

6. Кацельник В. Г. О движении абразивных частиц около вращающейся цилиндрической детали // Абразивы, 1977. — № 8. — С. 16—17.
7. Худобин Л. В., Гурьянихин В. Ф., Мельников А. Н. Влияние размеров и формы шлифовальных кругов на создаваемые ими воздушные потоки // Вопросы теории и прогрессивной технологии процессов абразивной обработки. Труды ВНИИАШ, Ленинград, 1977. — С. 49—54.
8. Тарз С. М. Краткий курс теоретической механики. — Москва: Наука, 1974.
9. Зверев Н. И., Ушаков С. Г. Экспериментальное исследование процесса центробежной сепарации пыли // Теплоэнергетика, 1970. — № 7. — С. 25—27.
10. Боровков В. С., Майрановский Ф. Г. Аэродинамика систем вентиляции и кондиционирования воздуха // Москва: Стройиздат, 1978. — 120 с.

УДК 681.322

Вартанян В. М., Шах Л. Г., Романенков Ю. А.

АО "Авионика". Украина, г. Киев

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ". Украина, г. Харьков

### ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НЕСТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

#### Анотація

*Розглянуто способи побудови й аналізу інтервальних математичних моделей об'єктів і процесів без обліку їх імовірних характеристик.*

#### Abstract

*Ways of construction and the analysis of interval mathematical models of objects and processes without taking into account their stochastic characteristics are considered.*

Интервальное представление факторов неопределенности в последнее время привлекает все большее внимание исследователей как наименее ограниченное и отвечающее широкому классу практических задач. Во многих прикладных задачах часто нет оснований или недостаточно информации для того, чтобы рассматривать факторы неопределенности как случайные (например, когда нельзя предположить возможность многократного проведения эксперимента на исследуемом объекте при неизменном действии неучтенных и неуправляемых факторов). Это приводит к необходимости учета неопределенности нестатистической (или в общем случае неизвестной) природы, когда относительно факторов неопределенности ничего не известно, кроме их свойства быть ограниченными.

В таких условиях наиболее общей и наиболее естественной моделью описания факторов является их представление в интервальной форме, когда задают диапазон возможных значений переменных или зависимостей.

В частности, при анализе данных с ошибками для метрологов естественной является нестатистическая модель измерения с заданной абсолютной ( $\varepsilon$ ) или относительной ( $\delta$ ) ошибками. При этом предполагается, что выполняется одно из следующих условий:

$$|y - y_0| \leq \varepsilon, \quad (1)$$

$$|y - y_0|/|y| \leq \delta, \quad (2)$$

где  $y_0$ ,  $y$  — истинное и измеренное значения величины;  $\varepsilon$ ,  $\delta$  — заданные абсолютная и относительная ошибки.

В обоих случаях истинное значение  $y_0$  лежит внутри известного интервала

$$y^- \leq y_0 \leq y^+, \quad (3)$$

границы которого  $y^-$ ,  $y^+$  определяются как  $y \pm \varepsilon$  и  $y \pm \delta|y|$  при условиях (1) и (2), соответственно.

Методы интервальной арифметики и анализа, в которых действия выполняются не с числами, а с интервалами, в последнее время начинают получать все большее признание практиков.

Рассмотрим построение моделей объектов по данным эксперимента, представленным в интервальной форме. Сформируем в виде исходных гипотез предположения (аксиомы), на которых базируется метод интервального анализа данных.

$H_1$ : Зависимость между выходной переменной  $y_0$  и независимыми переменными  $x_1, \dots, x_n$  является линейно-параметрической функцией вида

$$y_0(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + \beta_m \varphi_m(x) = \Phi^T(x) \beta, \quad (4)$$

где  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  — известные базисные функции от вектора независимых переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

$H_2$ : Данные эксперимента описываются совокупностью  $N$  опытов

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T, [y_i^-, y_i^+], \quad (i=1, \dots, N),$$

где  $y_i^-, y_i^+$  задают в  $i$ -м опыте (при фиксированном векторе  $x_i$ ) границы возможных значений истинной величины  $y_0(x_i)$ , т. е.

