

ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫЙ ВЫБОР ДЕРЕВА В СИЛЬНО СВЯЗНОМ ГРАФЕ И НАХОЖДЕНИЕ БАЗЫ НЕЗАВИСИМЫХ КОНТУРОВ

Ю. С. Деордица

Луганск

Рассмотрим граф $G(X, U)$, где X — множество вершин и U — множество дуг графа. Будем считать, что a и b являются граничными вершинами дуги $U = (a, b)$, причем a — начало, а b — конец дуги. Две дуги u и v смежны, если они различны и имеют общую граничную точку.

Две вершины x и y смежны, если они различны и существует дуга, идущая от одной из них к другой. Дуга u будет инцидентной вершине x , если эта дуга исходит из вершины x или заходит в нее. Последнее понятие легко обобщается: если A — данное множество вершин, то дуга u исходит из A , если

$$u = (a, x); a \in A \text{ и } x \notin A, \quad (1)$$

то множество дуг, исходящих из A обозначается символом u_A^+ . Аналогично определяется множество u_A^- дуг, заходящих в множество вершин A .

Множество дуг, инцидентных A , обозначается символом U_A . Каждой дуге U рассматриваемого графа соответствует число $l(u) \geq 0$, называемое длиной этой дуги.

Задача состоит в нахождении такого частичного графа $H = (X, V)$ графа G , чтобы суммарная длина $\sum_{u \in V} l(u)$ была наименьшей. Множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ получим следующим образом: в качестве v_1 берем кратчайшую дугу и находим дуги, инцидентные множеству A_1 , элементами которого являются граничные вершины дуги v_1 , в качестве v_2 самую короткую дугу, инцидентную множеству A_1 . Находим множество A_2 , объединяя множества A_1 и V_2 :

$$A_2 = A_1 \cup \{V_2\}.$$

Определяем дуги, инцидентные множеству A_2 , и среди них самую короткую v_3 .

Находим множество

$$A_3 = A_2 \cup \{v_3\} \text{ и т. д.}$$

Если граф G содержит x вершин, то множество $A_{x-1} = x_1$, так как всегда A_i состоит из двух элементов, а каждое последующее множество отличается от предыдущего одним элементом (вершиной) согласно (1), т. е. справедливо следующее соотношение:

$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_{x-1} \in A \Rightarrow H.$$

Любому множеству A_i соответствует выделенная дуга v_i . При этом число выделенных дуг v_i будет $x-1$.

Таким образом, всякая пара вершин соединена цепью и только одной, что является характеристическим свойством дерева [1]. Следовательно, частичный граф $H(X, V)$ есть дерево, для которого $\sum l(u)$ имеет наименьшее значение. Рассмотрим при нахождении дерева с наименьшей суммарной длиной следующий алгоритм.

1. Пронумеруем множество U дуг v_i графа таким образом, чтобы соблюдалось неравенство

$$l(u_1) \leq l(u_2) \leq \dots \leq l(u_m),$$

где m — число дуг графа.

2. Выделяем (кратчайшую) дугу, присваивая ей индекс v_1 .

3. Отмечаем признаком i дуги, инцидентные множеству вершин (на первом этапе это множество определяется граничными вершинами дуги v_1).

4. Из дуг, отмеченных признаком, выбираем самую короткую и присваиваем ей признак v_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Дуги графа	Этапы				
	I	II	III	IV	V
	$A_1 \{2, 4\}$	$A_2 \{2, 4, 6\}$	$A_3 \{2, 4, 6, 3\}$	$A_4 \{2, 4, 6, 3, 5\}$	$A_5 \{2, 4, 6, 3, 5, 1\}$
2—4	v_1				
4—6	i	v_2			
6—3		i	v_3		
2—3	i	i	i		
5—4	i	i	i	v_4	
5—6		i	i	i	
1—2	i	i	i	i	v_5
1—5				i	i
3—1			i	i	i

5. Находим каждое последующее множество A_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) и переходим к п. 3. Процедура продолжается до этапа $n-1$ в п. 2.

В процессе выбора дерева некоторые дуги получают признак i дважды. Это значит, что обе граничные вершины данной дуги v_i принадлежат множеству A_i , и таким образом, дуга v_i уже не может быть выбрана в качестве дуги дерева.

Таблица наглядно иллюстрирует изложенный алгоритм для графа G , изображенного на рисунке.

