

НОРМАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ДЕСКРИПТОРНЫЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ - II

1. Введение

Данная статья является продолжением части I, представленной в выпуске «Радиотехника» № 157. Рассматривается общий метод исследования нелинейных цепей с любым числом емкостей, индуктивностей, в том числе взаимных многополюсных, нелинейных сопротивлений и нелинейных проводимостей. В части I показано, что переходные процессы для токов и напряжений в цепи описываются полулинейными дифференциально-алгебраическими уравнениями. В векторной форме этих уравнений

$$A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t) + \psi(x) \quad (1)$$

квадратные матрицы A, B порождают регулярный характеристический пучок $\lambda A + B$, а матрица A в общем случае является необратимой ($\det A = 0$). Системы такого типа называются *дескрипторными* [1] и в линейном случае обладают резонансными свойствами вблизи бесконечной частоты. В отличие от явных динамических систем фазовое многообразие всех возможных траекторий дескрипторной системы в переходных и установившихся режимах имеет нетривиальный дефект в пространстве состояний в каждый момент времени t , включая начальный $t = 0$ [2,3] (подробнее см. часть I, разд. 3). Различные достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи Коши для нелинейных дескрипторных уравнений вида (1) содержатся в [4 - 9]. Для модельной цепи на рис. 1 было показано, что в уравнении (1) относительно вектор-функции состояний

$$x(t) = (I_1(t), I_2(t), U_{C_1}(t), U_{C_2}(t))^T \quad (2)$$

матрицы A, B и вектор-функции f, ψ имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{12} & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} -\varphi_1(x_1) \\ -\varphi_2(x_2) \\ 0 \\ -g_1(x_3) - g_2(x_4) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

В разд. 4 части I система (1) приводилась к нормальной форме путем линейной замены переменных $x(t) = Wy(t)$ с постоянной обратимой матрицей W . Существование постоянной преобразующей матрицы W было доказано К. Вейерштрассом для линейных систем в процессе приведения характеристического матричного пучка $\lambda A + B$ к канонической форме [3, гл XII, § 2].

В части II мы переходим к разностному аналогу системы (1), который также оказывается дескрипторной разностной (дискретной) системой. По нормализованной дискретной системе строится нейросетевая модель, которая используется при анализе траекторий и фазовых многообразий системы в переходных режимах.

2. Разностное дескрипторное уравнение состояний и его нормализация

Если ищется численное решение уравнения (1) или когда известны только дискретные данные внешних источников (то есть значения функции $f(t_k)$), тогда рассматривается разностный аналог уравнения (1) – дискретная система векторных уравнений в пространстве \mathbf{R}^n :

$$Ax(k+1) + B(h)x(k) = hf(k) + h\psi(x_k), k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Система (3) получается квантованием времени с шагом h и переходом в уравнении (1) от производной к конечным разностям в моментах квантования t_k , где $t_0 = 0$ – начальный момент. Здесь использованы обозначения

$$B(h) = hB - A, \quad x(k) = x(t_k), \quad f(k) = f(t_k). \quad (4)$$

По известным дискретным данным $f(k)$ будем искать последовательность векторов $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathbf{R}^n как решение дискретной системы (3) при заданном начальном векторе

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

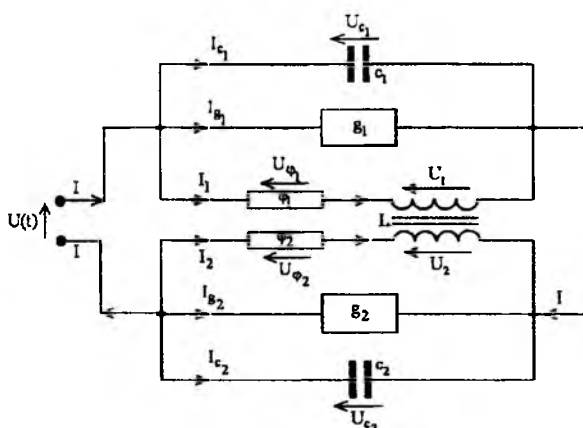


Рис.1. Двухполюсник с нелинейными сопротивлениями φ_k и проводимостями $g_k, k = 1, 2$