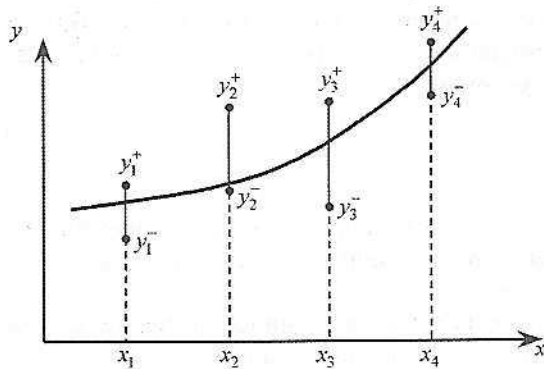
$$y_i^- \leq y_0(x_i) \leq y_i^+ \quad \forall i=1, \dots, N. \quad (5)$$

Интервал  $[y_i^-, y_i^+]$  может произвольным образом зависеть от вектора  $x_i$ . Когда в опытах заданы точечные измерения и известна абсолютная ошибка эксперимента, границы интервала определяются по формулам:

$$y_i^- = y_i - \varepsilon(x_i), y_i^+ = y_i + \varepsilon(x_i).$$

$H_3$ : Адекватной моделью объекта является любая функция  $\hat{y}(x) = \varphi^T(x)b$ , проходящая через все интервальные измерения (рис. 1), т. е. удовлетворяющая условию

$$y_i^- \leq \varphi^T(x)b \leq y_i^+ \quad (i=1, \dots, N). \quad (6)$$



$y_i^-, y_i^+$  — верхняя и нижняя границы интервала измерения

Рис. 1. Адекватная модель объекта при интервальных измерениях

Рассмотрим основные этапы анализа интервальных данных, целью которого является построение адекватной модели объекта.

Рассмотрим выражение (6), которое при подстановке в него данных эксперимента является системой  $N$  линейных неравенств относительно  $m$  неизвестных  $b_1, \dots, b_m$ .

Допустим, что эта система совместна и имеет множество решений

$$\Omega_b = \{b \in R^m \mid y_i^- \leq \varphi^T(x_i)b \leq y_i^+, i=1, \dots, N\}. \quad (7)$$

Очевидно, что выбрав любой вектор  $b \in \Omega_b$ , можно получить уравнение  $\hat{y}(x) = \varphi^T(x)b$ , которое в соответствии с гипотезой  $H_3$  является адекватной моделью объекта. Следовательно,  $\Omega_b$  определяет множество оценок  $b$  параметров адекватных моделей вида (5).

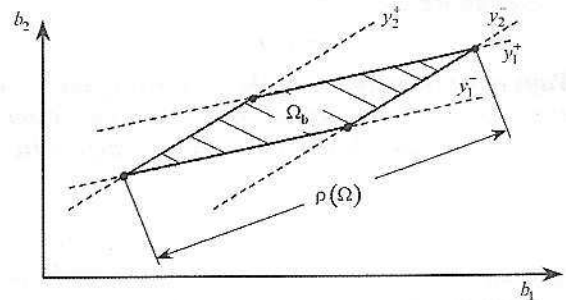
Анализируя выражения (4), (5) и (6), можно прийти к выводу, что  $\Omega_b$  одновременно является множеством возможных значений истинных параметров  $\beta$ , т. е.

$$\Omega_b = \{\beta \in R^m \mid y_i^- \leq \varphi^T(x_i)\beta \leq y_i^+, i=1, \dots, N\}. \quad (8)$$

Это позволяет в дальнейшем не делать различия между  $\Omega_b$  и  $\Omega_\beta$  и обозначать их одной буквой  $\Omega$ . Вместе с тем необходимо различать фиксированную точечную оценку  $b \in \Omega$  и неизвестный вектор параметров  $\beta \in \Omega$ .

Рассмотрим некоторые свойства множества  $\Omega$ .

