

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ КОМПОЗИЦИИ АРКСИНОСНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В электро- и радиотехнике часто приходится сталкиваться с арксинусными распределениями исследуемой величины. Такая ситуация возникает, например, при определении погрешности рассогласования в СВЧ линиях передачи в случае, когда фаза коэффициента отражения нагрузки не известна и считается распределенной по равновероятному закону [1]. Аналогичный случай имеет место при геометрических измерениях параметров объектов вращения, например при измерении диаметров вала, сферы или отверстия в различных направлениях [2]. Такие ситуации достаточно просто исследуются в аналитическом виде.

Однако в ряде случаев, когда влияющих факторов с арксинусным распределением несколько, для определения вида распределения исследуемой величины необходимо находить их композицию.

Например, при измерении показателей качества электрической энергии, согласно [3], следует учитывать влияние до сорока гармонических составляющих. Такой сигнал в общем виде можно представить как

$$u(t) = \sum_{n=1}^N U_n \sin(n\omega t + \psi_n),$$

где ω – частота первой гармоники исследуемого сигнала; U_n и ψ_n – соответственно амплитуда и фаза n -й гармонической составляющей напряжения.

Нетрудно заметить, что при равновероятном распределении фазового сдвига ψ_n закон распределения значения напряжения каждой гармонической составляющей будет арксинусным. Следовательно, закон распределения исследуемой величины $u(t)$ является композицией N арксинусных законов распределения.

В работе исследуется зависимость доверительного коэффициента t_p композиции арксинусных законов распределения от соотношения их средних квадратических отклонений (СКО). В литературе подобным образом исследована композиция равновероятных законов распределения [4], полученная аналитически. Однако получить композицию арксинусных законов распределения в аналитическом виде достаточно сложно. В связи с этим в ходе исследования был применен метод Монте-Карло. Суть его заключается в следующем.

При помощи программы-генератора случайных чисел были получены исходные последовательности случайных чисел (с количеством $m=30000$ членов в каждой), распределенных по равновероятному закону. Методом обратной функции были получены последовательности, распределенные по закону арксинуса (рис. 1 а). Для получения композиции числовые значения последовательностей суммировались в порядке их генерации. При этом отношения их СКО устанавливалось от 1 до 10. Таким образом были получены 10^{N-1} композиций, для которых были построены гистограммы (рис. 1) и кумулятивные кривые. Для каждой из композиций по формуле Бесселя определялась оценка СКО $S(x)$. Одновременно вычислялась оценка эксцесса по формуле

$$\hat{E}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \bar{x})^4}{mS^4(x)} - 3,$$

где x_i – i -й член суммарной последовательности; \bar{x} – среднее арифметическое m членов суммарной последовательности.

