УДК 631.2 : 631.171 : 65.011.56

А.П. СЛЕСАРЕНКО, М.А. РОМАНЧЕНКО, О.С. СОРОКА

МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ В 3-ВИМІРНІЙ БАГАТОШАРОВІЙ СТРУКТУРІ З ТРУБЧАСТИМИ НАГРІВАЧАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕПЛОВИМ РЕЖИМОМ ПРИМІЩЕННЯ

Будується математична модель 3-вимірної багаторівневої електротеплоакумулювальної системи, призначеної для обігріву великого приміщення, яка має забезпечувати тепловий стандарт нагріву підлоги з урахуванням впливу навколишнього середовища. Математична модель надає можливість вирішення задач оптимального керування наявними енергоресурсами, що живлять систему, для здійснення заданих теплових стандартів у режимі реального часу.

1. Постановка проблеми

Концепція забезпечення теплових режимів виробничих споруд агропромислового комплексу, в основу якої покладено принцип організації подачі тепла в приміщення за схемою «знизу вгору», ефективного використання природних потоків тепла від нетрадиційних відновлюваних джерел енергії (НВДЕ) і впровадження засобів регулювання енергопотоків у обігрівній (опалювальній) системі, якою є запропонована авторами багаторівнева електротеплоакумулювальна система опалення (БЕТСО), сформульована в роботі [1].

В роботі [2] обґрунтовано методологію створення автоматизованих електротеплоакумулювальних установок, що забезпечують дотримування стандартів теплового режиму мікроклімату виробничих споруд різного функціонального призначення. Система автоматичного регулювання базується на використанні у контурі зворотного зв’язку блоку моделювання БЕТСО, основні вимоги до якої полягають у тому що, по-перше, для якісного регулювання необхідний досить високий ступінь наближення моделі до реального об’єкта й точність виконання числових розрахунків (висока точність моделі); по-друге, використання моделі в САР БЕТСО в режимі реального часу вимагає виконання необхідних прорахунків досить великого обсягу інформації за відносно короткий час (висока швидкодія моделі). Отже, актуальним є створення адекватної рішенню означеної вище задачі керування математичної моделі.

Метою роботи є побудова математичної моделі багатофункціональної електронагрівальної системи, призначеної для обігріву великого приміщення, яка б забезпечувала одночасно дотримування теплового стандарту нагріву, а також можливість раціонального (або оптимального) керування всіма наявними енергоресурсами для його здійснення в режимі реального часу.

Основні задачі полягають у визначенні функціональних залежностей теплових полів на поверхні і в середині БЕТСО від сукупності незалежних зовнішніх впливових факторів для подальшої розробки системи структурно-функціонального керування обігріву приміщення на основі рішення зворотних задач теплопередачі.

Методи дослідження: теорія теплопередачі в енергоактивних середовищах; метод кінцевих інтегральних перетворювань для рівнянь математичної фізики.

2. Загальна характеристика БЕТСО та її граничних умов

Вирішення низки проблем – прогнозування теплового стану приміщення, забезпечення контролю та регулювання обігріву технологічно активних зон (ЗТА) приміщень АПК дозволяє запропонована нагрівальна система (НС) – БЕТСО, що забезпечує більш високий якісний рівень дотримування стандартів теплового режиму при збереженні енергоресурсів.

Розглянемо фізичну модель БЕТСО у вигляді прямокутної призми, верхня площина якої являє собою поверхню підлоги, а весь масив гріючої структури занурений у ґрунт. Структура БЕТСО в перерізі (площина x0y) розглянута в [1] при моделюванні 1-вимірної шаруватої структури. Будемо вважати, що в плані приміщення (як у повітрі, так і в ґрунті) існують певні усереднені температурні умови, але з кожного боку різні. Вісь 0x напрямлена угору з початком в середині нижньої грані, вісь 0y – по ширині БЕТСО, а вісь 0z – уздовж БЕТСО (рис. 1).

