уточняться) минимизируют все эти критерии. Другими словами, рассматривается следующая оптимизационная задача:

$$\left[d^{(t)}(y) + g^{(k)}(x) \right] \rightarrow \min, t = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}, y \in \Omega_d, x \in \Omega_g,$$

при условии $y \in Y$ и $x \in X$. Этот суммарный критерий и подлежит оптимизации (по каждой отдельной или частной компоненте):

$$\left[d^{(t)}(y) + g^{(k)}(x) \right] \rightarrow \min = \left\langle d^{(1)}(y) + d^{(2)}(y) + \dots + d^{(M)}(y) + g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + \dots + g^{(N)}(x) \right\rangle \rightarrow \min, \quad (1) y \in \Omega_d, x \in \Omega_g.$$

В общем случае $Y \cap X$ и $\Omega_d \cap \Omega_g$. Идеальной ситуацией при решении задач многокритериальной оптимизации является случай, когда пересечение множеств оптимальных решений для всех критериев не является пустым. Такие множества обозначим следующим образом:

$$Y \cap X = \bigcap_{t=1}^M \left\langle \arg \min_{y \in \Omega_d} d^{(t)} \times \{y | y \in Y \wedge y \in X\} \right\rangle + \bigcap_{k=1}^N \left\langle \arg \min_{x \in \Omega_g} g^{(k)} \{x | x \in X \wedge x \in Y\} \right\rangle.$$

Если указанные множества не являются пустыми, то принадлежащие им альтернативы называются *абсолютными* решениями. В практических ситуациях при оптимизации работы параметров критериев управления производством и звена цепи поставок для конкретной системы логистики одни частные критерии могут противоречить другим. Следовательно, нужно искать компромиссное решение, наилучшее в некотором смысле

оптимальным Парето решением. Как правило, такое компромиссное решение стараются найти в классе так называемых эффективных решений (их также называют эффективными по Парето решениями, или просто множеством Парето).

2. Парето-оптимальные решения

Приведем соответствующее формальное определение. Решения $y^* \in Y \{y^* | y^* \in Y \wedge x^* \in X\}$ и $x^* \in X \{x^* | x^* \in X \wedge y^* \in Y\}$ называется *эффективным решением* или *оптимальным по Парето решением*, если не существует другого решения $y \in Y$ и $x \in X$ ($Y \cap X$) среди анализируемых альтернатив, такого, что $d^{(t)}(y) \leq d^{(t)}(y^*)$, $t = \overline{1, M}$ и $g^{(k)}(x) \leq g^{(k)}(x^*)$, $k = \overline{1, N}$, причем хотя бы для одного t и k имеет место строгое неравенство. Другими словами, оптимальные по Парето решения $y^* \in Y$ и $x^* \in X$ должны обладать следующим свойством. Во множествах Y и X допустимых альтернативных решений не найдется ни одного другого решения, переход к которому (от y^* и x^*) позволит улучшить показатель хотя бы одного из критериев $d^{(t)}(y)$ или $g^{(k)}(x)$, чтобы при этом не ухудшились бы показатели других частных критериев. Если множество абсолютных решений не является пустым, то множество оптимальных по Парето решений совпадает с множеством абсолютных решений.

3. Методы нахождения Парето-оптимальных решений

Нам необходимо найти экстремум (или экстремумы) целевой функции (1) $(\Omega_d + \Omega_g)$ в большей части нелинейных переменных $y(t)$ и $x(k)$ (проектных параметров). Такая функция описывает n -мерную поверхность. Существующие на настоящее время методы нелинейного программирования не в состоянии найти глобальный минимум хотя бы из-за того, что зачастую значения производных, применяемых в этих методах, ничего не говорят об оптимальности текущей точки [1]. Некоторые существующие вычислительные методы позволяют свести поиска глобального минимума n -мерной поверхности к последовательному поиску экстремума одномерных задач, а такой результат уже является множеством оптимальных по Парето решений. Напомним, что одномерная задача описывает определенную кривую на плоскости.

Для упрощения изложения последующего материала введем некоторые переобозначения. Введем функцию $F(z)$, в которой $z \in Y \{z | z \in Y \wedge z \in X\}$ и $z \in X \{z | z \in X \wedge z \in Y\}$. Далее в одномерной задаче найдем *направление наискорейшего спуска* и *выбор длины шага*.

3.1. Направление наискорейшего спуска

Требуется найти минимум функции $F(z)$. Начиная с заданной точки z_0 , будем генерировать

последовательность точек $z_{n+1}(z_n)$ таких, что $F(z_{n+1}) < F(z_n)$.

Пусть $z_{n+1} = z_n + \alpha v$, где v — коэффициент направления, а α — длина шага. Вычислим v . Из теоремы Тейлора следует:

$$F(z_n + \alpha v) = F(z_n) + \alpha v^T \nabla F(z_n) + o(|v|).$$

То, насколько изменится F вдоль направления v , зависит от произведения $v^T \nabla F(z_n)$. Получаем следующую задачу:

$$\min v^T \nabla F(z_n) \tag{2}$$

при условии $|v| = 1$.