Для конкретной цепи на рис.1 речь идет о поиске последовательности $\{x(k) = (I_1(t_k), I_2(t_k), U_{C_1}(t_k), U_{C_2}(t_k))^{tr}\}_{k=1}^{\infty}$ по заданным значениям источника $U(0), U(t_1), U(t_2), \dots$ и начальному вектору $x(0) = (I_1(0), I_2(0), U_{C_1}(0), U_{C_2}(0))^{tr}$. Как и в части I, приведем характеристический пучок $\lambda A + B(h)$ к канонической форме Вейерштрасса с помощью обратимых матриц $P(h), Q(h)$:

$$P(h)[\lambda A + B(h)]W(h) = \lambda A_0(h) + B_0(h) \quad (6)$$

После замены

$$x(k, h) = W(h)y(k, h), k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

преобразуем уравнение (3) к следующей нормальной форме:

$$A_0(h) \cdot y(k+1, h) + B_0(h) \cdot y(k, h) = v(k, h) + \Pi_h(W(h) \cdot y(k, h)), \quad (8)$$

где $v(k, h) = hP(h)f(k)$, $\Pi_h(x) = hP(h)\psi(x)$.

Можно показать, что при соответствующем выборе приводящих матриц $P(h), W(h)$ каноническая матрица $A_0(h)$ не зависит от h и совпадает с матрицей A_0 в (15), (17) из части I

до дискретизации, а в матрице $B_0(h)$ клетки, отвечающие бесконечной резонансной частоте, также не зависят от h и совпадают с соответствующими клетками матрицы B_0 из (15), (17), часть I.

Цепь на рис. 1 имеет только одну конечную резонансную частоту, которая является нулевой. Благодаря этому вся матрица $B_0(h)$ оказывается не зависящей от h . Приводящие матрицы в (6) имеют следующий вид:

$$P(h) = \frac{1}{h\Delta} \begin{bmatrix} -h & h & -h & 0 \\ \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_2) & \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_1) & L_1 - L_{12} + \frac{C_2}{C_1}(L_{12} - L_2) & \frac{h\Delta}{C_1} \\ \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_2) & \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_1) & L_1 - L_{12} + \frac{C_2}{C_1}(L_{12} - L_2) & 0 \\ \frac{C_2}{C_1}(L_2 - L_{12}) & \frac{C_2}{C_1}(L_1 - L_{12}) & -\Delta + \frac{C_2}{C_1}(L_2 - L_{12}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$W(h) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{h^{-1}C_1L_2}{L_2 - L_{12}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{h^{-1}C_1L_1}{L_1 - L_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{C_2}{C_1} & -\frac{C_2}{C_1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Канонические матрицы $A_0(h) = A_0$, $B_0(h) = B_0$

$$: A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Фиксируем шаг квантования h и в нормализованной системе дискретных уравнений (8) опустим указание абстрактной зависимости от h в векторах y, v, Π . Тогда для компонент $v_i(k), \Pi_i(x)$ получаем значения

$$\left. \begin{aligned} v_1(k) &= -h\Delta^{-1}U(t_k), v_2(k) = v_3(k) = \Delta^{-1}(\alpha + L_1 - L_{12})U(t_k), \\ v_4(k) &= -(1 + \alpha\Delta^{-1})U(t_k); \Pi_1(x) = h\Delta^{-1}[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)], \\ \Pi_2(x) &= \Delta^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \varphi(x_1, x_2) - \frac{h}{C_1} [g_1(x_3) + g_2(x_4)]; \\ \Pi_3(x) &= \Delta^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \varphi(x_1, x_2); \Pi_4(x) = -\frac{C_2}{C_1\Delta} \varphi(x_1, x_2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь функция $\varphi(x_1, x_2)$ есть

$$\varphi(x_1, x_2) = (L_2 - L_{12})\varphi_1(x_1) + (L_1 - L_{12})\varphi_2(x_2), \quad (11)$$