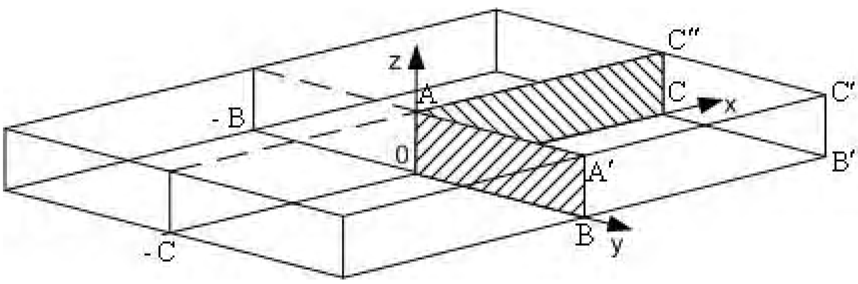

Рис. 1. Загальна схема БЕТСО

Отже, надалі розглядатимемо 3-вимірну модель БЕТСО, тепло в якій генерується при незалежному підведенні енергії до кожного нагрівального елемента блоку (ярусу) спеціальних електрообігрівників трубчастого типу (СЕТ), розташованих у площинах, паралельних площині y0z. Така прямокутна призма, яка має усередині шарувату структуру, представлена на рис. 1. Початок системи координат розташований в центрі основи призми з такими габаритними розмірами: висота **A** ($0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{A}$); ширина 2**B** ($-\mathbf{B} \le \mathbf{y} \le \mathbf{B}$); довжина дорівнює 2**L** ($-\mathbf{C} \le \mathbf{z} \le \mathbf{C}$).

Шарувата структура БЕТСО в поперечному перерізі (переріз 0AA′B) показана на рис. 2, де позначено: x_i – координати контакту суміжних шарів (i = 1, 2, .. , **N**, **N** – кількість шарів), λ_i –

відповідні коефіцієнти теплопровідності, p_i – функції розподілу потужності джерел тепла по ширині смуги. З огляду на сказане вище стосовно умов розподілу тепла в плані приміщення будемо вважати, що всередині призми має місце симетричний розподіл температури в площинах x0z і x0y. Таким чином, можна обмежитись лише квадрантом 0CB′B з нульовими граничними умовами для потоків тепла на гранях означеної області 0AC″C (y = 0) та 0AB′B (x = 0) (див. рис. 1).

Приймаємо дискретне симетричне по ширині смуги підведення потужності в шарах, де розташовані блоки СЕТ, вісі яких мають певні координати $y = y^c_{i,j}$. Кількість СЕТ для визначеності буде непарною, так щоб завжди був присутній СЕТ з координатою y = 0. Таким чином, розподіл густини теплової потужності, що підводиться до окремого i-го шару, має вигляд:

$$p_i(y) = \sum_{j=-(M_i-1)/2}^{(M_i-1)/2} p_{i,j} \cdot f(y - y^c_{i,j}), \tag{1}$$

де $p_{i,j}$ – густина потужності джерел тепла, розподілених у СЕТ, Вт/м^3; M_i – кількість СЕТ в i-му шарі; $f_{i,j}$ – функція розподілу теплової потужності в області локалізації j-го трубчастого нагрівника із центром у точці $y = y^c_{i,j}$.

Інші припущення, прийняті в розглянутій моделі: 1) розподіл густини потужності в областях локалізації СЕТ приймається однаковим і незалежним від температурного режиму НС; 2) функція розподілу теплової потужності в області локалізації СЕТ приймається у вигляді трапецієподібної форми (рис. 2); 3) ступінь трапецієподібності ε припускає можливість варіювання; 4) кількість активних шарів N_A у шарах НС може бути довільною: $0 \le N_A \le N$; 5) зсув найближчої до бічної грані ($y = B$) труби від цієї грані вибирається однаковим для всіх активних шарів $l_{st} = B - y_{i,(M_i-1)/2}$; 6) відстань між трубами СЕТ вибирається однаковою $l_p = 2 \cdot (B - l_{st}) / M_i$.

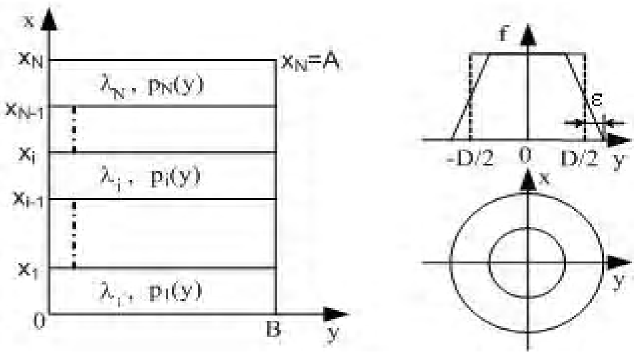

Рис. 2. Фізична модель БЕТСО (поперечний переріз)
та розподіл потужності джерела тепла в СЕТ (праворуч)

Розподіл потужності виду (1) означає, що переріз «труби» має вигляд квадрата із стороною, довжина якої дорівнює товщині активного шару. Така заміна припускається з огляду на те, що для аналізу найбільш цікавим є розподіл температури на поверхні підлоги (верхня грань НС $x = A$), де розподіл теплового поля певною мірою вирівнюється, а різниця теплового поля від джерел квадратної форми перерізу і джерел круглої форми перерізу буде практично непомітною.