Как можно заметить из формулы (7), множество является выпуклым многогранником в пространстве параметров (рис. 2).



$\rho(\Omega)$  — диаметр множества

Рис. 2. Множество  $\Omega_b$  возможных значений параметров

С ростом числа опытов  $N$  множество  $\Omega$  стягивается в точку  $\beta$ , совпадающую с истинным вектором коэффициентов, т. е.

$$(N \rightarrow \infty) \rightarrow (\rho(\Omega) \rightarrow 0) \rightarrow (\Omega \rightarrow \beta). \quad (9)$$

Это свойство — аналог состоятельности в математической статистике — обусловлено тем, что с увеличением числа опытов число условий в системе (7) возрастает и, следовательно, уменьшается размер области, где они одновременно выполняются. Свойство (9), так же, как и в математической

статистике, справедливо при достаточно "хорошо организованном" эксперименте, когда он не пополняется лишь за счет линейно зависимых строк матрицы  $F$ .

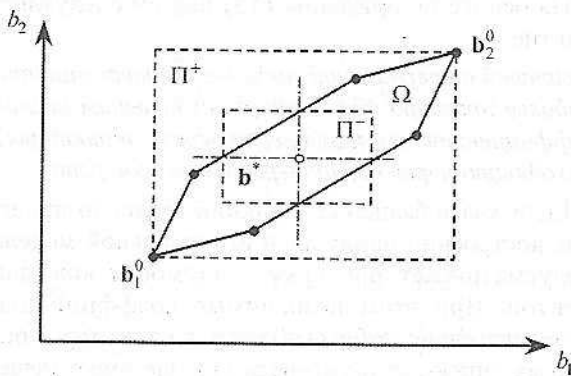
При построении интервальных моделей часто удобнее вместо области  $\Omega$  использовать ее приближенное более простое описание прямоугольной гиперпризмы:

$$\Pi^+ = \{b \in R^m \mid b_i^- \leq b_i \leq b_i^+, i = 1, \dots, m\}. \quad (10)$$

Граничные точки  $b_i^-$  и  $b_i^+$  могут быть вычислены как решения  $2m$  задач линейного программирования:

$$b_i^- = \min b_i, \quad b_i^+ = \max b_i, \quad b \in \Omega.$$

Для двумерного случая призма  $\Pi^+$  изображена на рис. 3. Нетрудно видеть, что  $\Pi^+ \supset \Omega$ , т. е. призма  $\Pi^+$  содержит лишние точки  $b$ , не удовлетворяющие условиям (7). При сильно вытянутой форме области  $\Omega$  отличие  $\Pi^+$  от  $\Omega$  может быть довольно существенным.



$b_1^0, b_2^0$  – экстремальные точки;

$\Pi^-, \Pi^+$  – аппроксимации множества  $\Omega$  в виде призм

Рис. 3. Множество  $\Omega$  возможных значений параметров

Когда задана некоторая внутренняя точка  $b^* \in \Omega$ , то можно построить также призму  $\Pi^-$  (см. рис. 3), вычисляя  $b_i^-$  и  $b_i^+$  из условия

$$b_i^- = \min(b_i^* - \alpha), \quad b_i^+ = \max(b_i^* + \alpha), \quad \alpha \in \Omega.$$

Очевидно, что если само множество  $\Omega$  является прямоугольной призмой, то

$$\Pi^+ = \Pi^- = \Omega.$$

Во всех остальных случаях отличие  $\Pi^-$  от  $\Pi^+$  будет тем больше, чем сильнее вытянута область  $\Omega$ .

