УДК 621.391

Ю. Н. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук, *В. Н. ГАПОНЕНКО*, *В. Н. ИГНАТЕНКО*, *А. В. ТОВАРНИЦКИЙ*, канд. техн. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО МЕТОДА ПРИЕМА ДВОИЧНО-КОДИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

Существует два основных метода обработки двоично-кодированных сигналов с избыточностью: метод приема сигналов «в целом» и традиционный метод «поэлементного приема» с дальнейшим декодированием второй решающей схемой — декодером. Традиционный метод приема таких сигналов уступает приему «в целом» по помехоустойчивости, но выигрывает в простоте реализации. Синтез методов, которые, с одной стороны, допускали бы техническую реализацию более простую, чем при идеальном приеме «в целом», а с другой — обеспечивали бы большую верность приема, чем при «поэлементном приеме», является важной задачей. Рассмотрим один из возможных методов улучшения качественных показателей приема двоично-кодированных сигналов с избыточностью за счет незначительного усложнения традиционного метода их приема [1]. Реализация данного метода представлена на рис. 1 в виде приемника двоичных сигналов. Данный приемник состоит из первой решающей схемы *1*, декодера *2* (вторая решающая схема), третьей решающей схемы *3*, состоящей из устройства задержки *4*, коррелятора *5*, автокоррелятора *6*, сравнивающего устройства *7*, логического устройства *8* и устройства управления *9*, модулятора *10*.

Проведем анализ помехоустойчивости квазиоптимального приема составных сигналов при следующих условиях: — **передача** дискретных сообщений ведется избыточным (n, k) кодом, обнаруживающим ошибки кратностью $\omega_e \leqslant 2t$ и имеющим кодовое расстояние $d_{min}=2t+1$; — сигналы $S_м(t)$ представляют на интервале (t_0, t_0+T) кодовые блоки одинаковой энергии

$$E_c = \int_0^T S_м^2(t)\,dt; \tag{1}$$

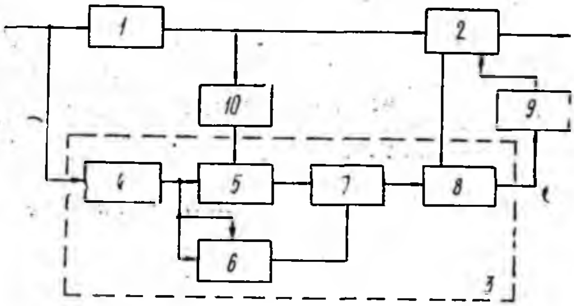

Рис. 1

— аналоговая часть канала является гауссовой, так что

$$y(t)=S(t)+n(t) \tag{2}$$

представляет собой некоррелированную смесь сигнала с помехой на входе приемника;

— третья решающая схема и регенератор, осуществляющий оптимальный «поэлементный прием» на интервале τ, представлены когерентной структурой и работают по максимуму апостериорной вероятности.

На основе анализа работы приемника с тремя решающими схемами получаем выражения для выходных вероятностей:

$$P_{пп} = P_{ппII}\,(1 - P_{лсIII}); \tag{3}$$

$$P_{ош} = P_{ошII} \cdot P_{ошIII}, \tag{4}$$

где $P_{ош}$, $P_{ошII}$ и $P_{пп}$, $P_{ппII}$ — соответственно вероятности ошибки и вероятности правильного приема кодовых слов квазиоптимальным приемником и декодором; $P_{лс\,III}$ — вероятность ложного стирания третьей решающей схемой правильно декодированного блока.