постоянная $\alpha = \frac{C_2}{C_1}(L_{12} - L_2)$. Компоненты исходной переменной $x = x(k)$ и нормализованной $y = y(k)$ связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{h^{-1}C_1L_2}{L_2 - L_{12}} y_2 - y_1; x_2 = y_1 + \frac{h^{-1}C_1L_1}{L_1 - L_{12}} y_2 \\ x_3 &= \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right) y_3 - \frac{C_2}{C_1} y_4; x_4 = y_3 + y_4. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ нормализованное векторное дискретное уравнение (8) эквивалентно следующей системе четырех скалярных уравнений, где формы скалярных функций $\Pi_i(Wy)$ от компонент вектора y получаются путем подстановки в $\Pi_i(x)$ (10) выражений $x_j(y)$ из (12):

$$y_1(k+1) - y_1(k) = v_1(k) + \Pi_1(Wy(k)), \quad (13)$$

$$y_3(k+1) + y_2(k) = v_2(k) + \Pi_2(Wy(k)), \quad (14)$$

$$y_3(k) = v_3(k) + \Pi_3(Wy(k)), \quad (15)$$

$$y_4(k) = v_4(k) + \Pi_4(Wy(k)). \quad (16)$$

3. Применение нейросетевой модели

Для качественного анализа нелинейных нормализованных уравнений (23) из части I и разностных уравнений (13) – (16) удобно использовать *дескрипторные нейронные сети* [10, 11]. Сеть, моделирующая систему (13) – (16), изображена на рис. 2. Для k -го такта работы сети *входными сигналами* являются нормализованные переменные $y_i(k), i = 1, 2, 3, 4$, *выходными* – переменные $y_1(k+1)$, $y_3(k+1)$ и неизвестные величины $y_2(k+1)$, $y_4(k+1)$, которые следует найти из уравнений (13) – (16). В структуре сети точно отражены нулевые значения *синаптических коэффициентов* w_{ij} – элементов преобразующей матрицы W (9). Только одна *активационная функция* Π_2 получает информацию от всех четырех исходных переменных $x_i(k)$ и соответственно – от всех четырех нормализованных входов $y_i(k)$. Остальные активационные функции Π_1, Π_3, Π_4 зависят только от двух исходных переменных $x_1(k), x_2(k)$ и соответственно – от двух нормализованных входов $y_1(k), y_2(k)$. Наоборот, нормализованные входы $y_1(k), y_2(k)$ полностью определяют исходные переменные $x_1(k), x_2(k)$ без учета $y_3(k), y_4(k)$.

В сети существуют два замкнутых цикла на k -м такте без выхода в $(k+1)$ -й такт, которые содержат активационные блоки Π_3, Π_4 и реализуют алгебраические уравнения (15), (16) без разностей. Только два нормализованных выхода $y_1(k+1), y_3(k+1)$ определяются *явным* динамическим (*рекуррентным*) переходом на k -м такте через входы $y_i(k)$, то есть фактически через значения $x_i(k)$. Остальные выходы $y_2(k+1), y_4(k+1)$ можно искать из «*упреждающих*» связей на $(k+1)$ -м такте между переменными $y_i(k+1)$ в циклах с блоками Π_3, Π_4 с учетом, что $y_1(k+1), y_3(k+1)$ уже найдены на k -м такте.

Указанные наблюдения о структуре сети индуцируют следующий шаг анализа переходных режимов: записать упреждающие связи в виде уравнений (15), (16) для $(k+1)$ -го такта,

заменить в них $y_3(k+1)$ через переменные k -го такта с помощью уравнения (14) и получить пару уравнений вида

$$G_3(y_1(k+1), y_2(k+1)) = \rho(k), \quad (17)$$

$$\rho(k) \equiv \Pi_2(Wy(k)) - y_2(k) + v_2(k) - v_3(k+1)$$

$$y_4(k+1) = v_4(k+1) + G_4(y_1(k+1), y_2(k+1)) \quad (18)$$

Мы обозначили

$$G_i(y_1, y_2) = \Pi_i(x_1, x_2), i = 3, 4, \quad (19)$$

где вместо переменных x_1, x_2 следует подставить их выражения через y_1, y_2 в формулах (12).

