

## ПОВЫШЕНИЕ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК СПЕКТРОВ АДДИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

### Введение

Случайные процессы, исследуемые в радиотехнике, часто образованы суммированием нескольких зависимых или независимых между собой процессов. Такие процессы встречаются в радиолокации, гидролокации и др. К ним также относятся процессы, формирующиеся в системах несколькими входами и одним выходом [1]. Результирующий аддитивный процесс может содержать несколько мод в спектре. При получении параметрического спектра многомодовых процессов используются модели линейного предсказания порядков больше двух. Однако сумма процессов линейного предсказания не является истинным классическим процессом линейного предсказания [2]. Для него невозможно указать порядок модели и вычислить параметры модели, зная параметры моделей составляющих его процессов. Это может быть причиной снижения точности спектральной оценки и ее разрешающей способности.

В статье рассматриваются принципы построения аддитивных моделей авторегрессии стационарных аддитивных процессов в случае известных составляющих процессов. Предложены уравнения для вычисления параметров аддитивных моделей, состоящих из моделей линейного предсказания одинакового ранга методом Юла-Уокера и с использованием алгоритма Берга. Найдено выражение параметрической спектральной оценки на основе аддитивной модели. Рассмотрен пример построения присоединенной модели  $AP_1(2)+AP_2(2)$ . Проведен сравнительный анализ спектрального разрешения, полученного с использованием оценок параметров методом Юла-Уокера и алгоритма Берга по классической АР модели, с аналогичными оценками, полученными по аддитивной модели.

### Аддитивные процессы линейного предсказания

Формирующий фильтр для аддитивного процесса линейного предсказания представлен на рис. 1. Порождающим процессом на входе формирующего фильтра является гауссов или негауссов белый шум. Выходом формирующего фильтра будет аддитивный гауссов или негауссов статистически связанный процесс.

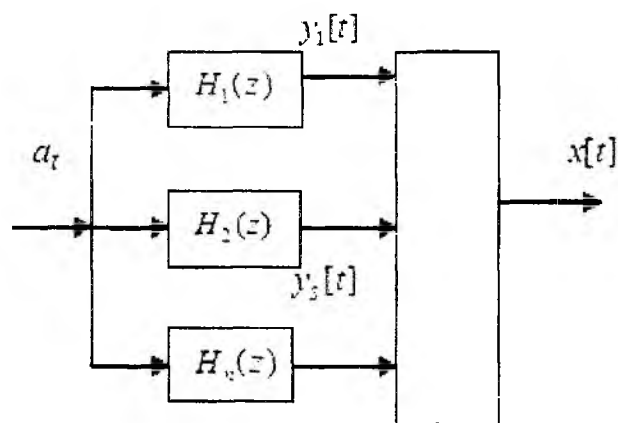


Рис. 1

Аддитивный стационарный случайный процесс описывается уравнением

$$x[t] = H(z)a[t], \quad (1)$$

где  $a[t]$  – гауссов или негауссов случайный процесс типа белого шума,  $H(z)$  – рациональная системная функция

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_n(z). \quad (2)$$

Формирующие фильтры 1, 2, ..., n, представленные на рис. 1, могут быть формирующими фильтрами AP, СС или APСС. Параметры этих фильтров, определяющие системную функцию аддитивной модели  $H(z)$ , задаются либо исходя из формы спектра выходного процесса  $x[t]$ , либо вычисляются заранее как выборочные значения реального моделируемого процесса. Из (1) и (2) следует, что результирующий процесс  $x[t]$  может быть представлен аддитивным набором случайных процессов

$$\begin{aligned} x[t] &= [H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_n(z)]a[t] = H_1(z)a[t] + H_2(z)a[t] + \dots + \\ &+ H_n(z)a[t] = y_1[t] + y_2[t] + \dots + y_n[t], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y_i[t]$  – составляющие сложного случайного процесса  $x[t]$ . Полагаем, что они являются процессами линейного предсказания. Будем называть случайный процесс (1), удовлетворяющий указанным выше свойствам, аддитивным процессом линейного предсказания.

#### Аддитивная модель AP<sub>1</sub>(2)+AP<sub>2</sub>(2)

Рассмотрим принципы построения аддитивной модели на примере модели AP<sub>1</sub>(2)+AP<sub>2</sub>(2), у которой порядки составляющих моделей  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 2$ . Пусть известны выборки составляющих аддитивного случайного процесса  $y_1[t]$  и  $y_2[t]$ . Тогда составляющие присоединенной модели  $y_1[t]$  и  $y_2[t]$  описываются моделями AP<sub>1</sub>(2) и AP<sub>2</sub>(2):

$$y_1[t] = \sum_{i=1}^2 \Phi_1[i]y_1[t-i] + a[t], \quad y_2[t] = \sum_{n=1}^2 \Phi_2[n]y_2[t-n] + a[t]. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем разностное уравнение аддитивной модели AP<sub>1</sub>(2)+AP<sub>2</sub>(2)

$$x[t] = \sum_{i=1}^2 \Phi_1[i]y_1[t-i] + \sum_{n=1}^2 \Phi_2[n]y_2[t-n] + 2a[t]. \quad (5)$$