Активний шар будемо далі називати ярусом, причому відлік ярусів зручніше вести від поверхні підлоги в глибину нагрівальної системи. Граничні поверхні моделі відповідають таким атрибутам реальної НС:

1) верхня грань ($x = A$, $-B \le y \le B$, $-C \le z \le C$) відповідає поверхні підлоги, що омивається повітрям усередині приміщення там, де має місце конвекційний теплообмін:

$$-\lambda_N \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=A} = \alpha(t - t_c)\big|_{x=A}, \tag{2}$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні підлоги (величину α вважаємо незалежною від температурного режиму); t_c – температура повітря в приміщенні на деякому віддаленні від поверхні підлоги; теплообмін за рахунок теплового випромінювання може бути врахований приблизно, маючи на увазі, що температурні перепади між поверхнею підлоги та оточуючими стінами і стелею приміщення невеликі;

2) основа призми ($x = 0$, $-B \le y \le B$, $-C \le z \le C$) знаходиться на достатній глибині у ґрунті (глибина термостатування), тому на її поверхні приймаються граничні умови 1-го роду:

$$t\Big|_{x=0} = t_0 \ ; \tag{3}$$

3) на бічних гранях приймемо граничні умови 3-го роду такого виду ($i = 1,..., N$):

$$\left(t_i + h_y \frac{\partial t_i}{\partial y} \right)\Bigg|_{y=\pm B} = t_{0i} \,; \ \left(t_i + h_z \frac{\partial t_i}{\partial y} \right)\Bigg|_{z=\pm C} = t_{0i} \,; \tag{4}$$

де $h_y = \lambda_{cp}/\alpha_y$, $h_z = \lambda_{cp}/\alpha_z$ – фактори тепловтрат через бічні та торцеві грані НС.

Величини h_y, h_z обрані постійними по всій висоті шаруватої структури з тією метою, щоб одержати аналітичне рішення. Чим менші ці величини, тим з більшим завищенням будуть отримані потужності джерел, що забезпечують заданий рівень розігріву НС (у тому числі поверхні підлоги). Усереднені величини теплопровідності шарів λ_{cp} (принаймні тих, де містяться пустотілі СЕТ) можуть бути отримані одним з відомих способів. Величини h_y, h_z можуть бути обрані різними. Температура ґрунту за межами НС приймається фіксованою і такою, що має певний заданий профіль, так що кожному шарові відповідає певна середня температура ґрунту на певній глибині t_{0i} ($i = 1,..., N$). Отже, по глибині температура ґрунту змінюється від рівня $t_{01} = t_0$ (найнижчий шар НС, $i = 1$) до рівня $t_{0N} = t_n$ (для рівня поверхні підлоги із заданою температурою t_n).

3. Формулювання граничної задачі теплопровідності

Відшуканню підлягає функція сталого температурного розподілу усередині призми (температурне поле), обмеженої пласкими граничними поверхнями прямокутної форми. Усередині прямокутна призма структурована – вона складається із N однорідних пласких шарів, що граничать між собою в області суміжних границь, причому тепловий контакт шарів вважаємо неідеальним (має місце кінцевий термічний опір). Шукане усталене температурне поле в середині шаруватої структури $t = t(x, y, z)$ розпадається на N взаємозалежних температурних полів:

$$u_i = u_i(x, y, z) \,, \tag{5}$$

які реалізуються (установлюються) у межах і-го однорідного шару.

Температурне поле в межах НС й умови за її межами, як прийнято вище, вважаємо симетричними відносно площин $x0y$ й $x0z$, тому далі розглядаємо 1/4 частину НС, обмежену площинами симетрії й гранями, що мають тепловий контакт із навколишнім середовищем. Граничні умови на поверхні $x0y$ й $x0z$ відповідно такі:

$$\frac{\partial u_i}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = 0\,; \ |y| \le B\,; \ \frac{\partial u_i}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = 0\,, \ |z| \le L\,; \ x_{i-1} \le x \le x_i\,, \ i = 1,..., N\,. \tag{6}$$

Функції $u_i = u_i(x, y, z)$, що відшукуються в областях $x_{i-1} \le x \le x_i$, $0 \le y \le B$, $0 \le z \le C$ ($i = 1,..., N$), задовольняють рівнянню теплопровідності виду:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda_i} p_i(y, z)\,. \tag{7}$$

