

И. Д. Вечирская

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Введение

На сегодняшний день процесс обработки данных в интеллектуальных системах основан на конкретных знаниях о предметной области. Однако сами системы представления знаний, которые моделируют деятельность человека, недостаточно формализованы [1]. Способов представления знаний разработано достаточно много, и каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками, наделен определенной структурой, следовательно, каждая система представления знаний эффективна на предметных областях определенной структуры. Естественно, что чем более обобщенный характер носит язык представления знаний, тем на большем разнообразии предметных областей он может быть реализован. Таким универсальным языком представления знаний можно считать язык алгебры конечных предикатов (АКП), поскольку он позволяет формализовать самые различные отношения.

На языке АКП неоднократно предпринимались успешные попытки формализации различных естественно-языковых структур. В последних работах в этом направлении была предложена логическая сеть для реализации окончаний прилагательных, существительных и глаголов, а линейные логические преобразования в свою очередь являются основным средством для ее построения. Отметим следующие преимущества логических сетей:

1) логическая сеть напрямую связана с алгеброй предикатов (т. е. это схемная реализация формул алгебры предикатов);

2) в логических сетях входная и выходная информация представлена в виде принадлежности к множеству, т. е. речь идет о представлении не данных, а знаний (буквенные переменные задают с помощью дужков проволочек);

3) промежуточные переменные логической сети гарантируют отсутствие пробук.

Таким образом, развитие теории линейных логических преобразований является необходимой и перспективной задачей для понимания естественного языка [2, 3]. Кроме этого, с помощью линейных логических преобразований можно провести естественную аналогию между АКП и теорией баз данных, которая взаимно обогащает и ту, и другую. Язык алгебры предикатов и предикатных операций эффективен и удобен для описания различной формализуемой информации, формирования запросов в базах данных и моделирования деятельности человека.

2. Постановка и решение обратной задачи для линейных логических преобразований

Постановка задачи. Важной представляется задача нахождения по выходному логическому вектору n ядру преобразования входного логического вектора, так называемая обратная задача для линейных логических преобразований. Представим далее обратную задачу в формальном виде. Пусть в уравнении $Q(y) = K(x, y)P(x)$ известны бинарный $K(x, y)$ и унарный $Q(y)$ предикаты; необходимо найти предикат $P(x)$. Представим предикаты $K(x, y)$, $Q(y)$, $P(x)$ в матричном виде следующим образом:

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1, 1} & a_{m-1, 2} & \dots & a_{m-1, n-1} & a_{m-1, n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m, n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Q(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{m-1} \\ y_m \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Сведем нашу задачу к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1, n-1}x_{n-1} \vee a_{1n}x_n; \\ y_2 = a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2, n-1}x_{n-1} \vee a_{2n}x_n; \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{m, n-1}x_{n-1} \vee a_{mn}x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, чтобы найти решение обратной задачи для линейных логических преобразований, необходимо решить систему (1) относительно переменных x_1, \dots, x_n .

Выбор и обоснование метода решения. Для решения системы (1) воспользуемся методом получения общего решения параметрических уравнений с n переменными. Этот метод дает возможность записать общего решения уравнения, не перебирая их по одному, тем более, что такой перебор на практике часто затруднителен и порой невозможен. Кроме этого, при использовании метода исчезает необходимость привязки к внутренней структуре конкретного предиката. Для удобства применения аппарата АКП к решению логических уравнений в [4] была решена задача нахождения системы аксиом, определяющих АКП с точностью до изоморфизма. Решение этой задачи позволило рассматривать конечные предикаты как элементы абстрактной алгебры. Поскольку АКП представляет собой разновидность булевой алгебры

$$f_{n-1}(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-2}) = 1$$

где

$$f_{n-1} = f_n(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-2}, 1) \vee \\ \vee f_n(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-2}, 0).$$

Решение x_{n-1} выразится некоторой формой:

$$x_{n-1} = F_{n-1}(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-2}, P_{n-1}).$$

Двигаясь таким образом далее, приходим к уравнению

$$f_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1) = 1$$

где

$$f_2 = f_3(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, 1) \vee \\ \vee f_3(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, x_1, 0).$$

Критерий существования решения этого уравнения

$$f_1(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m) = 1$$

где

$$f_1 = f_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 1) \vee \\ \vee f_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 0).$$

Само решение выразится следующей формой:

$$x_1 = F_1(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, P_1).$$

Рассмотрим на примере применение метода получения общего решения параметрического уравнения с переменными, решая обратную задачу для линейных логических преобразований.