На вход устройства корреляционной свертки «в целом» поступает входная реализация $y(t)=S(t)+n(t)$. При этом на входе нормирующего канала связи «в целом» формируется пронормированная по энергии кодового слова случайная величина

$$\xi = \frac{1}{E_c}\int_0^T [y(t)]^2\,dt = 1 + \frac{P_ш}{P_c} + \frac{2}{E_c}\int_0^T S(t)\,n(t)\,dt, \tag{5}$$

где $P_c = \frac{E_c}{T}$ — мощность сигналов, используемых для передачи кодовых блоков; $\frac{1}{T}\int\limits_0^T n^2(t)\,dt = \sigma_ш^2 = P_ш$ — дисперсия шумового процесса $n(t)$, являющаяся числовой характеристикой на нагрузке 1 Ом. Случайная величина, определяемая соотношением (5) для принятой модели канала связи, является нормально-распределенной случайной величиной с математическим ожиданием

$$m_{\xi_1} = M[\xi_1] = 1 + \frac{P_ш}{P_c} \text{ и дисперсией } D_{\xi_1} = \frac{2P_ш}{P_c}. \qquad (6)$$

На выходе канала взаимокорреляционной обработки в результате свертки входной реализации $y(t)$ с гипотетическим сигналом $S_r(t)$ (канальная несущая, модулированная двоичной последовательностью с выхода регенератора) будет получена нормированная по E_c случайная величина ξ_2:

$$\xi_2 = \frac{1}{E_0}\int\limits_0^T S_r(t)\,y(t)\,dt = \rho + \frac{1}{E_0}\int\limits_0^T S_r(t)\,n(t)\,dt, \qquad (7)$$

где $\rho = \frac{1}{E_c}\int\limits_0^T S(t)\,S_r(t)\,dt$ — коэффициент взаимной корреляции двоично-кодированных сигналов $S(t)$ и $S_r(t)$.

Случайная величина ξ_2, как и ξ_1, является нормально-распределенной случайной величиной с математическим ожиданием

$$m_{\xi_2} = M[\xi_2] = \rho \text{ и дисперсией } D_{\xi_2} = \frac{P_r \cdot P_ш}{2P_c}. \qquad (8)$$

Очевидно, что при отсутствии ошибок на выходе регенератора случайная величина $\xi_2 = \xi_2'$ изменит свое математическое ожидание до значения

$$m'_{\xi_2} = 1 \quad \text{и дисперсию до } D_{\xi_2} = \frac{P_ш}{2P_c}.$$

При использовании третьей решающей схемы в канале без помех ($P_{ош} = 0$) выходные значения нормирующего и гипотетического каналов будут иметь значения:

$$m_{\xi_1'} = 1; \; D_{\xi_1'} = 0; \; m_{\xi_2} = \rho; \; D_{\xi_2} = 0. \qquad (9а)$$

Это означает, что при отсутствии помех выходные сигналы корреляторов синтезированной схемы являются не случайными (их распределение превращается в δ-функцию) функционально связанными величинами.

При наличии помех ($P_{ош} \neq 0$) разность между ξ_1 и ξ_2 будет случайной, так как дисперсии распределений этих случайных величин будут отличны от нуля. Однако математическое ожидание разности ξ_1 и ξ_2 будет определяться выражением (9а), в связи с чем значение ω_e/n можно выбирать в качестве пороговой величины k_1.

Очевидно, что

$$P_{\text{лсIII}} = P(\xi_1 - k_1 \geqslant \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_2) \int_{\xi_2+k_1}^{\infty} \varphi(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{10}$$

Подставляя в последнее выражение параметры законов распределения для случая $P_{\text{ш}} \neq 0$ и отсутствии ошибок с выхода регенератора, представляем вероятность ложного стирания в результате применения третьей решающей схемы в виде

$$P_{\text{лсIII}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi_2-\rho)^2}{2\sigma_{\xi_2}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_1}} \cdot \int_{\xi_2+k}^{\infty} e^{-\frac{\left(\xi_1-\left(1+\frac{P_{\text{ш}}}{P_{\text{c}}}\right)+k_1\right)^2}{2\sigma_{\xi_1}^2}} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= 1 - F\frac{\omega_e}{n}\left(\sqrt{0{,}2\lambda_{12}\frac{P_{\text{c}}}{P_{\text{ш}}}}\right), \text{ где } F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{11}$$