Поскольку

$$\nabla F(z_n) = |v| |\nabla F(z_n)| \cos \theta = |\nabla F(z_n)| \cos \theta,$$

то минимум (2) достигается при $\theta = \pi$ и $\cos \theta = -1$. Таким образом, получаем:

$$v = - \frac{\nabla F_n}{|\nabla F_n|}$$

— *направление наискорейшего спуска*.

Вообще, любое направление, отличающееся от $-\nabla F_n$ меньше, чем на $\pi/2$ является направлением спуска, т.е. приводит к уменьшению F при достаточно малых α . При $\nabla F_n = 0$ такого направления не существует, z_n является минимумом функции F .

Необходимое условие локального экстремума функции F : если z_n — локальный экстремум, то $\nabla F_n = 0$.

3.2. Выбор длины шага

Оптимальное значение длины шага α — это решение следующей одномерной задачи:

$$\min_{\alpha} F(z_n + \alpha v), \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Однако, точное решение задачи (3) требует большого количества вычислений целевой функции. На практике применяют другой подход: подбирают такие значения α , чтобы они удовлетворяли некоторым условиям. Вот пример таких условий (правила Вулфа [5]):

$$F(z_n + \alpha v) \leq F(z_n) + c_1 \alpha \nabla F_n^T v, \tag{4}$$

$$F(z_n + \alpha v)^T v \geq c_2 \alpha \nabla F_n^T v, \tag{5}$$

где $0 < c_1 < c_2 < 1$.

Введем обозначение $\phi(\alpha) = F(z_n + \alpha v)$. Первое условие (4) (также известное как правило Армихо) говорит о том, что $\phi(\alpha)$ не должна превышать значения некоторой убывающей линейной функции, равной $F(z_n)$ в нуле. Это условие удовлетворяется для всех достаточно малых α . Второе условие (5) означает, что производная $\phi'(\alpha)$ по крайней мере в c_2 раз больше, чем $\phi'(0)$.

В многокритериальном случае условие (5) не работает, поскольку значения производных отдельных компонент ничего не говорят об оптимальности текущей точки. Правило Армихо можно расширить на многокритериальный случай: неравенство (4) следует понимать покомпонентно. Процедура поиска α формулируется так: начиная

с $\alpha = 1$, пока неравенство (4) не выполнится, полагаем $\alpha := \alpha/2$.

3.3. Рекомендуемые методы поиска экстремума

Метод координатного спуска. Фиксируем t в $d^{(t)}(y)$ и k в $g^{(k)}(x)$. Метод заключается в поочередном поиске минимума по координате z_1 , затем z_2 и т. д. После нахождения точки минимума по координате z_1 переходим к нахождению точки минимума по координате z_2 и т. д. Используются направления наискорейшего спуска, описанного в 3.1 и выбор длины шага, описанного в 3.2. Поиск ведется с одинаковым шагом, который уменьшается после нахождения всех значений $\tilde{z}_{1m}, \tilde{z}_{2m}, \dots, \tilde{z}_{nm}$. Таким образом, алгоритм реализации этого метода подобен алгоритму метода поразрядного приближения и лишь дополняется циклом задания переменных z_1, z_2, \dots, z_n , внутри которого оценивается погрешность нахождения z_{im} для каждой переменной. Нахождение точек минимума ведется в поле переменных $t = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}$. Таким образом мы получаем множество оптимальных по Парето решения.

Метод спирального координатного спуска отличается от рассмотренного выше лишь тем, что шаг α меняется каждый раз при переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску минимума по другой переменной. В трехмерном пространстве это напоминает спуск во впадину по спирали. Обычно этот метод дает некоторое сокращение времени поиска.

Применяются и другие методы поиска экстремума функций одной переменной: метод равномерного поиска, метод поразрядного приближения, метод золотого сечения, метод квадратичной интерполяции – экстраполяции и др. Применение того или другого метода зависит от сложности рассматриваемой задачи.

Так как множество альтернативных решений является дискретным, то задачу выбора оптимального решения по многим критериям удобно представлять в матричной форме. При этом каждую альтернативу достаточно характеризовать оценками частных критериев. По строкам матрицы i представляют альтернативы Z_{ij} , и где j – столбцы такой матрицы, в которой указываются оценки по конкретному частному критерию $d^{(t)}(y)$ и $g^{(k)}(x)$. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР. Требуется выбрать наилучший вариант организации управления производством и звеньев цепи поставок товара, например, из семи доступных и возможных вариантов. Соответствующие варианты альтернатив обозначаем далее через Z_{ij} , где $i = 1, 2, \dots, 7$, а $j = 1, 2, \dots, 4$. Пусть частные критерии в этой ситуации представлены четырьмя критериями. В качестве них критериев могут выступать, например, следующие. Критерий $d^{(1)}$ – минимизация расходов на энергоресурсы для изготовления товара; критерий

$d^{(2)}$ – минимизация различных издержек на производственные потоки и различные потери; критерий $g^{(3)}$ – минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых соответствующими затратами на перевозки; критерий $g^{(4)}$ – минимизация оценки годовых издержек, обусловливаемых соответствующими затратами на хранение (ограничимся в этом примере перечисленными четырьмя частными критериями). Для наглядности представим эти данные в виде матрицы и уточним, какие из альтернатив являются оптимальными по Парето.

