

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОНУСА С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ

Задачам рассеяния электромагнитных волн на незамкнутых экранах посвящено много работ. Исследование таких задач представляет большой интерес как для практических приложений (антенная измерительная техника, радиолокация, связь), так и для теории дифракции и рассеяния волн [1]. Тесное ретическое изучение реальных физических процессов основано на создании адекватной модели рассматриваемого процесса и решении соответствующей математической задачи. Известно, что граничные электродинамические задачи в конечном счете сводятся к задачам математической физики, для решения которых одним из эффективных средств является аппарат интегральных уравнений [2].

В данной работе приведен алгоритм сведения задачи возбуждения сосредоточенными источниками полубесконечного идеально проводящего кругового конуса с продольной щелью к решению сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши и Гильберта или имеющими логарифмическую особенность.

Постановка задачи.

Полубесконечный идеально проводящий круговой конус с прорезанной вдоль образующей щелью в сферической системе координат (r, θ, φ) задается уравнением, $\theta = \gamma$ (рис. 1). Выбор сферической системы координат обусловлен тем, что коническая поверхность является одной из координатных поверхностей этой системы координат. Угловая ширина щели d равна величине двугранного угла, образованного плоскостями, проведенными через ось конуса (ось Oz) и ребра щели. Источник возбуждения (радиальный диполь) расположен в точке $Q_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Его поле меняется гармонически по закону $\exp(-i\omega t)$. Полное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяет системе уравнений Максвелла вне конуса и источника, граничному условию обращения в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности конуса Σ : $\theta = \gamma$ и $\frac{d}{2} < |\varphi| \leq \pi$, условию на бесконечности и условию ограниченности энергии. Представим \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_S, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_S, \quad (1)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 – поле источника, а \mathbf{E}_S , \mathbf{H}_S – поле, рассеянное конусом. Для решения граничных задач в сферической системе координат удобно ввести электрический $V^{(1)}$ и магнитный $V^{(2)}$ потенциалы Дебая, через которые выражаются компоненты электромагнитного поля [2]. При возбуждении конуса с продольной щелью электрическим диполем поле \mathbf{E} , \mathbf{H} определяется только потенциалом $V^{(1)}$, а в случае возбуждения магнитным диполем – потенциалом $V^{(2)}$. Так, в случае возбуждения электрическим радиальным диполем

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}V^{(1)}), \quad \mathbf{H} = -ik\nabla \times (\mathbf{r}V^{(1)}), \quad (2)$$

где k – волновое число, $\text{Im}k \geq 0$. Тогда электродинамическая задача сводится к граничным задачам для уравнения Гельмгольца

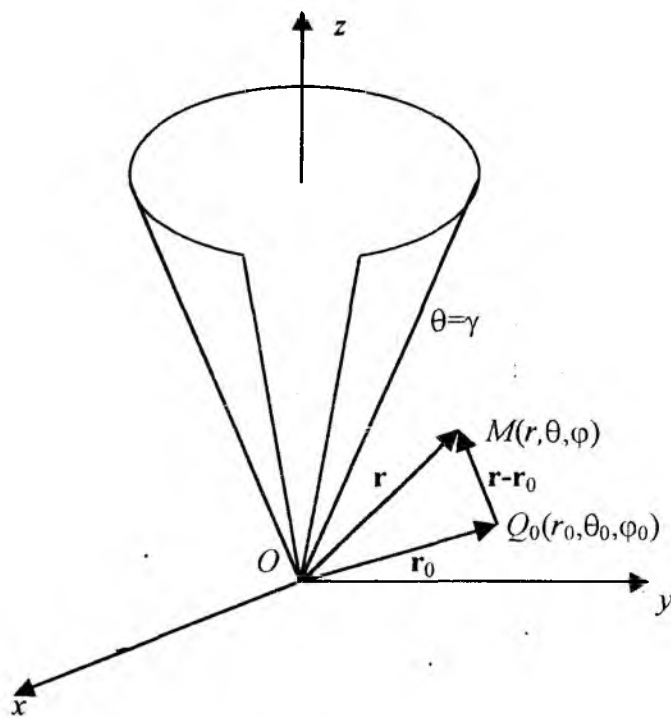


Рис. 1

$$\Delta V^{(j)} - q^2 V^{(j)} = 0, \quad (3)$$

$V^{(j)} = V^{(j)}(r, r_0)$, $q = -ik$, $j = 1; 2$, с условием Дирихле на конической поверхности