Так как множество  $\Omega$ , описываемое формулой (8), определяет область возможных значений па-

раметров  $\beta_i$ , проверка различных гипотез относительно вектора  $\beta$  или отдельных его компонент  $\beta_i$  при интервальном анализе оказывается достаточно простой. Например, гипотеза о равенстве вектора  $\beta$  некоторому заданному вектору проверяется следующим образом:

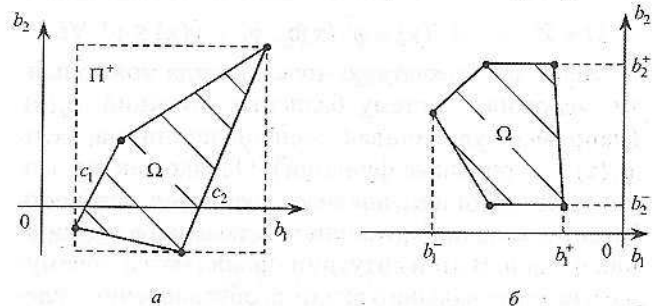
$$H_0: \beta = c \begin{cases} \text{принимается, если } c \in \Omega, \\ \text{отвергается, если } c \notin \Omega \end{cases} \quad (11)$$

Особую роль в интервальном анализе играет проверка значимости коэффициентов, позволяющая установить знак соответствующего коэффициента.

Если в формуле (11) в качестве вектора  $c$  задан нулевой вектор  $c = 0$  и гипотеза  $H_0$  принимается ( $0 \in \Omega$ ), это означает, что все коэффициенты модели незначимы, т. е. между выходной переменной  $y$  и входными переменными  $x_1, \dots, x_n$  нет никакой связи. В качестве модели может быть взята функция  $y(x) = 0$ , проходящая в данном случае через все интервальные измерения. Такая крайняя ситуация ( $0 \in \Omega$ ), когда все коэффициенты модели оказались незначимыми, может возникнуть лишь при очень неточных измерениях.

Более часто возникают ситуации, когда незначимыми оказываются отдельные коэффициенты (рис. 4, а), т. е. принимается гипотеза

$$H_0: \beta_1 = c_1, \beta_2 = c_2, \dots, \beta_i = 0, \dots, \beta_m = c_m.$$



а – незначим коэффициент  $\beta_2$ ;

б – оба коэффициента  $\beta_1$  и  $\beta_2$  значимы

Рис. 4. Множество  $\Omega$

Как видно из рис. 4, а, гипотеза

$$H_0: \beta_1 = c, \beta_2 = 0$$

принимается, если выбрать константу  $c$  в пределах  $c_1 \leq c \leq c_2$ .

При проверке значимости коэффициентов могут возникать ситуации, когда нельзя объявить незначимыми оба коэффициента ( $0 \notin \Omega$ ), но может быть принята гипотеза о равенстве нулю одного из них.

Если вместо области  $\Omega$  использовать описанную призму  $\Pi^+$ , задаваемую формулой (10), проверка значимости коэффициентов упрощается, так как справедливо следующее утверждение: *все коэффициенты модели значимы, если область  $\Omega$  и, следовательно, призма  $\Pi^+$  принадлежат одному октанту пространства  $R^n$ .*

Это имеет место, если знаки границ  $b_i^-$  и  $b_i^+$  для всех параметров в формуле (10) одинаковые, т. е.

$$\text{sign } b_i^- = \text{sign } b_i^+ \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Такая ситуация изображена на рис. 4, б, где

$$b_1^- < 0, b_1^+ < 0, b_2^- > 0, b_2^+ > 0,$$

т. е. при любых условиях коэффициент  $\beta_1$  отрицателен, а  $\beta_2$  — положителен.

Если для некоторого коэффициента  $b_i$  условие (12) нарушается, т. е. границы  $b_i^-$  и  $b_i^+$  имеют разные знаки, то знак соответствующего коэффициента может быть как положительным, так и отрицательным и, следовательно, гипотеза  $H_0: \beta_i = 0$  принимается.

Опираясь на введенное выше определение адекватной модели (гипотеза  $H_3$ ), легко получить, что адекватной является любая модель  $\hat{y}(x) = \varphi^T(x)b$  с оценками  $b \in \Omega$  при  $\Omega \neq \emptyset$ .

