

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ
НА ОСНОВІ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ**

Мельник М.Г.

e-mail: mariia.melnyk2@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук Славів О.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This paper investigates an approach to the segmentation of surfaces described by functions of two variables with first-kind discontinuities in the function itself or its derivatives of a certain order. The detection of surface features is implemented using the mathematical apparatus of discontinuous splines on a rectangular grid. The primary objective of the research is to develop efficient methods for solving surface segmentation problems, whether defined by continuous functions or represented as digital images. The results obtained are of practical significance for computer vision, digital signal processing, and computer-aided engineering design.

Питання сегментації поверхонь є фундаментальним для розвитку сучасних систем комп'ютерної візуалізації, цифрової обробки зображень та автоматизованого проектування. Традиційно ці задачі вирішувалися за допомогою методів глобальної апроксимації та інтерполяції, зокрема на основі неперервних сплайн-функцій [1]. Проте такі підходи виявляються недостатньо ефективними при моделюванні об'єктів із різкими перепадами кривизни або структурними розривами, оскільки часто спричиняють обчислювальні артефакти та знижують загальну точність відтворення геометрії.

На сьогодні сформовано низку стратегій локальної сегментації та адаптивного наближення [2], де провідне місце посідають апарати В-сплайнів та NURBS [3]. Для роботи з топологічно складними, неоднорідними поверхнями особливого значення набуває використання розривних сплайнів. Цей інструментарій дозволяє коректно ідентифікувати та описувати розриви самої функції або її похідних заданого порядку [4].

З огляду на це, поєднання класичної теорії сплайнів із новітніми алгоритмами сегментації є актуальним науковим завданням, розв'язання якого дозволить досягти високого рівня адаптивності та геометричної достовірності математичних моделей.

Нехай $f(x, y)$ – математична модель поверхні, яка визначена на деякій прямокутній області $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Необхідно проаналізувати дану поверхню на наявність розривів першого роду самої функції або її похідної деякого порядку та у випадку, якщо такі розриви існують, то виділити у області D окремі сегменти та наблизити лінію розриву білінійними сплайнами.

Для знаходження розривів на області D у роботі [4] наведено метод, який для розбиття області D на прямокутні елементи прямими, що паралельні осям координат, будує наближення кривої розриву функції або її похідної деякого порядку за допомогою розривних білінійних сплайнів вигляду:

$$S(x, y) = p_{i,j}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + \\ + C_{i,j+1}^{+-} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, (x, y) \in \Pi_{i,j},$$

де $\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ – прямокутний елемент розбиття, який належить області D .

Параметри розривного сплайну знаходяться методом найменших квадратів:

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset D} \iint_{\Pi_{i,j}} [d^k f(x, y) - p_{i,j}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C, \\ d^k f(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_{i,j} \frac{\partial^{i+j} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j},$$

де k – значення похідної, в якій шукається розрив.

Сформулюємо основні етапи методу сегментації поверхні за допомогою розривних сплайнів.

Крок 1. Задаємо початкове розбиття Π області D на прямокутні елементи $\Pi_{i,j}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$.

Крок 2. На кожному елементі розбиття із Π будуємо відповідний розривний білінійний сплайн $p_{i,j}(x, y), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$.

Крок 3. Методом найменших квадратів знаходимо невідомі параметри $C_{i,j}^{++}, C_{i+1,j}^{--}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i+1,j+1}^{--}, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$, та підставляємо їх у побудовані у п.2 розривні білінійні сплайни.

Крок 4. На кожному елементі розбиття обчислюємо значення:

$$J_{i,j}^* = \max_{\substack{x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ y_j \leq y \leq y_{j+1}}} J_{i,j}, J_{i,j} = |d^k f(x, y) - p_{i,j}(x, y)|, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

Крок 5. На основі отриманих в п.4 значень робимо висновок для кожного елементу розбиття про те, чи належить елемент якомусь сегменту області або містить розрив функції або її похідної деякого порядку.

Якщо $J_{i,j}^* < \varepsilon$, то шукається такий сегмент $G_p \subset D, p = \overline{1, r}$, із вже відомих r сегментів, який має спільну межу із областю $\Pi_{i,j}$. Якщо такий сегмент існує, то $\Pi_{i,j}$ об'єднується із цим сегментом, тобто $G_p = G_p \cup \Pi_{i,j}$, у іншому випадку утворюється новий сегмент $G_{r+1} = \Pi_{i,j}$, а загальна кількість сегментів

поверхні збільшується на 1. Видаляємо із Π елемент $\Pi_{i,j}$, оскільки він вважається неперервним.

Якщо $J_{i,j}^* \geq \varepsilon$, то це означає, що у області $\Pi_{i,j}$ міститься розрив першого роду функції або її похідної деякого порядку. Ділимо $\Pi_{i,j}$ на чотири рівні частини, вводячи нові лінії всередині прямокутника, видаляємо із Π елемент $\Pi_{i,j}$ та додаємо замість нього нові чотири прямокутні елементи.

Крок 6. Перевіряємо умову завершення ітераційного процесу:

$$\max_{(x,y) \in \Pi_{i,j}} |d^k f(x,y) - p_{i,j}(x,y)| < \varepsilon, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}.$$

У випадку якщо умова не виконана, то переходимо до п.2.

У випадку якщо умова виконана, то в результаті ми отримуємо набір з r сегментів, що описуються областями $G_p \subset D, p = \overline{1, r}$, та наближення кривої розриву у вигляді розривних сплайнів Π .

Валідація запропонованого підходу на фантомі Шеппа-Логана продемонструвала його високу результативність. Робота спрямована на розв'язання задач сегментації для широкого спектра вхідних даних – від неперервних математичних моделей до растрових зображень.

Важливою перевагою методу є здатність наближувати геометрію кривих розриву. Більш того, архітектура методу допускає спрощення для селективного виявлення розривів функції чи її похідних, забезпечуючи функціональність, аналогічну підходам у джерелі [4]

Список використаних джерел:

1. Boor C. D. A practical guide to splines. 2nd ed. New York : Springer, 2000.
2. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. Berlin : Springer, 1997.
3. Rogers D. F. An Introduction to NURBS: With Historical Perspective. San Francisco : Morgan Kaufmann, 2001.
4. Lytvyn O., Slavik O. Investigation of rupture lines of the functions of two variables or their derivatives of some order. *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. Vol. 19, no. 1. P. 37–43. URL: <https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.037> (date of access: 16.03.2026).