$$V^{(1)} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (4)$$

в случае возбуждения электрическим диполем и условием Неймана

$$\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \theta} \Big|_{\Sigma} = 0 \quad (5)$$

в случае возбуждения магнитным диполем. В соответствии со структурой электромагнитного поля (1) потенциалы Дебая $V^{(j)}$ для полного поля запишем в виде

$$V^{(j)} = V_0^{(j)} + V_S^{(j)}, \quad (6)$$

где $V_0^{(j)} = \frac{|\mathbf{p}_0^{(j)}|}{r_0} \frac{e^{-q|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ – потенциал Дебая, соответствующий полю источника, а $V_S^{(j)}$ – рассеянному полю, $\mathbf{p}_0^{(j)}$ – момент диполя. Для решения задачи используем интегральное преобразование Конторовича – Лебедева [3]

$$G(\tau) = \int_0^{+\infty} g(r) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} dr; \quad (7)$$

$$g(r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi\tau G(\tau) \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (8)$$

где $K_\mu(z)$ – функция Макдональда.

Искомый потенциал $V_S^{(j)}$ представим в виде интеграла Конторовича – Лебедева (8)

$$V_S^{(j)} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi\tau \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{m\tau}^{(j)} \tilde{V}_{m\tau}^{(j)} \frac{K_{i\tau}(qr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (9)$$

где

$$a_{m\tau}^{(j)} = \frac{\pi}{2r_0\sqrt{r_0}} e^{-im\varphi_0} \frac{(-1)^{m+1} \Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\operatorname{ch} \pi\tau \Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)} K_{i\tau}(qr_0) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos\theta_0) \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos\gamma),$$

$$\tilde{V}_{m\tau}^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{m,n}^{(j)}(\tau) \cdot \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+n}(\pm\cos\theta)}{d^{j-1}} e^{i(m+n)\varphi}, \quad \Gamma(z) - \text{гамма-функция, } P_\mu^m(\cos\alpha) - \text{при}$$

соединенная функция Лежандра 1-го рода. В представлении (9) $X_{m,n}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, не зависящие от волнового числа, а верхние индексы аргументов у функции Лежандра соответствуют области $0 < \theta < \gamma$, нижние – $\gamma < \theta < \pi$.

Для нахождения функциональных соотношений, содержащих $X_{m,n}^{(j)}$, воспользуемся граничными условиями (4), (5), а также условием непрерывности поля в щели ($C\Sigma$). Последнее условие накладывает требование непрерывности в щели $V^{(j)}$ и $\frac{\partial V^{(j)}}{\partial \theta}$. В результате приходим к парным сумматорным уравнениям относительно неизвестных коэффициентов.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{m,n}^{(j)} e^{in\varphi} = 1, \quad \varphi \in \Sigma. \quad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{3-2j} \cdot \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(j)}) X_{m,n}^{(j)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in C\Sigma, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} & |n|^{3-2j} \cdot \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(j)}) = \\ & = \frac{(-1)^{n+j-1}}{\pi(\sin \gamma)^{2(j-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - n\right)} \cdot \frac{1}{\frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma) \frac{d^{j-1}}{d\gamma^{j-1}} P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)} \end{aligned} \quad (12)$$

Для $\varepsilon_{m,n}^{(j)}$ имеет место оценка $\varepsilon_{m,n}^{(j)} \sim \frac{\text{const}}{n^2} \sin^2 \gamma$, $n \gg 1$.

Сингулярные интегральные уравнения.

Электрический радиальный диполь.