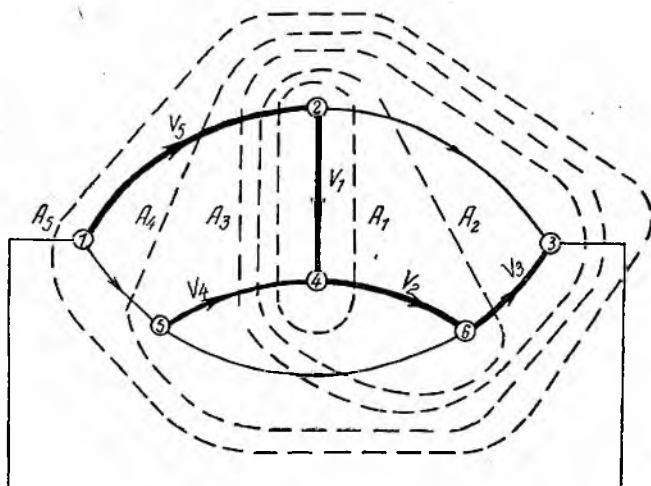
Пусть $H(X, U_{n-1})$ — частичный граф, являющийся деревом сильно связанного графа $G(X, U)$ и $u_1, u_2, \dots, u_{m-n+1}$ — дуги множества u , не принадлежащие v_{n-1} . Очевидно, добавление к дереву любой из этих дуг, скажем u_k , приводит к появлению элементарного контура μ_k , притом единственного. Контур $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-n+1}$ независимы, потому что каждый из них содержит дугу, не принадлежащую остальным; к тому же количество этих контуров равно $m-n+1 = \nu(G)$, где $\nu(G)$ — цикло-

матическое число графа G , а, значит, они образуют базу независимых контуров.

Рассмотрим множество

$$G' = H(X, V_{n-1}) \cup \{U_k\},$$

где u_k — дуга, не принадлежащая множеству V_{n-1} . Это множество представляется единственным циклом, т. е. граф, состоящий из одного многоугольника с одним или более ответвляющимися от его вершин деревьями.



Наша задача состоит в том, чтобы выделить контур в графе. Пусть U_a — множество дуг, инцидентных вершине a . Вершина a графа называется висячей, если существует только одна дуга, инцидентная a , т. е. $|U_a| = 1$.

Из G' исключим все дуги, содержащие висячие вершины, т. е. дуги, удовлетворяющие условию $|U_x| = 1$. При этом получим новый граф G^2 . Вновь исследуем граф G^2 на наличие в нем дуг, удовлетворяющих условию $|U_a| = 1$, и исключим их. Эту операцию будем повторять до тех пор, пока граф G^i не будет содержать дуг, граничными вершинами которых являются висячие. При этом все оставшиеся дуги будут, очевидно, удовлетворять условию $|U_a| = 2$, а следовательно, они образуют замкнутый контур μ_k . Аналогично определяются контуры μ_i ($i = 1, 2, \dots, m - n + 1$).

Направлением обхода контура всегда будем считать направление, определяемое ориентацией дуги U_k , не принадлежащей множеству V_{n-1} . Остальным дугам контура будем присваивать знак $+$, если ориентация дуги совпадает с направлением контура и знак $-$ в противном случае. Поскольку информация о каждой дуге представлена в виде граничных вершин этой дуги, знак легко определяется по следующему правилу.

Знак каждой последующей дуги сохраняется таким же, как и у предыдущей, если общая граничная вершина является концом (началом) для одной дуги и началом (концом) другой. Знак меняется на противоположный, если общая граничная вершина является началом или концом одновременно для обеих дуг.

Достоинством изложенного метода является минимально возможная по объему величина исходной информации и простота реализации решения задачи на ЦВМ. Программа, разработанная для ЦВМ «Минск-1», с оперативной памятью 1024 чисел позволяет решать задачи с максимальным числом дуг 756.

В настоящее время этот метод широко применяется в работе взводов депрессионных съемок Луганской области для решения различных практических задач: расчета воздухораспределения при объединении шахт в единую вентиляционную систему (шахта Кременная № 1 и Кременная-Западная треста «Лисичанскуголь»), выбора оптимального маршрута депрессионной съемки (шахта им. Ленина, шахта Черкасская-Северная № 1 треста «Ленинуголь»), определения месторасположения замерных станций воздуха (шахта Таловская № 2 треста «Краснодонуголь»).