На верхній і нижній гранях мають бути виконані граничні умови, відповідно 3-го і 1-го роду:

$$-\lambda_N \frac{\partial u_N}{\partial x}\Bigg|_{x=A} = \alpha(u_N\big|_{x=A} - t_c)\,; \ 0 \le y \le B\,, \ 0 \le z \le C\,; \tag{8}$$

$$u_1\big|_{x=0}=t_0\,;\;\; 0 \le y \le B\,,\;\; 0 \le z \le C\,. \tag{9}$$

Граничні умови на бічних гранях:

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial y}\right|_{y=0} = 0\,;\;\; x_{i-1} \le x \le x_i\,,\;\; i = 1,...,N\,; \tag{10}$$

$$\left.\left(u_i + h_y\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)\right|_{y=B} = t_{0i}\,;\;\; x_{i-1} \le x \le x_i\,,\;\; i = 1,...,N\,. \tag{11}$$

Граничні умови на торцевих гранях:

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\,;\;\; x_{i-1} \le x \le x_i\,,\;\; i = 1,...,N\,; \tag{12}$$

$$\left.\left(u_i + h_z\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)\right|_{z=C} = t_{0i}\,;\;\; x_{i-1} \le x \le x_i\,,\;\; i = 1,...,N\,. \tag{13}$$

Укладання труб в активних шарах визначає вид функцій розподілу джерел $p_i(y,z)$. На рис. 3 показано в плані розміщення труб у деяких варіантах: 1) укладання суцільних труб по довжині НС; 2) секціонування труб; 3) секціонування труб з теплоізолюючими перегородками.

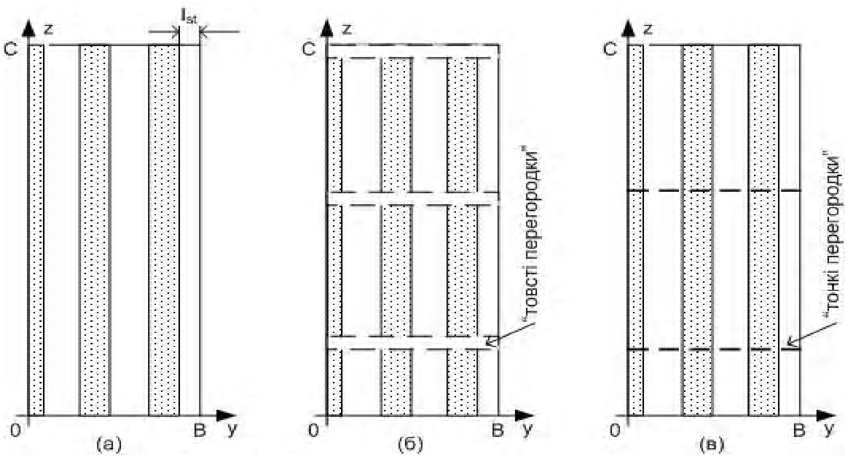

Рис. 3. Варіанти розподілу гріючих труб СЕТ в активних шарах: а - суцільні нагрівачі (кількість труб на ширині смуги $M = 5$); б - секціоновані труби із зазорами (кількість секцій $L = 5$); в - секціоновані труби із тонкими теплоізолюючими перегородками

Варіанти моделей НС на рис. 3 істотно відрізняються з точки зору побудови аналітичного рішення. Варіант (а) НС, що містить суцільні нагрівачі, характеризується однорідністю структури по осі $0z$ – аналітика реалізується методом кінцевих інтегральних перетворювань (КІП) (подвійне перетворення). При цьому важливо підкреслити, що метод КІП дозволяє реалізувати "нерівномірний" спосіб нагрівання й по z - координаті (диференційовані зони) за рахунок відповідного виду підведення потужності в труби, наприклад, за рахунок східчастого виду підведення потужності й відповідного завдання функції розподілу $p_i(y,z)$. На практиці може бути реалізована технічно (з елементами комутації й керування) мультиплікативна схема підведення потужності в активний шар:

$$p_i(y,z) = p_i(y)\cdot q_i(z)\,, \tag{14}$$

де вираз $p_i(y)$ відповідає рівнянню (1), що описує набір М труб із щільністю потужності $p_{i,j}$; вагова функція східчастого виду $q_i(z)$ описує диференційований нагрів поверхні підлоги в окремих зонах (ЗТА) уздовж НС. Їх рівні вибираються в інтервалі значень 0,5...2 відносно певної середньої температури для забезпечення технологічних завдань в приміщенні на одній окремій лінії підлоги.