РЕШЕНИЕ. Альтернатива Z_2 доминирует альтернативу Z_4 (т.к. переход от альтернативы Z_2 к альтернативе Z_4 позволяет улучшить показатели частных критериев $d^{(1)}$ и $g^{(3)}$, не ухудшив показатели остальных частных критериев).

Альтернативы	Значения частных критериев			
	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
Z_1	90	54	318	58
Z_2	80	68	246	56
Z_3	84	70	252	48
Z_4	82	68	340	56
Z_5	90	70	292	52
Z_6	86	64	294	54
Z_7	84	72	244	50

Другими словами, вариант Z_2 является заведомо лучшим (по заданным частным критериям), чем вариант Z_4 . Никакой менеджер никогда в такой ситуации не выберет альтернативу Z_4 в качестве наилучшей. Она не является оптимальной по Парето. Аналогично альтернатива Z_3 доминирует альтернативу Z_5 . Действительно, переход от альтернативы Z_5 к альтернативе Z_3 позволяет улучшить показатели частных критериев $d^{(1)}$, $g^{(3)}$ и $g^{(4)}$, не ухудшив показатели $d^{(2)}$. Таким образом, никакой менеджер или ЛПР никогда в такой ситуации не выберет также и альтернативу Z_5 в качестве наилучшей. Обусловлено это именно тем обстоятельством, что альтернатива Z_5 не является оптимальной по Парето.

В рассматриваемом примере альтернативные варианты решений Z_1, Z_2, Z_3, Z_6 и Z_7 являются оптимальными по Парето. При переходе от любого из этих вариантов решений к какому-нибудь другому (из множества альтернатив Z_1, Z_2, Z_3, Z_6 и Z_7) нельзя улучшить показатель хотя бы одного из частных критериев, не ухудшив при этом показатель / показатели какого-нибудь из остальных частных критериев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на то, что разные ЛПР могут иметь и разные предпочтения (и соответственно выбирать в качестве оптимальных решений разные альтернативы), тем не менее, в

формате процедур их выбора всегда будет общим следующее. Любое ЛПР *всегда будет выбирать оптимальное решение именно из множества решений оптимальных по Парето*. Кроме того, как видим, при этом нельзя однозначно сказать, какое из них лучше. Выбор может зависеть от предпочтений ЛПР.

Выводы

В системах электронного документооборота до настоящего времени применяются различные критерии управления производством (максимальная рентабельность, качество, надежность и т.д. минимизация стоимости, издержек, затрат электроэнергии и т.п.). В то же время в задачах логистики используются критерии, которые формулируются как задачи управления цепями поставок (такие как доставка сырья, комплектующих и т. п.), выбора способа поставки товара, выбора места дислокации склада, оптимизации решений при управлении рисками, оптимизации решений при управлении запасами и т.д. Предметные области критериев управления производством и логистических направлений значительно пересекаются, зависят одна от другой и это обуславливает рассматривать при оптимизации как совместное решение многокритериальных уравнений большой

размерности. Существующие методы прикладного нелинейного программирования не справляются с нахождением минимума таких целевых функций.

Предложенные в работе методы сведения многомерных задач к последовательному применению поочередного поиска минимума по каждой координате хорошо показали себя на практике. В результате решения находится множество оптимальных по Парето решений, которые удобно анализировать менеджеру или ЛПР.

Список литературы:

1. *Асеев Г.Г.* Совершенствование метода многокритериальной оптимизации в электронном документообороте, основанного на локальной геометрии множества Парето / Г.Г. Асеев // Бионика интеллекта. – 2015, № 2(85). С. 58-61.
2. *Бродецкий Г.Л.* Методы оптимизации многокритериальных решений в логистике / Г.Л. Бродецкий – М.: ИНФРА, 2009. – 230 с.
3. *Сергеев В.И.* Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / В.И. Сергеев – М.: ИНФРА – 2004. – 976 с.
4. *Сток Д.Р.* Стратегическое управление логистикой / Д.Р.Сток, Д.М. Ламберт – М.: ИНФРА – 2005. 797 с.
5. *Wolfe P.* Convergence conditions for ascent methods / P. Wolfe // Siam Review. - 2010. № 11(2). Pp. 226-235.

Поступила в редколлегию 23.03.2017