Для нахождения параметров аддитивной модели (5) умножим левую и правую части уравнений (4а) и (4б) на  $y_1[t-j]$  и  $y_2[t-k]$  соответственно, а затем усредним. В результате получим две системы уравнений:

$$R_1[j] = \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i]R_1[j-i], \quad R_2[k] = \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n]R_2[k-n], \quad (6)$$

где  $R_1[j] = E\{y_1[t]y_1[t-j]\}$ ,  $R_2[k] = E\{y_2[t]y_2[t-k]\}$ . Для нахождения системы уравнений (6) использовалось условие оптимальности моделей:

$$E\{a[t]a[t-j]\} = 0, \quad E\{a[t]y_1[t-j]\} = 0, \quad E\{a[t]y_2[t-k]\} = 0 \quad \text{при } j \neq 0, \quad k \neq 0.$$

Уравнения для расчета параметров модели AP<sub>1</sub>(2)+AP<sub>2</sub>(2) можно представить в матричном виде

$$\bar{\Phi}_1 = R_1^{-1}\bar{R}_1[j-i], \quad \bar{\Phi}_2 = R_2^{-1}\bar{R}_2[k-n]. \quad (7)$$

Квадрат амплитудно-частотной характеристики формирующего фильтра, состоящего из двух параллельно включенных фильтров,

$$|H(f)|^2 = |H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2 + 2|H_1(f)||H_2(f)|. \quad (9)$$

Выражение для параметрической оценки спектра аддитивного процесса линейного предсказания  $AP_1(2)+AP_2(2)$ , описываемого уравнением (5), получено из (9) с использованием системной функции модели AP [3]

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| \sum_{n=0}^2 \Phi_1[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2} + \frac{D_a}{\left| \sum_{n=0}^2 \Phi_2[n] e^{-j2\pi f nT} \right|^2} + \frac{2D_a}{\left| \sum_{i=0}^2 \Phi_1[i] e^{-j2\pi f iT} \right| \left| \sum_{n=0}^2 \Phi_2[n] e^{-j2\pi f nT} \right|} \quad (10)$$

Последнее слагаемое в (10) характеризует взаимный спектр процессов  $y_1[t]$  и  $y_2[t]$ .

#### Анализ разрешающей способности параметрической оценки спектров на основе аддитивной модели

Методом статистического моделирования был проведен сравнительный анализ разрешающей способности четырьмя способами: спектральной оценки с помощью классической модели AP(4), на основе алгоритма Берга, по аддитивной модели  $AP_1(2)+AP_2(2)$  и по аддитивной модели, выборочные коэффициенты которой рассчитывались по формуле Берга. Хотя авторегрессионные методы спектрального анализа предлагались многим авторами, например Е. Парзенем, лишь после работ Д. Берга, предложившего методы, обеспечивающие высокое спектральное разрешение для выборок ограниченной длины, параметрическое спектральное оценивание получило широкое распространение и развитие.

Эффективные методы решения уравнения Юла–Уокера были предложены Н. Левинсоном на основе теплицевых свойств корреляционной матрицы. Для спектрального оценивания применялся алгоритм Левинсона–Дарбина, позволяющий рекуррентно вычислять коэффициенты AP. Он описывается системой уравнений:

$$\Phi_n[i] = \Phi_{n-1}[i] + K[n]\Phi_{n-1}[n-i], \quad (\sigma_{a,n})^2 = (1 - \Phi_n^2[n]) (\sigma_{a,n-1})^2,$$

с инициацией

$$\Phi_1[1] = \frac{-R_1}{(\sigma_x)^2}, \quad (\sigma_{a,1})^2 = (1 - \Phi_1^2[1]) (\sigma_x)^2, \quad n = 2, \dots, p,$$

где  $\sigma_x$  – СКО процесса,  $\sigma_{a,n}$  – СКО ошибки предсказания для модели AP  $n$ -го порядка,  $K[n]$  – коэффициенты отражения  $n$ -го звена решетчатого фильтра, вычисляемые в данном случае по формуле Берга

$$K[n] = \frac{-2 \sum_{t=n+1}^N a_{n-1}[t] b_{n-1}[t-1]}{\sum_{t=n+1}^N |a_{n-1}[t]|^2 + \sum_{t=n+1}^N |b_{n-1}[t-1]|^2}, \quad (11)$$

где  $a_{n-1}[t], b_{n-1}[t-1]$  – ошибки прямого и обратного предсказания  $n$ -го звена решетчатого фильтра.