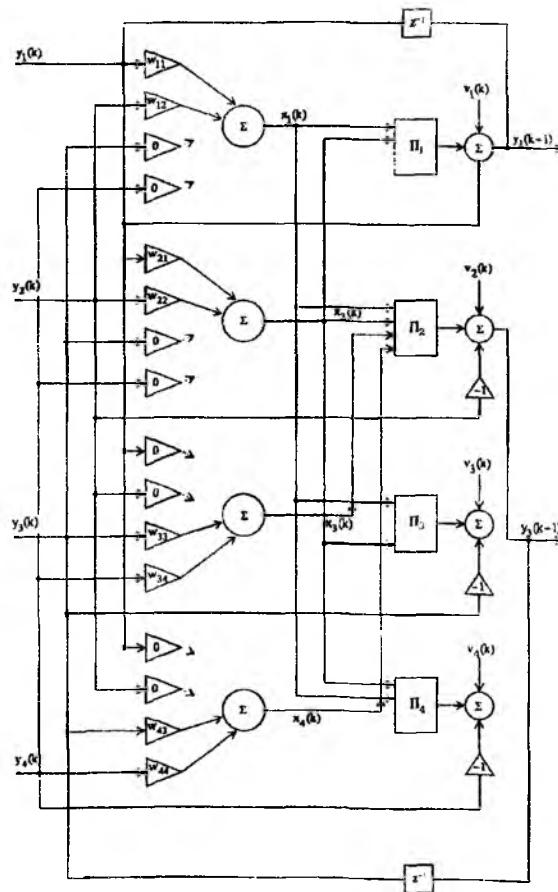


Рис. 2. Логическая схема нормализованных уравнений состояний цепи на рис. 1

Предположим, уравнение (17) можно явно разрешить относительно переменной y_2 :

$$y_2(k+1) = f_0(y_1(k+1), \rho(k)) \equiv F(y_1(k+1), y_1(k), y_2(k), y_3(k), y_4(k), v_2(k), v_3(k+1)).$$

Тогда «недостающие» выходные сигналы $y_2(k+1)$, $y_4(k+1)$ находятся по входу $y(k)$ с учетом (13), (18), что изображается с помощью логической блок-схемы на рис. 3.

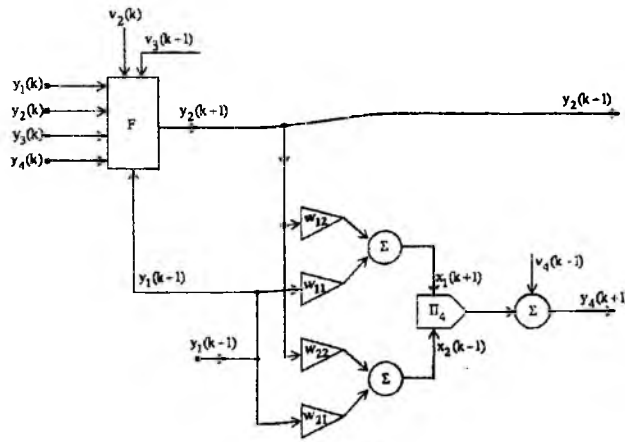


Рис. 3. Схема вычисления входов $y_2(k+1), y_4(k+1)$ для $(k+1)$ -го такта

Наконец, коль скоро будут найдены $y_i(k+1)$ для всех $i = \overline{1,4}$, то нормализующая линейная замена (7) позволяет определить для k -го такта выход $x(k+1)$ в исходных переменных переходного режима нелинейной цепи на рис. 1. Таким образом, проблема сводится к получению «хороших» достаточных условий существования единственного явного глобального решения $w = f_0(z)$ уравнения $G_3(z, w) = \rho$ при $\forall \rho \in \mathbf{R}$, или, что равносильно, уравнения

$$\varphi_1(aw - z) - \gamma \varphi_2(bw + z) = c \quad ; \quad 0 < \gamma \neq 1, b = -\gamma a \quad (20)$$

при $\forall c \in \mathbf{R}$. Действительно, соотношение $G_3 = \rho$ (17) переходит в (20), если воспользоваться определением Π_4 в (10), формулами (11), (12), обозначениями

$$a = \frac{h^{-1}C_1L_2}{L_2 - L_{12}}, b = \frac{h^{-1}C_1L_1}{L_1 - L_{12}}, \gamma = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

и предположениями на параметры цепи

$$C_j > 0, L_j > 0, L_{12} > 0, L_{12}^2 = L_1L_2, L_1 \neq L_2. \quad (21)$$

Напомним, что $\varphi_1(I), \varphi_2(I)$ – функции нелинейных сопротивлений в цепи на рис. 1.