Якщо на довжині НС організовано L секцій (L – непарне), то вони обмежені координатами:

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot l_{sec.}\le z\le\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot l_{sec.},\ k=-\frac{L-1}{2},...,0,...,\frac{L-1}{2}, \qquad (15)$$

де $l_{sec.}=2C/L$ – довжина однієї секції.

Варіант (б) – практично одержати строге рішення в замкненому виді для структурованої по двох координатах НС навряд чи вийде, а практична користь незначна. Варіант (с) – замкнене рішення, очевидно, одержати можна, користь від такого рішення може бути в тім, щоб на строгій математичній моделі проаналізувати взаємний вплив температурних режимів суміжних (а також більш віддалених) секцій. Надалі будемо розглядати постановку й рішення задачі теплопровідності за варіантом (а) для одного квадранта, що показаний на рис. 3, а.

4. Побудова рішення граничної задачі теплопровідності для шаруватої призми

Рішення рівняння Пуассона (7) з набором зосереджених джерел виду (14) в кожному із шарів

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}=-\frac{1}{\lambda_i}p_i(y)\cdot q_i(z) \qquad (16)$$

будемо шукати методом КІП [3].

Температурне поле в кожному із шарів будемо шукати у вигляді 2-х складових (відповідно до принципу суперпозиції):

$$u_i(x,y,z)=t_{0i}+v_{0i}(x,y,z)+v_i(x,y,z), \qquad (17)$$

де функція
$$\tilde v_{0i}(x,y,z)=t_{0i}+v_{0i}(x,y,z), \qquad (18)$$

є рішенням однорідного рівняння Лапласа

$$\Delta\tilde v_{0i}=0 \qquad (19)$$

з заданими граничними умовами (8)-(13), а функція $v_i(x,y,z)$ – є частковим рішенням вихідного неоднорідного рівняння з однорідними граничними умовами.

Нижче наведені окремо обидві задачі теплопровідності відносно шуканих функцій $v_i(x,y,z)$ і $v_{0i}(x,y,z)$ разом із відповідними граничними умовами:

$$\frac{\partial^2 v_{0i}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_{0i}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_{0i}}{\partial z^2}=0, \qquad (20)$$

$$v_{01}\big|_{x=0}=t_0-t_{01}, \qquad (21)$$

$$-\lambda_N\frac{\partial v_{0N}}{\partial x}\bigg|_{x=x_N}=\alpha[v_{0N}\big|_{x_N}-(t_c-t_{0N})], \qquad (22)$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0, \qquad (23)$$

$$\left(v_{0i}+h_y\frac{\partial v_{0i}}{\partial y}\right)\bigg|_{y=B}=0, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial v_{0i}}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0, \qquad (25)$$

$$\left(v_{0i}+h_z\frac{\partial v_{0i}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=C}=0, \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}=-\frac{1}{\lambda_i}p_i(y)\cdot q_i(z), \qquad (27)$$

$$v_1\big|_{x=0}=0, \qquad (28)$$

$$-\lambda_N\frac{\partial v_N}{\partial x}\bigg|_{x=x_N}=\alpha v_N\big|_{x=x_N}, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0, \qquad (30)$$

$$\left(v_i+h_y\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)\bigg|_{y=B}=0, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0, \qquad (32)$$

$$\left(v_i+h_z\frac{\partial v_i}{\partial z}\right)\bigg|_{z=C}=0. \qquad (33)$$

Складене (повне) рішення (17) задовольняє вихідному рівнянню (16) із граничними умовами на зовнішніх граничних пласких поверхнях. Крім того, отримані рішення для кожного із шарів $i = 1,...,N$ повинні бути узгоджені на границях пласких шарів $x = x_i \, (i = 1,2,...,N-1)$ по температурах і теплових потоках на границях, причому для кожного із наборів функцій окремо, тобто для наборів $v_{0i}(x,y,z)$ і $v_i(x,y,z)$.

Використовуючи стандартну схему рішення таких задач методом КІП [3], виключимо послідовно диференціальні операції по "z" й "y".