В случае возбуждения конуса с продольной щелью электрическим радиальным диполем парные сумматорные уравнения (10), (11) имеют вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 1, \quad \varphi \in \Sigma. \quad (13)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) X_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in C\Sigma. \quad (14)$$

$$|n| (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) = \frac{(-1)^n}{\pi} \text{ch } \pi\tau \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - n\right)} \cdot \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)}. \quad (15)$$

Обозначим

$$Y_{m,n}^{(1)} = |n| (1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}) X_{m,n}^{(1)}; \quad (16)$$

$$1 - \kappa_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}}.$$

Переписываем (13), (14) в этих обозначениях

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|n|} \left(1 - \kappa_{m,n}^{(1)}\right) Y_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 1, \quad \varphi \in \Sigma. \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in C\Sigma. \quad (18)$$

Рассмотрим функцию

$$F_1(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (19)$$

отсюда следует, что коэффициенты $Y_{m,n}^{(1)}$ определяются через $F_1(\varphi)$ по формуле

$$Y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (20)$$

Исходная задача свелась к нахождению $F_1(\varphi)$, которая с точностью до множителя совпадает с радиальной (и единственной при возбуждении электрическим радиальным диполем) составляющей плотности поверхностного тока, наведенного на конусе. Согласно (18)-(20) имеем

$$F_1(\varphi) = 0, \quad \varphi \in C\Sigma; \quad (21)$$

$$Y_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} F_1(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (22)$$

Подставим выражение для $Y_{m,n}^{(1)}$ из (22) в (17) и получим сингулярное интегральное уравнение (СИУ) первого рода относительно неизвестной функции $F_1(\varphi)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \ln \left| 2 \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \right| F_1(\psi) d\psi - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K_{m\tau}^{(1)}(\varphi - \psi) F_1(\psi) d\psi = -1, \quad \varphi \in \Sigma, \quad (23)$$

где

$$K_{m\tau}^{(1)}(\alpha) = A_{m\tau}^{(1)} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \kappa_{m,n}^{(1)} e^{in\alpha}. \quad (24)$$

$$A_{m\tau}^{(1)} = \frac{1}{|n|} \left(1 - \kappa_{m,n}^{(1)}\right) \Big|_{n=0}, \quad \kappa_{m,n} \sim \frac{C}{n^2} \sin^2 \gamma, \quad n \gg 1.$$

Неизвестные коэффициенты $X_{m,n}^{(1)}$ находятся посредством формулы

$$X_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|n|} \left(1 - \kappa_{m,n}^{(1)}\right) \int_{\Sigma} F_1(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (25)$$

СИУ (23) определено на конической поверхности Σ . Известны работы, например [4], где СИУ задано в щели и в качестве неизвестной содержит функцию, связанную с полем в щели. Получим СИУ в рассматриваемом случае возбуждения, но определенное в щели $C\Sigma$: $\theta = \gamma$, $|\varphi| < d/2$. Перепишем уравнения (13), (14) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in \Sigma; \quad (26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}\right) \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = -A_{m\tau}^{(1)}, \quad \varphi \in C\Sigma; \quad (27)$$

где

$$\hat{Y}_{m,n}^{(1)} = X_{m,n}^{(1)} - \delta_n^0, \quad \delta_n^0 = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}, \quad A_{m\tau}^{(1)} = |n| \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}\right) \Big|_{n=0} \quad (28)$$

Продифференцируем обе части (26) по φ и добавим дополнительное условие, которое получается из (26), полагая в нем $\varphi = \pi$.

$$i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in \Sigma; \quad (29)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \left(1 - \varepsilon_{m,n}^{(1)}\right) \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = -A_{m\tau}^{(1)}, \quad \varphi \in C\Sigma; \quad (30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \hat{Y}_{m,n}^{(1)} = 0, \quad (\varphi = \pi). \quad (31)$$

Дополнительное условие (31) необходимо для определения коэффициентов, которые теряются при дифференцировании (26). Введем функцию

$$\hat{F}_1(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi} = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \hat{Y}_{m,n}^{(1)} e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (32)$$