Если же множество  $\Omega$  возможных значений параметров является пустым, т. е. не существует ни одного решения системы линейных неравенств (7), то в выбранном классе функций нельзя найти адекватной (в смысле определения (6)) модели, т. е.

$$\Omega = \emptyset \rightarrow \neg \exists \hat{y}(x) = \varphi^T(x)b : y_i^- \leq \hat{y}(x) \leq y_i^+ \quad \forall i.$$

Ясно, что адекватную модель всегда можно найти, усложняя систему базисных функций  $\varphi_i(x)$  (например, увеличивая степень полинома, если  $\varphi_i(x)$  — степенные функции). Однако так же, как и в регрессионном анализе, возникает опасность "переусложнения" функции и включения в нее лишних членов. В этой ситуации проявляются преимущества интервального анализа, обусловленные следующим не совсем тривиальным свойством интервальных моделей.

Действительно, пусть по результатам одного и того же эксперимента с интервальной ошибкой ищутся две модели:

$$\hat{y}_1(x) = \varphi^T(x)b_m + \psi^T(x)b_k, \quad (13)$$

$$\hat{y}_2(x) = \varphi^T(x)b_m, \quad (14)$$

где  $b_m, b_k$  — векторы размерности  $m$  и  $k$  соответственно.

Легко заметить, что модель (14) является частью модели (13), и, следовательно, более простая.

Предположим, что множества  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  возможных значений параметров моделей (13) и (14)

непустые, т. е.  $\Omega_1 \neq \emptyset, \Omega_2 \neq \emptyset$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

*Утверждение.* Ошибка прогноза  $\Delta y_2$  для простой модели (14) при любом  $x$  не больше, чем у сложной модели, т. е.

$$\Delta y_2(x) \leq \Delta y_1(x) \quad \forall x. \quad (15)$$

Справедливость неравенства (15) можно проверить, если записать разность ошибок моделей в виде

$$\begin{aligned} \Delta y_1(x) - \Delta y_2(x) &= \\ &= \{ \max(\varphi^T(x)b_m + \psi^T(x)b_k) - \\ &\quad - \min(\varphi^T(x)b_m + \psi^T(x)b_k) \} - \\ &\quad - \{ \max \varphi^T(x)b_m - \min \varphi^T(x)b_m \} = \\ &= \max \psi^T(x)b_k - \min \psi^T(x)b_k. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта разность неотрицательна при любом  $x$ , что и доказывает справедливость неравенства (15).

Таким образом, в интервальном анализе более простая модель (если она существует) оказывается одновременно и более точной, т. е. у нее меньше максимальная и средняя ширина коридора ошибок.

На основе утверждения (15) введем следующее понятие:

*наилучшей интервальной моделью следует считать наиболее простую функцию (с наименьшим числом коэффициентов или наиболее простой структуры), проходящую через все интервальные измерения.*

Если класс базисных функций задан, то процедура построения наилучшей интервальной модели предусматривает проверку значимости коэффициентов. При этом незначимые коэффициенты последовательно отбрасываются до тех пор, пока система линейных неравенств (7) еще имеет решение. Полученная модель будет наилучшей в рассмотренном выше смысле, т. е. она является простейшей по структуре и наиболее точной.

**Пример построения модели.** Рассмотрим процедуру анализа интервальных данных на методическом примере исследования "черного ящика".

Основной эксплуатационной характеристикой агрегата является зависимость величины  $y$ , измеряемой на выходе агрегата, от величины  $x$  на входе агрегата.

В результате испытаний были получены данные трех измерений, причем величина  $y$  измерялась с 5%-ной относительной ошибкой. Полученные данные сведены в табл. 1.

Пусть известно, что у агрегатов исследуемого типа зависимость  $y_0 = f(x)$  является достаточно гладкой неубывающей функцией.

В связи с этим было решено искать модель агрегата в классе линейных функций  $y_0 = \beta_1 + \beta_2 x$  с неотрицательной первой производной. Эти условия

Таблица 1

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta x_i$	$y_i^-$	$y_i^+$
1	12	128	6	122	134
2	16	180	9	171	189
3	20	230	11	219	241

Примечание:  $i$  – номер опыта;  $y_i$  – выход "черного ящика", измеренный в  $i$ -м опыте;  
 $\Delta x_i = 0.05 y_i$ ;  $y_i^- = y_i - \Delta x_i$ ;  $y_i^+ = y_i + \Delta x_i$ .