Ядро перетворення $K(z,\nu)$, що виключає операцію диференціювання по "z", є рішенням граничної задачі для області $0 \le z \le C$:

$$\frac{\partial^2 K(z,\nu)}{\partial z^2} + \nu^2 K(z,\nu) = 0, \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial K(z,\nu)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\left(K(z,\nu) + h_z \frac{\partial K(z,\nu)}{\partial z}\right)\right|_{z=C} = 0. \tag{35}$$

Сформульована задача є задачею Штурма-Ліувіля на визначення власних чисел, рішення якої є функція $\cos(\nu z)$, що автоматично задовольняє 1-й умові (35) і, крім того, повинна задовольняти 2-й умові (35):

$$\left.[\cos(\nu z) - h_z \nu \sin(\nu z)]\right|_{z=C} = 0,$$

з чого витікає характеристичне рівняння:

$$\mathrm{ctg}(\nu C) = h_z \nu. \tag{36}$$

Визначений з (36) ряд власних чисел ν_p^2, $p = 1,2,..$ дозволяє утворити систему власних функцій:

$$K_p(z) \equiv K_p(\nu_p z) = \cos(\nu_p z). \tag{37}$$

Застосуємо КІП до рівняння (20) з урахуванням КІП вихідної координатної функції $v_{0i}(x,y,z)$:

$$\bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p) = \frac{1}{C}\int_0^C K(\nu_p z) \cdot v_{0i}(x,y,z)dz. \tag{38}$$

Використання граничних умов дозволяє отримати послідовність рівнянь стосовно кожного шару структури, що розглядається:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_{0i}^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_{0i}^p}{\partial y^2} - \nu_p^2 \bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p) = 0, \; p = 1,2,.. \tag{39}$$

По знайденому КІП $\bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p)$ відновлення вихідної функції виконується за формулою:

$$v_{0i}(x,y,z) = \sum_{p=1}^{P} \frac{\cos(\nu_p z)}{N_p} \bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p), \; p = 1,2,.., \tag{40}$$

$$N_p = \frac{1}{C}\int_0^C \cos^2(\nu_p z)dz = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(h_z/C)}{1 + (\nu_p h_z)^2}\right]. \tag{41}$$

Рівняння (39), отримане шляхом застосування до вихідного рівняння КІП з ядром $K_p(z)$, вирішується щодо функцій $\bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p)$, які повинні задовольняти таким умовам:

$$\left.\bar{v}_{0i}^p(x,y,\nu_p)\right|_{x=0} = (t_0 - t_{0i}) \cdot \mathrm{sinc}(\nu_p C), \; i = 1,...,N-1; \tag{42}$$

$$\left.\left(\overline{\overline{v}}_{0N}^{p}+\frac{\lambda_N}{\alpha}\cdot\frac{\partial\overline{v}_{0N}^{p}}{\partial x}\right)\right|_{x=x_N}=(t_0-t_{0N})\cdot\mathrm{sinc}(\nu_p C);\ i=N; \tag{43}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{v}_{0i}^{p}}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ \left.\left(\overline{v}_{0i}^{p}+h_y\frac{\partial\overline{v}_{0i}^{p}}{\partial y}\right)\right|_{y=B}=0. \tag{44}$$

Зазначимо, що відповідно до напластування шарів граничні умови 3-го роду на бічній стінці НС дозволяють враховувати будь-який заданий профіль температурного розподілу у ґрунті, причому в межах окремого шару зовнішня температура ґрунту приймається постійною, яка дорівнює усередненій температурі за межами НС на рівні поточного шару $t_{0i}, i=1,...,N$.

Ядро перетворення $K(y,\mu)$, що виключає операцію диференціювання по "y", є рішенням граничної задачі для області $0\le y\le B$:

$$\frac{\partial^2 K(y,\mu)}{\partial z^2}+\mu^2 K(y,\mu)=0, \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial K(y,\mu)}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\ \left.\left(K(y,\mu)+h_y\frac{\partial K(y,\mu)}{\partial y}\right)\right|_{y=B}=0. \tag{46}$$

Рішенням (45) з урахуванням 1-ї з умов (46) є функція $\cos(\mu y)$, що повинна бути підлегла ще й 2-й умові (46), тобто необхідно виконання рівняння:

$$\mathrm{ctg}(\mu B)=h_y\mu. \tag{47}$$

Це рівняння породжує ряд власних чисел μ_q^2 і відповідно набір власних функцій:

$$K_q(y)\equiv K_q(\mu_q y)=\cos(\mu_q y),\ q=1,2,... \tag{48}$$

Введемо КІП функцій $\overline{v}_{0i}(x,y,\nu_p)$ по координаті "y":

$$\overline{\overline{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)=\frac{1}{B}\int_0^B K_q(\mu_q y)\cdot\overline{v}_{0i}^{p}(x,y,\nu_p)dy. \tag{49}$$