Как известно [2], линейные логические преобразования представляемы формулой $Q(y) = \exists x \in AK(x, y)P(x)$. Для решения обратной задачи необходимо по известному выходному логическому вектору $Q(y)$ и ядру преобразования $K(x, y)$ найти входной логический вектор $P(x)$. При решении систем логических уравнений с параметрами возникает необходимость рассмотрения матриц с элементами из булевой алгебры. В [4, 6] исследованы полные логические пространства и показано, как они приводят к матрицам. Условия задачи запишем в матричном виде.

Пусть логический вектор $Q(y)$ задан элементами $y_1 = 0, y_2 = 1$. Матрица ядра логического преобразования задана элементами $a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 1$. Запишем систему уравнений (1) в общем виде:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2. \end{cases}$$

Запишем систему в виде уравнения и приведем ее к каноническому виду (2):

$$f = (y_1(a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2) \vee \overline{y_1(a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2)}) \wedge \\ \wedge (y_2(a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2) \vee \overline{y_2(a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2)}) = 1$$

Найдем далее по формуле (3) все функции f_i

$$f_2 = (y_1(a_{11}x_1 \vee a_{12}) \vee \overline{y_1(a_{11}x_1 \vee a_{12})}) \wedge \\ \wedge (y_2(a_{21}x_1 \vee a_{22}) \vee \overline{y_2(a_{21}x_1 \vee a_{22})}) \vee \\ \vee (y_1a_{11}x_1 \vee \overline{y_1a_{11}x_1})(y_2a_{21}x_1 \vee \overline{y_2a_{21}x_1}).$$

Найдем функцию f_1 и, подставив входные значения, проверим выполнимость критерия существования решения исходного параметрического уравнения:

$$f_1 = (y_1(a_{11} \vee a_{12}) \vee \overline{y_1(a_{11} \vee a_{12})})(y_2(a_{21} \vee a_{22}) \vee \\ \vee \overline{y_2(a_{21} \vee a_{22})}) \vee (y_1a_{11} \vee \overline{y_1a_{11}})(y_2a_{21} \vee \overline{y_2a_{21}}) \vee \\ \vee (y_1a_{12} \vee \overline{y_1a_{12}})(y_2a_{22} \vee \overline{y_2a_{22}}) \vee y_1y_2.$$

Таким образом, было получено $f_1 = 1$. Следовательно, условие существования решения уравнения выполняется. Далее переходим к непосредственному поиску решений уравнения. Находим x_1 , пользуясь Утверждением 4 и формулой для вычисления функции:

$$x_1 = \frac{f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, 1)P_1 \vee \\ \vee f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, 0)}{f_1(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, 1)},$$

$$x_1 = 1.$$

Находим общий вид решения x_2 , пользуясь Утверждением 4 и формулой для вычисления функции f

$$x_2 = \frac{f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, x_1, 1)P_2 \vee \\ \vee f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, x_1, 0)}{f_1(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, x_1, 1)}.$$

В нашем случае общий вид решения x_2 будет зависеть только от параметра P_2 , то есть представим булевой формой $x_2 = K_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, P_2)$, в отличие от булевой формы в общем случае, поскольку для переменной x_1 удалось найти сразу значение решения, а не только булеву форму в виде зависимости от параметра P_1 , как следовало бы ожидать. Далее подставляем в выражение для x_2 условия задачи и найденное значение переменной x_1 . Получим $x_2 = 0$. Таким образом было найдено единственное решение обратной задачи для заданного линейного логического преобразования в виде значений входного вектора (1, 0).

Можно описать также второй метод решения параметрического уравнения. В этом случае критерий существования решения и само решение для $x_1 = K_1(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, P_1)$ получаются соответственно по формулам предыдущего алгоритма. Однако исчезает необходимость в нахождении булевых форм, поскольку решение x_1 сразу подставляется в уравнение, полученное на предыдущем шаге (как в нашем случае). Этот процесс должен продолжаться, пока не будут получены все искомые значения переменных.

Условие единственности решения уравнения. Также представляет интерес исследование вопроса о единственности решения параметрического уравнения.

Утверждение 5. Для того, чтобы уравнение

$$xf(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 1) \vee \\ \vee \overline{xf(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 0)} = 1$$

имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 1) = f(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 0).$$

Таким образом, для того, чтобы параметрическое уравнение с переменными имело единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась конъюнкция условий следующего вида:

$$f_1(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 1) = f_1(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 0).$$

Проверим выполнение Утверждения 5 на примере решения обратной задачи для линейного логического преобразования по условиям предыдущего примера. Необходимо найти в общем виде для параметрического уравнения с двумя переменными функции следующего вида:

$$\begin{aligned} f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, 1) &= \\ &= (y_1(a_{11} \vee a_{12}) \vee y_1(a_{11} \vee a_{12})) \wedge (y_2(a_{21} \vee a_{22}) \vee \\ &\vee y_2(a_{21} \vee a_{22})) \vee (y_1 a_{11} \vee y_1 a_{11})(y_2 a_{21} \vee y_2 a_{21}), \\ f_2(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, y_1, y_2, 0) &= \\ &= (y_1 a_{12} \vee y_1 a_{12})(y_2 a_{22} \vee y_2 a_{22}) \vee y_1 y_2. \end{aligned}$$