Разрешающая способность анализировалась на случайном процессе, представляющем собой сумму двух процессов AP с параметрами спектра  $f_1 = 150$ ,  $df_1 = 2$ ,  $f_2 = 180$ ,  $df_2 = 2$ , при частоте дискретизации равной 1000. Коэффициенты AP, соответствующие заданным параметрам спектра были получены по методу, предложенному в [4]. Для каждого метода были получены 50 выборок, каждая из которой содержала по 100 отсчетов. Выборки были сформированы по разным реализациям белого гауссова шума. На рис. 2 показан истинный спектр модели  $AP_1(2)+AP_2(2)$ , рассчитанный по формуле (10).

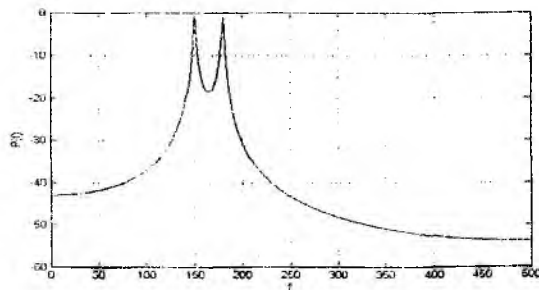


Рис. 2

На рис. 3 показаны спектры аддитивного процесса, если параметры модели  $AR(6)$  найдены по методу Юла-Уоккера. На рис. 4 представлены результаты параметрического спектрального оценивания с высоким разрешением по гармоническому алгоритму Берга, в котором учитывались шесть коэффициентов отражения. Как видно из рисунков, эти два метода не дают хорошего разрешения для выбранных параметров спектра.

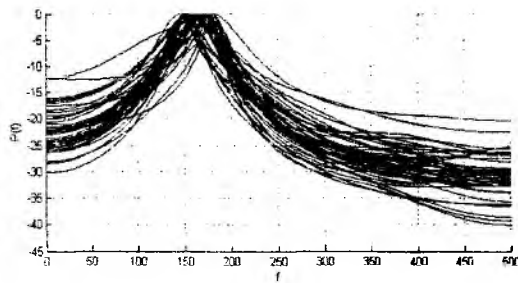


Рис.3

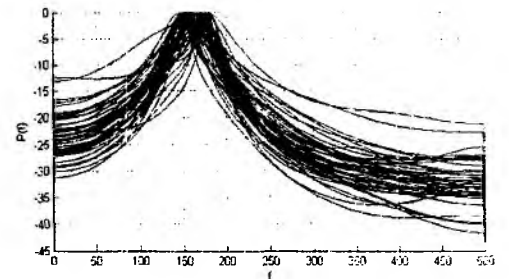


Рис.4

На рис. 5 показаны спектральные оценки по аддитивной модели, параметры которой рассчитаны по формуле (6). Результаты спектрального разрешения с использованием аддитивной модели, выборочные коэффициенты которой были найдены по формуле Берга (11), представлены на рис. 6. Порядки составляющих моделей аддитивного процесса составляли:  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 2$ . Анализ графиков на рис. 5 и 6 показывает, что применение аддитивной модели дает лучшее разрешение по сравнению с классическими параметрическими методами высокого разрешения.

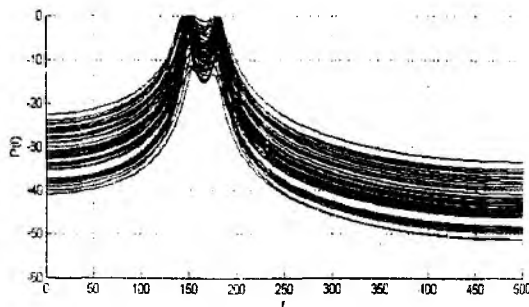


Рис. 5

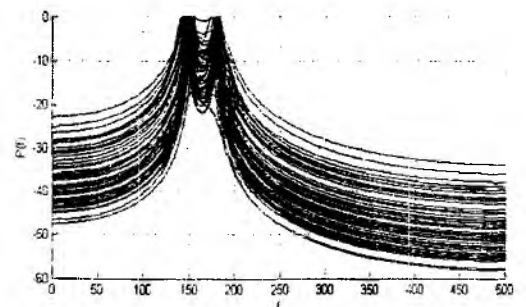


Рис. 6

### Выводы

Предложено описывать аддитивные процессы аддитивными моделями линейного предсказания. Получены выражения для спектрального оценивания для аддитивной модели

$AR_1(2)+AR_2(2)$ . Показана полезность модели для спектрального анализа, в частности для повышения разрешающей способности. Проведен сравнительный анализ спектрального разрешения на основе классической и аддитивной моделей линейного предсказания. Продемонстрировано преимущество разрешения спектров, полученных с помощью аддитивных моделей.

**Список литературы:** 1. Бендат Д., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с. 2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406с. 3. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с. 4. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиотехника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85.

*Харьковский национальный  
университет радиотехники*

*Поступила в редколлегию 15.02.2011*