Після 2-х послідовно проведених КІП вихідне диференціальне рівняння Лапласа у просторі зображень представляється у вигляді:

$$\frac{\partial^2\overline{\overline{v}}_{0i}^{p,q}}{\partial x^2}-(\nu_p^2+\mu_q^2)\overline{\overline{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)=0,\ \ q,p=1,2,... \tag{50}$$

Відповідно до перетворення (49) функції $\overline{\overline{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)$ повинні задовольняти таким граничним умовам на дні та підлозі:

$$\left.\overline{\overline{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)\right|_{x=0}=(t_0-t_{0i})\mathrm{sinc}(\nu_p C)\mathrm{sinc}(\mu_q B),\ i=1; \tag{51}$$

$$\left.\left(\overline{\overline{v}}_{0N}^{p,q}+\frac{\lambda_N}{\alpha}\frac{\partial\overline{\overline{v}}_{0N}^{p,q}}{\partial x}\right)\right|_{x=x_N}=(t_0-t_{0N})\mathrm{sinc}(\nu_p C)\mathrm{sinc}(\mu_q B),\ i=N. \tag{52}$$

Рішення (50) знаходиться у вигляді комбінацій гіперболічних функцій :

$$\bar{\bar{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)=c_i(q,p)\cdot \mathrm{ch}[\omega_{qp}(x-x_i)]+d_i(q,p)\cdot \mathrm{sh}[\omega_{qp}(x-x_i)],\ i=1,2,..,N, \quad (53)$$

де $\omega_{qp}=\sqrt{\mu_q^2+\nu_p^2}$; коефіцієнти $c_i(q,p)$ та $d_i(q,p)$ – знаходяться шляхом вирішення системи 2N лінійних неоднорідних рівнянь, які утворюються з умов (51), (52), а також 2(N-1) умов узгодження наборів функцій $\bar{\bar{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)$ на N-1 границях шарів НС, модифікованих з урахуванням КІП:

$$\bar{\bar{v}}_{0i}^{p,q}\Big|_{x=x_i}=\left(\bar{\bar{v}}_{0,i+1}^{p,q}-r_i^*\lambda_{i+1}\frac{\partial\bar{\bar{v}}_{0,i+1}^{p,q}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_i}+(t_{0,i+1}-t_{0,i})\mathrm{sinc}(\nu_p C)\mathrm{sinc}(\mu_q B),\ i=1,2,..,N-1, \quad (54)$$

$$\left(\lambda_i\frac{\partial\bar{\bar{v}}_{0,i}^{p,q}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_i}=\left(\lambda_{i+1}\frac{\partial\bar{\bar{v}}_{0,i+1}^{p,q}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_i},\ i=1,2,..,N-1, \quad (55)$$

де r_i^* – термічні контактні опори між i-м та i+1-м шарами.

Оригінали шуканих функцій відновлюються за формулами:

$$\bar{v}_{0i}^{p}(x,y,\nu_p)=\sum_{q=1}^{Q}\frac{\cos(\mu_q y)}{M_q}\cdot\bar{\bar{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p),\ i=1,2,..,N, \quad (56)$$

$$M_q=\frac{1}{B}\int_0^B\cos^2(\mu_q y)dy=\frac{1}{2}\left[1+\frac{(h_y/B)}{1+(\mu_q h_y)^2}\right]. \quad (57)$$

З урахуванням (40), (41) загальні вираження шуканих координатних функцій $v_{0i}(x,y,z)$ з (18) можуть бути записані через їхні образи КІП у вигляді:

$$v_{0i}(x,y,z)=\sum_{p=1}^{P}\frac{\cos(\nu_p z)}{N_p}\sum_{q=1}^{Q}\frac{\cos(\mu_q y)}{M_q}\cdot\bar{\bar{v}}_{0i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p). \quad (58)$$

Аналогічно будується рішення для функцій $v_i(x,y,z)$, які визначаються розподілом джерел тепла в НС. Воно може бути записано у вигляді подвійного ряду по власних функціях відповідних задач Штурма-Ліувіля:

$$v_i(x,y,z)=\sum_{p=1}^{P}\frac{\cos(\nu_p z)}{N_p}\sum_{q=1}^{Q}\frac{\cos(\mu_q y)}{M_q}\cdot\bar{\bar{v}}_{i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p). \quad (59)$$

Функції $\bar{\bar{v}}_{i}^{p,q}(x;\mu_q,\nu_p)$ також визначаються через комбінації функцій гіперболічного синуса і косинуса від аргументів $\omega_{p,q}^2(x-x_i)$ з невизначеними коефіцієнтами. Останні визначаються шляхом вирішення систем 2N неоднорідних лінійних рівнянь в просторі зображень КІП.