4. Допустимые многообразия состояний, эволюционные формулы

Вследствие уравнений (15), (16), отвечающих двум циклам в нейросети на рис. 2, нормированное входное состояние $y(k)$ не может быть произвольным вектором из \mathbf{R}^4 . Это состояние должно принадлежать двумерному многообразию Z_k , векторы которого $y = (y_1, \dots, y_4)^T$ удовлетворяют двум связям между компонентами ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$Z_k = \{y \in \mathbf{R}^4 : y_3 = \Pi_3(Wy) + v_3(k); y_4 = \Pi_4(Wy) + v_4(k)\} \quad (22)$$

Соответственно исходные входные состояния $x(k)$ на k -м такте должны принадлежать допустимому двумерному многообразию

$$\Lambda_k = W(Z_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Предположим, для нормализованных состояний на каждом такте существует рекурсивное отображение

$$S_k : Z_k \rightarrow Z_{k+1}, S_k(y(k)) = y(k+1), k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Тогда их суперпозиция определяет эволюционное отображение $y(k) = \Phi_k(y(0))$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\Phi_k : Z_0 \rightarrow Z_k, \quad \Phi_k = S_{k-1} \circ S_{k-2} \circ \dots \circ S_1 \circ S_0. \quad (25)$$

Отображения S_k однозначно определяют рекурсивное отображение

$$\hat{S}_k : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k+1}, \quad \hat{S}_k(x(k)) = x(k+1)$$

между входом и выходом в исходных переменных:

$$x(k+1) = \hat{S}_k(x(k)) = WS_k(W^{-1}x(k)), x(k) \in \Lambda_k. \quad (26)$$

Соответственно конструируется эволюционное отображение $\hat{\Phi}_k$ между допустимыми начальными векторами x_0 (5), $x_0 \in \Lambda_0$, и векторами электрических состояний $x(k) \in \Lambda_k$ в момент времени t_k :

$$x(k) = \hat{\Phi}_k(x_0) = W\Phi_k(W^{-1}x_0), x_0 \in \Lambda_0, k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Построения разд. 2 – 4 резюмируются следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (21) на параметры цепи, функции $\varphi_j(\zeta), g_j(\zeta)$ непрерывно дифференцируемы при $\zeta \in \mathbf{R}$ и нелинейные сопротивления $\varphi_j(\zeta)$ таковы, что уравнение (20) имеет единственное вещественное решение $w = f_0(z)$ при любой вещественной постоянной c . Тогда для любого начального вектора x_0 из двумерного многообразия Λ_0 (23), (22) в пространстве \mathbf{R}^4 существует единственное решение дескрипторной разностной системы (3) – последовательность $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ с начальным значением (5), где при $k \geq 1$ состояния $x(k)$ в моменты времени t_k определяются с помощью эволюционного отображения $\hat{\Phi}_k$ (27) и принадлежат многообразиям Λ_k (23), (22), $\dim \Lambda_k = 2$.

Замечание. Кубические функции сопротивлений $\varphi_j(I) = \alpha_j I^3, \alpha_j > 0$, удовлетворяют условиям теоремы 1.

Действительно, записав уравнение (20) в виде соответствующего кубического уравнения относительно w с коэффициентами, зависящими от z , мы можем воспользоваться теорией алгебраических уравнений третьей степени и формулами Кардано для его корней [12, § 64]. Переходя к «неполному» кубическому уравнению без квадрата и записывая его дискриминант D , обнаруживаем, что $D < 0$ при любом z коль скоро в (20) знаки коэффициентов a и b противоположны. Следовательно, кубическое уравнение (20) имеет в точности один вещественный корень $w = f_0(z)$.