приводят к следующей системе неравенств для неизвестных параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$ :

$$122 \leq \beta_1 + 12\beta_2 \leq 134,$$

$$171 \leq \beta_1 + 16\beta_2 \leq 189,$$

$$219 \leq \beta_1 + 20\beta_2 \leq 241,$$

$$0 \leq \beta_2.$$

Множество  $\Omega$  возможных значений параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$  представлено на рис. 5. Угловые точки многогранника  $\Omega$  имеют следующие координаты:

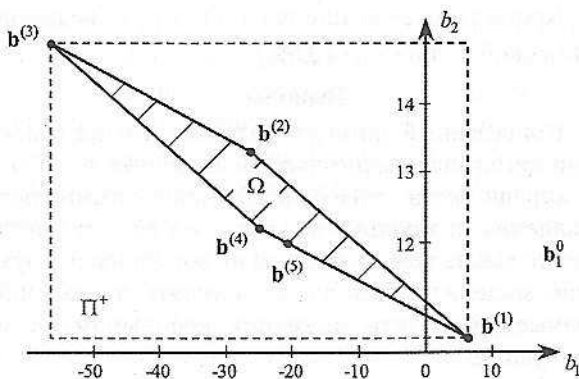
$$\mathbf{b}^{(1)} = (6.5; 10.625)^T,$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = (-26.5; 13.376)^T,$$

$$\mathbf{b}^{(3)} = (-56.5; 14.875)^T,$$

$$\mathbf{b}^{(4)} = (-25; 12.25)^T,$$

$$\mathbf{b}^{(5)} = (-21; 12)^T.$$



$\mathbf{b}^{(i)}$  – угловые точки множества  $\Omega$

Рис. 5. Множество  $\Omega$  возможных значений параметров парогенератора

Экстремальными угловыми точками, определяющими размер множества  $\Omega$  являются точки  $\mathbf{b}^{(1)}$  и  $\mathbf{b}^{(3)}$ . При этом  $\rho(\Omega) = 49.8$ .

В качестве точечных оценок можно взять любую из приведенных ниже оценок:

$$\bar{\mathbf{b}}_1 = 0.5(\mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{b}^{(3)}) = (-25; 12.75)^T,$$

$$\bar{\mathbf{b}}_2 = 0.2 \sum_{i=1}^5 \mathbf{b}^{(i)} = (-24.5; 12.625)^T,$$

$$\mathbf{b}_M = (-24.66; 12.75)^T.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае все три оценки практически совпадают.

Описанный вокруг множества  $\Omega$  прямоугольник (см. рис. 5) задается координатами

$$\Pi^+ = \{\mathbf{b} \in R^2 : -56.5 \leq b_1 \leq 6.5, 10.625 \leq b_2 \leq 14.875\}.$$

Анализируя рис. 5 и структуру множества  $\Omega$ , можно прийти к выводу, что в угловых точках  $\mathbf{b}^{(1)}$  и  $\mathbf{b}^{(3)}$  параметр  $b_1$  имеет разные знаки и, следовательно, правомерно принятие гипотезы  $H_0: \beta_1 = 0$ .

Используя более простую структуру модели  $y_0 = \beta_2 x$  (без коэффициента  $\beta_1$ ) и данные эксперимента, получаем следующую систему неравенств:

$$122 \leq 12\beta_2 \leq 134,$$

$$171 \leq 16\beta_2 \leq 189,$$

$$219 \leq 20\beta_2 \leq 241,$$

$$0 \leq \beta_2,$$

решением которой является интервал возможных значений параметра

$$[\beta_2] = [10.95; 11.15].$$

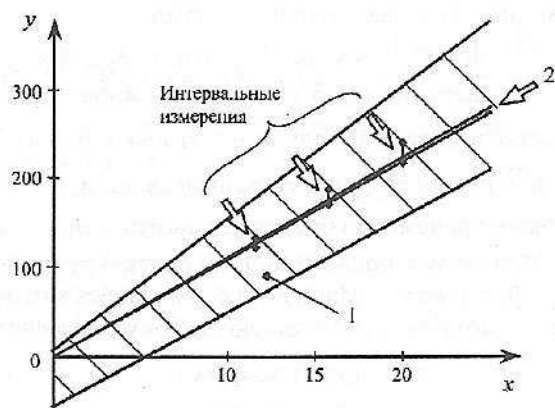
Очевидно, что знак параметра  $\beta_2$  надежно идентифицирован и соответствует требуемому условию  $\beta_2 \geq 0$ , а максимальная ошибка оценивания относительно невелика:  $\Delta b_2 = 0.2$ . В качестве точечной оценки коэффициента  $\beta_2$  целесообразно взять оценку  $b_2 = 11.05$ , соответствующую середине интервала. Относительная ошибка оценивания параметра  $\beta_2$  с использованием этой точечной оценки составляет 1%, что в пять раз меньше относительной ошибки измерения выходной величины.

Заметим, что МНК-оценка параметра  $\beta_2$ , вычисленная по средним  $\bar{y}_i$  и равная 11.27, не попадает в интервал  $[10.95; 11.15]$  возможных значений  $\beta_2$  и является в смысле сделанных допущений недопустимой.

Таблица 2

$i$	$x_i$	$y_i$	$\Delta x_i$	$y_i^-$	$y_i^+$
Агрегат № 2					
1	12	130	7	123	137
2	17	178	9	169	187
3	20	210	11	199	221
Агрегат № 3					
1	13	140	7	133	147
2	17	184	9	173	193
3	20	220	11	209	231

В результате расчетов были получены следующие значения прогноза выходной переменной в точках эксперимента:  $[y(12)] = [131.4; 134]$ ,  $[y(16)] = [175.2; 178.6]$ ,  $[y(20)] = [219; 223]$ . Коридор ошибок прогноза изображен на рис. 6. Средняя ошибка прогноза составляет 3,3 т. е. около 2% от средней производительности агрегата.



- 1 – модель  $[y(x)] = [-56.5; 6.5] + [10.625; 14.827]x$ ;  
 2 – модель  $[y(x)] = [0.95; 11.15]x$

Рис. 6. Коридор ошибок интервальной модели

Таким образом, по результатам трех интервальных измерений получена достаточно точная и удовлетворяющая физическим ограничениям модель агрегата в виде

$$[y(x)] = [10.95; 11.15]x.$$

Если в распоряжении исследователей имеются результаты испытаний еще двух агрегатов такого же типа, представленные в табл. 2., то полученную модель можно уточнить.

При проведении исследования было решено проверить гипотезу о совпадении эксплуатационных характеристик трех однотипных агрегатов:

$$H_0: f_1(x) = f_2(x) = f_3(x).$$

Очевидно, что гипотезу  $H_0$  можно принять, если существует решение системы

$$\begin{aligned} y_i^- &\leq \beta_2 x \leq y_i^+, \\ 0 &\leq \beta_2, \end{aligned}$$

составленной по результатам девяти измерений на всех трех агрегатах, табл. 2.

Несложные расчеты показывают, что решение системы существует и задается интервалом

$$[\beta_2] = [0.95; 11].$$

Таким образом, можно принять гипотезу о совпадении эксплуатационных характеристик однотипных агрегатов.

Кроме того, значение параметра  $\beta_2$  определено с высокой точностью (0,5%).

#### Выводы

Приведенный пример показывает, что предлагаемый метод анализа интервальных данных достаточно хорошо согласуется с профессиональными представлениями технологов, позволяет естественно и просто учесть всю априорную информацию о структуре модели и ошибке и получать достаточно точные результаты даже при небольшом числе измерений.

#### Литература

1. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 222 с.
2. Алиев Р. А., Церковный А. Э., Мамедова Г. А. Управление производством при нечеткой исходной информации. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 240 с.