Вероятность ошибки третьей решающей схемы $P_{\text{ош}_{\text{ш}}}$ можно записать как

$$P_{\text{ошIII}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1) \int_{\xi_1-k_1}^{\infty} \varphi(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \tag{12}$$

так что с учетом законов, параметров распределения $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$ при наличии ошибок с выхода регенератора

$$\rho = \lambda_{12} - (1-\lambda_{12})\frac{\omega_e}{n} = m_{\xi_2};\quad D_{\xi_2} = \frac{P_{\text{ш}}}{2P_{\text{c}}};\quad m_{\xi_1} = 1 + \frac{P_{\text{ш}}}{P_{\text{c}}};$$

$$D_{\xi_1} = \frac{2P_{\text{ш}}}{P_{\text{c}}};\quad k_1 = \frac{\omega_e}{n},$$

где λ_{12} — коэффициент различимости двоичных сигналов [2].

Выражение (12) представим в виде

$$P_{\text{ошIII}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\xi_1-\left(1+\frac{P_{\text{ш}}}{P_{\text{c}}}\right)\right)^2}{2\sigma_{\xi_1}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi_2}} \cdot \int_{\xi_1-\frac{\omega_e}{n}}^{\infty} e^{-\frac{\left(\xi_2-\left(1+\frac{2\omega_e}{n}\right)\right)^2}{2\sigma_{\xi_2}^2}} d\xi_2 d\xi_1. \tag{13}$$

После аналогичных математических преобразований последнего выражения, применяемых ранее, получим

$$P_{\text{шIII}} = 1 - F\left(\frac{\omega_e}{n}\sqrt{0{,}2\lambda_{12}\frac{P_{\text{c}}}{P_{\text{ш}}}}\right). \tag{14}$$

Реальные каналы являются частотно-ограниченными, поэтому для бинарного канала связи скорость передачи элемента примем равной $V=\frac{1}{\Delta F_k}$. В силу независимости принятия решения второй и третьей решающей схемой с учетом (14) вероятность ошибки и правильного приема кодовых слов длины n квазиоптимальным приемником для кодов, обнаруживающих ошибки, в случае ортогональных сигналов определяется выражением

$$P_{ошIII} = P_{лсIII} = 1 - F\left(\frac{\omega_c}{n}\sqrt{0{,}2nh_э^2\lambda_{12}}\right), \tag{15}$$

где $h_э^2$ — отношение мощности сигнал-шум на длительности одного элемента.

Исследуем помехоустойчивость предложенного метода приема сигналов при некогерентной структуре третьей решающей схемы в гауссовых локально-стационарных каналах.

Известно, что случайная величина ξ_2 в аддитивных гауссовых каналах с некоррелированным «белым» шумом будет подчинена обобщенному Релеевскому закону со следующими параметрами [3]:

$$m_{\xi_2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{4}{nh_э^2\lambda_{12}}}, \qquad \sigma_{\xi_2}^2 = \frac{P_ш}{P_c}. \tag{16}$$

Закон распределения плотности вероятности и числовые характеристики величины ξ_1 определены ранее. Вероятность ошибки через законы распределения можно записать как

$$P_{ошIII} = 1 - \int_0^\infty \varphi(\xi_2) \int_{\xi_2}^\infty \varphi(\xi_1 - k_1)\, d\xi_1 d\xi_2, \tag{17}$$

что верно для случая появления ошибок с выхода регенератора. Обозначив $\xi_1 - k_1 = \xi'_1$ с учетом законов распределения ξ'_1, ξ_2 и выполнив интегрирование по ξ_2, выражение (17) приведем к виду

$$P_{ошIII} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{2j+1} (-1)^{j+i} \frac{\alpha^{i} a^{2j+1-i}}{j!(2j+1)} C_{2j+1}^{i} \int_0^\infty t^{2j+1-i} e^{-\frac{t^2+\beta^2}{2}} I_0(\beta t)\,dt, \tag{18}$$