Имеет ли физический смысл принадлежность состояния $x(k)$ многообразию Λ_k (23)? Используя вид функций Π_3, Π_4 (10), функции φ (11), матрицы W (9) и переходя в (22) к исходным переменным $x_i(k)$, получаем два уравнения, задающие многообразие $\Lambda_k = \{x(k)\}$:

$$x_3(k) = \frac{L_1}{L_1 - L_{12}} U(t_k) + \frac{L_2}{L_2 - L_{12}} \varphi_1(x_1(k)) + \frac{L_1}{L_1 - L_{12}} \varphi_2(x_2(k)) \quad (28)$$

$$x_4(k) = \frac{L_{12}}{L_1 - L_{12}} U(t_k) + \frac{L_2}{L_2 - L_{12}} \varphi_1(x_1(k)) + \frac{L_1}{L_1 - L_{12}} \varphi_2(x_2(k)) \quad (29)$$

Вернемся к электрическим интерпретациям компонент вектора состояний $x(t_k) = x(k)$ (2) и перейдем к разности и сумме уравнений (28), (29):

$$U_{C_1}(t) - U_{C_2}(t) = U(t), \quad t = t_0, t_1, \dots; \quad (30)$$

$$U_{C_1}(t) + U_{C_2}(t) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} U(t) - \frac{2}{\gamma - 1} \varphi_1(I_1(t)) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \varphi_2(I_2(t)) \quad (31)$$

Здесь обозначено $\gamma = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} > 0, \gamma \neq 1$. Таким образом, многообразие $\Lambda_t = \{x(t)\}$ допустимых значений состояний в момент t определяется уравнениями (30), (31) алгебраических связей между компонентами вектора (2). При этом (30) есть линейное уравнение Кирхгофа для напряжений на емкостях и входе двухполюсника. Однако нелинейное уравнение (31) не имеет столь наглядной физической интерпретации, оно связывает все четыре электрические переменные состояния (2) и обнаружено в ходе нормализующего преобразования исходного уравнения состояний (1) и дискретной системы (3).

5. Заключение

Переход к нормальной форме в дескрипторных уравнениях нелинейной цепи и анализ модельной нейронной сети помогают описать зависящее от времени фазовое многообразие траекторий переходных режимов и его дефект. Для дескрипторной дискретной системы строятся рекурсивное и эволюционное отображения, действующие на фазовом многообразии. Эти отображения однозначно определяют траекторию решения в переходном режиме после выбора допустимого начального вектора.

В следующей работе будут построены численные методы, реализующие изложенный подход для получения состояний нелинейной цепи в переходном режиме.

Список литературы: 1. *Bender D.I., Laub A.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1987. V. AC-32, № 6. P. 2062-2077. 2. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Диф. уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996-2010. 3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. 4. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 272 с. 5. *Rutkas A.* The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of Sixth Crimean Fall Mathematical School-Symposium (Simferopol). 1996. V. 6. P. 317-320. 6. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Zürich: European Mathematical Society Publishing House, 2006. 377 p. 7. *Favini A., Rutkas A.* Existence and uniqueness of solutions of some degenerate nonlinear equations // Differential and Integral Equations. 1999. V. 12, № 3. P. 373-394. 8. *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.* Existence of solutions of degenerate non-linear differential operator equations // Nonlinear Oscillations. 2001. V. 4, № 2. P. 252-263. 9. *Руткас А.Г., Худошин И.Г.* Глобальная разрешимость одного вырожденного дифференциально-операторного уравнения // Нелінійні коливання. 2004. Т.7, № 3. С. 414-429. 10. *Руткас А.А.* Нейромоделирование одного класса динамических систем // Радиотехника и информатика. 2008. № 2. С. 11-16. 11. *Руткас А.А.* О свойствах дескрипторных нейронных сетей // Радиотехника и информатика. 2008. № 3. С. 22-27. 12. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

Харьковский национальный
университет радиотехники
Харьковский национальный университет
им. В.Н. Каразина

Поступила в редколлегию 01.04.2010