Зазначимо, що згідно з принципом суперпозиції функції $v_{0i}(x,y,z)$ в рівнянні (17) відповідають за тепловий внесок навколишнього середовища – повітря та ґрунту $\{t_c,t_0,t_{0i}\}$ й підкоряються рівнянню Лапласа при відсутності джерел, а функції координат $v_i(x,y,z)$ визначаються розподілом джерел $\{p_i(y,z),\ i=1,2,..N\}$ в середині НС при однорідних граничних умовах на границях НС. Обидві системи функцій задовольняють умовам узгодження температур і потоків тепла на границях шарів НС. Таким чином, загальне рішення граничної задачі щодо визначення розподілу усталеного температурного поля в багатошаровій 3-вимірній структурі у формі призми з довільно розташованими трубчастими джерелами тепла побудоване.

Створена відповідна комп'ютерна модель теплопередачі в такій моделі БЕТСО дозволяє вирішувати велику кількість питань стосовно оптимізації її теплового режиму, керування тепловими потоками тощо.

5. Висновки

Обґрунтована фізична модель й розроблена строга математична модель стаціонарного режиму теплопередачі запропонованої 3-вимірної багаторівневої (багатошарової) електротеплоакумулювальної системи опалення, в якій містяться розподілені трубчасті джерела тепла. Кількість однорідних шарів та їх теплофізичні характеристики довільні.

Наукова новизна полягає в тому, що побудована система рівнянь визначає функціональну залежність температурних полів на поверхні БЕТСО і в її середині від сукупності незалежних розподілених у просторі впливових факторів, яка дозволяє вирішувати зворотні задачі, тобто знаходити розподіли джерел тепла в нетермоізольованій НС за певними умовами щодо розподілів або значень температур.

Практична значущість полягає в тому, що рішення задачі теплопередачі доведено до створення комп'ютерної моделі, яка дозволяє проводити оптимізацію її теплових режимів, а також слугує основою для теоретико-експериментального рішення зворотних задач щодо розробки системи структурно-функціонального керування тепловими потоками (див., наприклад, [2]), реалізації різних функціональних режимів БЕТСО тощо.

Список літератури: 1. Вісн. ХДТУСГ ім. П. Василенка «Пробл. енергозабезпеч. та енергозбереж. в АПК України». Харків, 2004. Вип. 27. Т. 1. С. 245-250. **2.** *Романченко Н.А., Слесаренко А.П., Сорока А.С.* Оптимальне керування тепловими режимами мікроклімату в технологічно активних зонах виробничих споруд // АСУ и приборы автоматики. 2009. № 2. С. 113-120. **3.** *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.

Надійшла до редколегії 22.10.2009

Слесаренко Анатолій Павлович, лауреат Держ. премії України, д-р фіз.-мат. наук, професор, пров. наук. співроб. Інст. проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України. Наукові інтереси: комплексне математичне моделювання, діагностика та ідентифікація теплових процесів; теплофізика; математична фізика та диференційні рівняння; оптимальне керування тепловими режимами в енергетиці, радіоелектроніці, в елементах енергетичного, електронного та космічного обладнання. Захоплення та хобі: пошук невирішених проблем. Адреса: Україна, 61046, Харків, вул. Пожарського, 2/10, роб. тел. 95-95-64, дом. тел. 65-51-89.

Романченко Микола Анастасійович, канд. техн. наук, доцент каф. електротехнологій сільськогосподарського виробництва, завідувач кафедри Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. Наукові інтереси: електротехнології та електроенергетика, проблеми ефективного використання нетрадиційних відновлюваних джерел енергії. Захоплення та хобі: бджільництво. Адреса: Україна, 61125, Харків, вул. Енгельса, 19, роб. тел. 712-28-33, дом. тел. 733-15-89.

Сорока Олександр Степанович, канд. фіз.-мат. наук, доцент каф. мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв ХНУРЕ. Наукові інтереси: радіофізика та електроніка, прикладна електродинаміка пристроїв НВЧ та КВЧ, математичне моделювання теплових та електромагнітних процесів у технологічних установках НВЧ. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Леніна, 14, роб. тел. 702-13-62, дом. тел. 336-82-24.