УДК 517.958:517.988.8

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З БІГАРМОНІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Савченко А. В.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М. В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ, м. Харків, Україна
тел. +38(057) 702-14-36, email: anton.savchenko@nure.ua

The Dirichlet boundary value problem for a nonlinear equation with a biharmonic operator is considered. The considered problem arises when modeling the processes of the theory of elasticity and reflects the deflection of the plate, the ends of which are fixed. For its solution, two-sided approximations methods based on the use of Green's functions is proposed.

Розглянемо основну крайову задачу (задачу Діріхле) для нелінійного еліптичного рівняння з бігармонічним оператором [1]:

$$\Delta^2 u = f(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\Delta^2 u = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω – круг одиничного радіуса с центром у початку координат, $f(\mathbf{x}, u)$ – нелінійна, додатна та неперервна при $\mathbf{x} \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функція, $\mathbf{n}$ – зовнішня до межі $\partial\Omega$ нормаль.

Задача (1), (2) виникає, наприклад, у теорії пружності при моделюванні прогину пластини круглої форми, закріпленої на межі. Отже, актуальною є розробка чисельних методі аналізу цієї задачі. До розв'язання задачі (1), (2) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна, який полягає у заміні крайової задачі еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна та знаходженні його чисельного розв'язку методами нелінійного аналізу у напівупорядкованих банахових просторах.

Якщо $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, то функція Гріна крайової задачі (1), (2) має вигляд [2]:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2 \int\limits_1^{\frac{\left| |\mathbf{x}|\mathbf{s} - \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right|}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}} \frac{v^2 - 1}{v} dv, \tag{3}$$

де $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Відомо [2], що $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \ge 0$, якщо $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \overline{\Omega}$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{s}$.

Тоді крайова задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}. \qquad (4)$$

Рівняння (4) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ функцій, неперервних у $\overline{\Omega}$. У просторі $C(\overline{\Omega})$ виділимо конус $\mathcal{K}_+ = \{u \in C(\overline{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \ge 0,\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega}\}$ невід'ємних функцій [3].

Нехай функція $f(\mathbf{x}, u)$ дозволяє діагональне подання $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$, тобто $f(\mathbf{x}, u) = \hat{f}(\mathbf{x}, u, u)$. Тоді нелінійний оператор T, що діє у $\mathcal{K}_+$ за правилом, яке визначається правою частиною рівняння (4), буде гетеротонним. Для цього оператора виділимо у конусі $\mathcal{K}_+$ сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ умовами: для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$:

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v_0(\mathbf{s}), w_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \ge v_0(\mathbf{x}), \quad \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w_0(\mathbf{s}), v_0(\mathbf{s})) d\mathbf{s} \le w_0(\mathbf{x}).$$

Сформулюємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, v^{(k)}(\mathbf{s}), w^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) \hat{f}(\mathbf{s}, w^{(k)}(\mathbf{s}), v^{(k)}(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}). \qquad (7)$$

Нехай існує таке число $L > 0$, що функція $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w)$ для всіх v, w таких, що $0 < v,\ w < M_0$, де $M_0 = \max\limits_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} w_0(\mathbf{x})$, і для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$ задовольняє нерівність $\left| \hat{f}(\mathbf{x}, w, v) - \hat{f}(\mathbf{x}, v, w) \right| < L |w - v|$. Якщо $\gamma = LM < 1$, де $M = \max\limits_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}$, то ітераційний процес (5) – (7) збігається у нормі простору $C(\overline{\Omega})$ до єдиного на $< v_0, w_0 >$ неперервного додатного розв'язку $u^*(\mathbf{x})$ крайової задачі (1), (2), причому має місце наступний ланцюг нерівностей:

$$v_0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(k)} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le w^{(k)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w_0. \qquad (8)$$

Ланцюг нерівностей (8) характеризує ітераційний процес (5) – (7) як метод двобічних наближень.

Список використаних джерел:

1. Grunau, H.-C. (2009). Nonlinear questions in clamped plate models. *Milan Journal of Mathematics*, 77, 171-204. https://doi.org/10.1007/s00032-009-0096-5

2. Boggio, T. (1905). Sulle funzioni di Green d'ordine m. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 20, 97-135. https://doi.org/10.1007/BF03014033

3. Опойцев, В. И., & Хуродзе, Т. А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Изд-во Тбилис. ун-та.