где $\frac{m_{\xi'_1}}{\sigma_{\xi'_1}} = a$; $\frac{\xi_2}{\sigma_{\xi_2}} = t$; $\frac{m_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_2}} = \beta$; $\frac{\sigma_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_1}} = \alpha$;

$$F(ta - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum (-1)^j \frac{(ta-a)^{2j+1}}{k!(2j+1)}. \tag{19}$$

Представляя затем модифицированную функцию Бесселя как $I_0(\beta t) = J_0(j\beta t)$ и производя ряд преобразований, получаем

$$P_{\text{ош III}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1) \frac{1}{j!(2j+1)} (a\beta - \alpha)^{2j+1} = F(a\beta - \alpha), \quad (20)$$

что для указанных выше законов распределения позволяет $P_{\text{ош III}}$ представить так:

$$P_{\text{ош III}} = 1 - F\left(\frac{\omega_e}{n} \sqrt{\lambda_{12} n h_э^2}\right). \quad (21)$$

Выполняя аналогичные преобразования, получаем соотношение вероятности ложного стирания третьей решающей схемой:

$$P_{\text{лс III}} = P(\xi_1 - k_1 > \xi_2) = 1 - F\left(\frac{\omega_e}{n} \sqrt{\lambda_{12} n h_э^2}\right). \quad (22)$$

Анализ выражений (15) — (22) показывает, что вероятности ошибки и ложного стирания третьей решающей схемой является функциями от параметров: $\frac{\omega_e}{n}$ — относительной избыточности; n — базы составных сигналов; $h_э^2$ — математического ожидания отношения энергии сигнала к спектральной плотности помех на длительности одного элемента; λ_{12} — коэффициента различимости двоичных сигналов. Графики зависимости $P_{\text{ош III}}$ и $P_{\text{лс III}}$ от параметра ω_e для $n = 15$, 63, 255 и $h_э^2 = 2$—10 приемников некогерентной и когерентной структуры при соответствующих видах модуляции представлены на рис. 2.

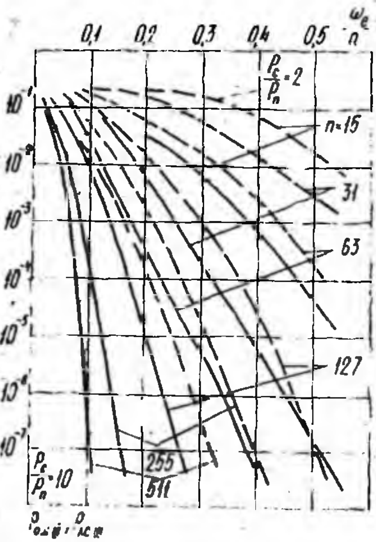

Рис. 2

Таким образом, с ростом величины $\frac{\omega_e}{n}$ вероятность ошибки и вероятность ложного стирания при $h_э^2 = \text{const}$ и $n = \text{const}$ уменьшаются; увеличение базы составных сигналов или $h_э^2$ приводит к уменьшению $P_{\text{ош III}}$ и $P_{\text{лс III}}$; при равных условиях вероятности $P_{\text{ош III}}$ и $P_{\text{лс III}}$ когерентной для выбранного типа модуляции; применение в традиционных схемах обработки третьей решающей схемы позволяет для реальных кодов $n = 15, 23, 255$ даже при $h_э^2 = 2$ получить выигрыш в помехоустойчивости до четырех порядков.

Список литературы: 1. *Обобщенное* спектральное разложение сигналов и его применение в системах связи/Ю. Н. Александров, А. К. Курышкин, В. С. Скляров, А. В. Товарницкий//Радиотехника. 1988. Вып. 87. С. 3—9. 2. *Финк Л. М.* Теория передачи дискретных сообщений. М., 1970. 727 с. 3. *Тихонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. М., 1983. 320 с.

Поступила в редколлегию 17.04.89