Подставив в полученные функции известные значения параметров, получим выполнение критерия единственности решения исходного параметрического уравнения. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 1) &= \\ &= f_2(a_{11}, \dots, a_{mn}, y_1, \dots, y_m, 0) = 1 \end{aligned}$$

Действительно, при решении обратной задачи для заданного линейного логического преобразования было найдено единственное решение в виде значений входного вектора (1, 0).

3. Перспективы применения метода решения параметрического уравнения с n переменными для работы логической сети

Логическая сеть [7] во многом сходна с семантическими сетями. В то же время сам метод построения логической сети основан на эвристиках — конкретных правилах грамматики и закономерностях русского языка. И хотя благодаря параллельной обработке знаний поиск по сети происходит достаточно быстро и точно, само построение сети в каждом отдельном случае трудоемко и зависит от конкретной области определения решаемой задачи. Кроме этого, работа самой сети имеет скорее параллельно-последовательный характер. Поскольку после того, как знания во всех узлах сети обрабатываются параллельно, они выдаются на выходе в каждом отдельном узле последовательным образом. Так, если найдено неоднозначное решение (более одного решения), далее обработка идет последовательно, что естественным образом уменьшает быстродействие сети. В настоящее время логическая сеть работает следующим образом: находим возможные значения в узлах, а потом вручную (или последовательно) подаем и получаем значение промежуточной переменной для внутренних узлов сети (так, например, узел «окончание» у прилагательных). Однако представляется целесообразным с помощью введения дополнительных узлов справиться с этой проблемой (на этих же принципах строилась изначально сама логическая сеть). Такими узлами могут служить параметры P_i , которые появляются при нахождении неизвестных

значений переменных методом решения параметрического уравнения с n переменными. При этом значениями параметра P_i будут служить все значения из области определения. Для пояснения остановимся на примере, рассмотренном ранее. Пусть $x \in \{a, b\}$, $y \in \{a, b\}$. При этом $K(x, y) = x^a y^b \vee x^b y^a$ $K(x, y) = x^a y^b \vee x^b y^a \vee x^b y^b$. Ядро линейного логического преобразования также можно представить в виде следующей таблицы:

	y	a	b
x			
a		0	1
b		1	1

Таким образом, при решении обратной задачи для линейного логического преобразования значениями для параметра P_i будут значения из области определения переменной x — a и b . Решение задачи нахождения входного вектора по выходному и ядру преобразования позволяет понять, каким образом могут появляться дополнительные узлы при работе логической сети в обратную сторону [8].

4. Выводы

Таким образом, в процессе исследований были получены следующие результаты:

- обратная задача для линейных логических преобразований представлена в формальном виде;
- записаны условия существования и единственности решения для поставленной задачи;
- с помощью метода решения параметрического уравнения с n переменными найден входной вектор линейного логического преобразования в общем виде;
- обозначены перспективы и намечены пути применения метода решения параметрического уравнения с n переменными для работы логической сети.

Список литературы: 1. Алешина Н. А., Алисов А. М. и др. Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ. — М.: Наука, 1990. — 240 с. 2. Ротин И. М. Линейные и билинейные логические операторы и их применение в автоматизированных информационных системах: Дис. ... канд. техн. наук. — Х.: ХНУРЭ, 1994 — 103 с. 3. Вечерская И. Д., Дударь З. В. Решение задачи идентификации произвольного линейного логического преобразования // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2006. — № 5. — С. 63–66. 4. Ситников Д. Э. Методы решения уравнений алгебры конечных предикатов с параметрами и их применение в информационных системах: Дис. ... канд. техн. наук. — Х.: ХНУРЭ, 1991. — 177 с. 5. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Теория интеллекта. Математические средства. — Х.: Вища школа, 1984. — 144 с. 6. Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Неполные и полные логические пространства // Проблемы биопсихики. — 1991. — Вып. 46. — С. 10–17. 7. Бондаренко М. Ф., Дударь З. В., Ефимова И. А. и др. О мозгоподобных ЭВМ // Радиотехника и информатика. — 2004. — № 4. — С. 83–99. 8. Бондаренко М. Ф., Чижкина В. А., Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Модели языка // Биопсихика интеллекта. — 2004. — № 1(61). — С. 27–37.

Поступила в редакцию 16. 10. 2006