Из (26), (31) и (32) следует, что

$$\hat{F}_1(\varphi) = 0, \quad \varphi \in \Sigma. \quad (33)$$

$$\hat{Y}_{m,n}^{(1)} = -\frac{i}{2\pi n} \int_{C\Sigma} \hat{F}_1(\alpha) e^{-in\alpha} d\alpha, \quad n \neq 0; \quad (34)$$

$$\hat{Y}_{m,0}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C\Sigma} \alpha \hat{F}_1(\alpha) d\alpha. \quad (35)$$

Подставляя (34), (35) в (30), получаем СИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{C\Sigma} \frac{\hat{F}_1(\alpha)}{\alpha - \varphi} d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{C\Sigma} K_{m\tau}(\alpha - \varphi) \hat{F}_1(\alpha) d\alpha = A_{m\tau}^{(1)}, \quad \varphi \in C\Sigma; \quad (36)$$

где
$$K_{m\tau}(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2} \alpha A_{m\tau}^{(1)} + \frac{1}{2i} \sum_{n \neq 0} \frac{|n|}{n} \varepsilon_{m,n}^{(1)} e^{-in\xi}.$$

Магнитный радиальный диполь.

В этом случае уравнения (10), (11) принимают вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_{m,n}^{(2)} e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in \Sigma; \quad (37)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|n|} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) Y_{m,n}^{(2)} e^{in\varphi} = -A_{m\tau}^{(2)}, \quad \varphi \in C\Sigma, \quad (38)$$

где $Y_{m,n}^{(2)} = X_{m,n}^{(2)} - \delta_n^0$;

$$\frac{1}{|n|} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi \sin^2 \gamma} \cdot \operatorname{ch} \pi\tau \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau + n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\tau - n\right)} \cdot \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)};$$

$$A_{m\tau}^{(2)} = \frac{1}{|n|} (1 - \varepsilon_{m,n}^{(2)}) \Big|_{n=0}.$$

Определим функцию

$$\Phi_2(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_{m,n}^{(2)} e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (39)$$

В силу (37) $\Phi_2(\varphi) = 0$, $\varphi \in \Sigma$. Неизвестные коэффициенты $Y_{m,n}^{(2)}$ выражаются через $\Phi_2(\varphi)$ (39) по формуле $Y_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{C\Sigma} \Phi_2(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$. Повторяя преобразования, подобные случаю электрического диполя, приходим к СИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \ln \left| 2 \sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \right| \Phi_2(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K_{m\tau}^{(2)}(\varphi - \alpha) \Phi_2(\alpha) d\alpha = A_{m\tau}^{(2)}, \quad \varphi \in C\Sigma, \quad (40)$$

где $K_{m\tau}^{(2)}(\xi) = A_{m\tau}^{(2)} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \varepsilon_{mn}^{(2)} e^{in\xi}$.

Задача возбуждения конуса с продольной щелью радиальным диполем свелась к решению сигнурного интегрального уравнения с логарифмической особенностью (23), (40) или особенностью типа Коши (36). В этих уравнениях $K_{m\tau}^{(1,2)}(\varphi, \alpha)$, $K_{m\tau}(\varphi, \alpha)$ являются непрерывными функциями в соответствующих областях. Решение СИУ в каждом случае может быть получено численно путем параметризации и дискретизации уравнения и применения квадратур [5, 6].

Список литературы: 1. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. Киев: Наук. думка, 1987. 288 с. 2. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М: Высш. шк., 1991. 224 с. 3. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Некоторые преобразования, родственные преобразованию Конторовича – Лебедева // В кн. Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 68-79. 4. Малин В.В. К теории ленточных решеток конечного периода // Радиотехника и электроника. 1963. Т. 8. № 2. С. 211-220. 5. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наук. думка, 1989. 256 с. 6. Гандель Ю.В. Метод парных и сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции на ограниченных решетках // Электромагнитные явления. Харьков, 1998. Т.1, № 12. С. 220-232.

Харьковский государственный технический университет радиотехники

Поступила в редколлегию 20.10.99