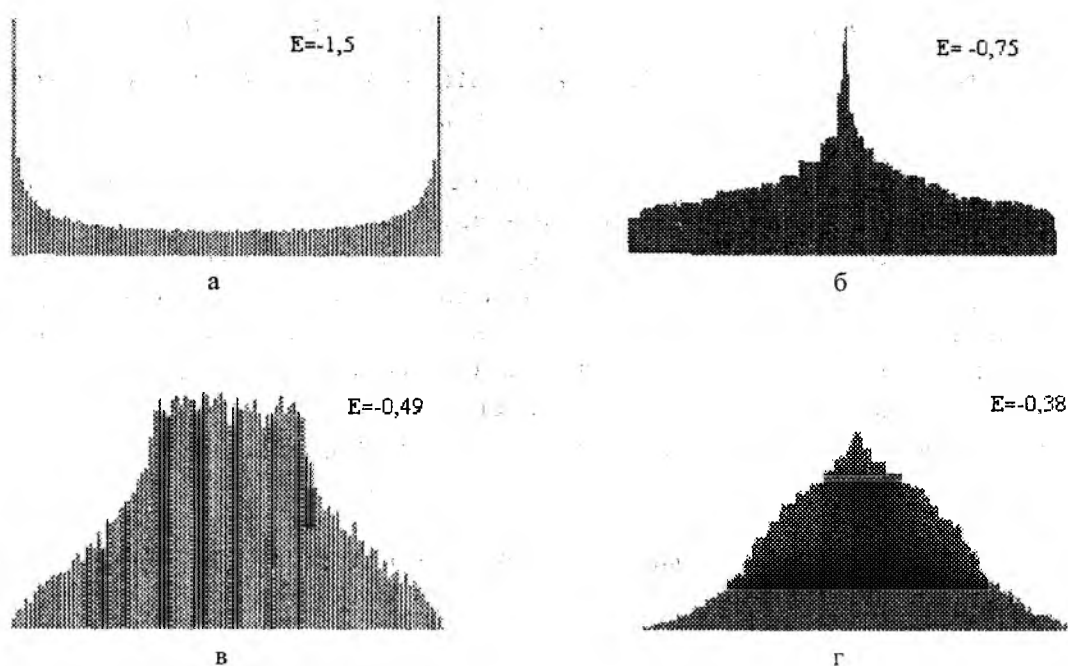


Рис. 1

Исходя из известного соотношения для оценок границ случайной погрешности

$$\varepsilon = t_p S(x),$$

определялись значения доверительных коэффициентов t_p . При этом оценки границ погрешности ε для заданной доверительной вероятности p вычислены как разность значений интегральной функции суммарного распределения $F\left(\frac{p}{2}\right) - F\left(1 - \frac{p}{2}\right)$. Последние были получены при помощи интерполирования кумулятивной кривой распределения степенным полиномом второй степени по трем точкам, расположенным в окрестности заданных.

На рис. 2 приведены графики зависимости доверительного коэффициента t_p от величины соотношения оценок СКО двух гармонических составляющих¹ для доверительных вероятностей 0,95 и 0,99 (обозначены 1а и 1б соответственно). Из рисунка видно, что максимум t_p достигается при равных оценках СКО гармоник. При этом композиция законов распределения гармоник имеет вид древнерусского шлема (рис. 1 б) [5], а ее эксцесс распределения максимален и равен $-0,75$.

На рис. 3 приведены аналогичные зависимости для трех гармонических составляющих (а – для заданной доверительной вероятности 0,95; б – для заданной доверительной вероятности 0,99) от значения отношения S_3/S_1 при различных значениях S_2/S_1 . Цифрами 1...10 (рис. 3 а, б) обозначены кривые, полученные при отношениях оценок СКО S_3/S_1 , равных 1...10 соответственно. Из графиков (рис. 3 а, б) видно, что максимальное значение коэффициента t_p достигается при равенстве отношений СКО $S_2/S_1 = S_3/S_1$.

¹ Индексы при S указывают на номер гармоники.

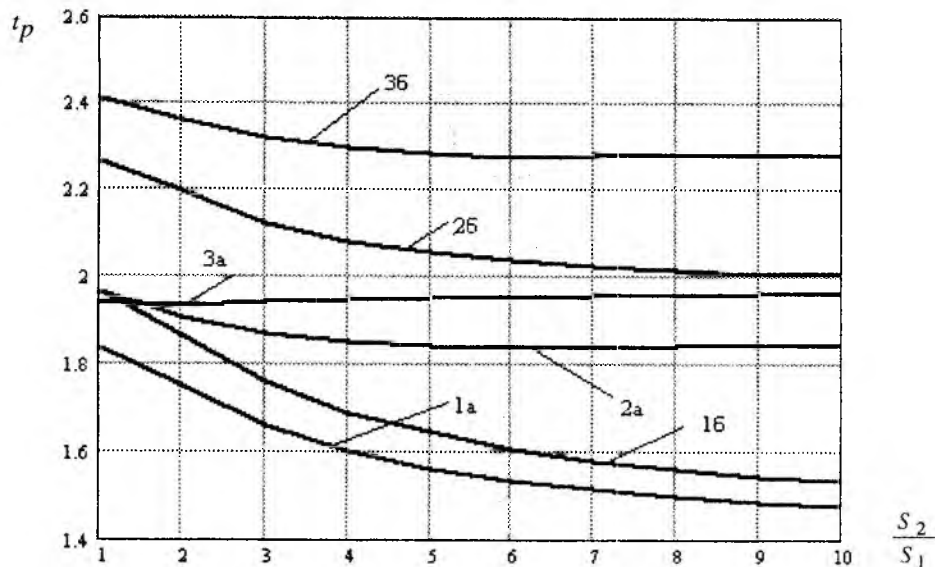


Рис. 2

График зависимости максимума t_p от отношения $S_2/S_1 = S_3/S_1$ приведен на рис. 2 (зависимости, обозначенные 2а и 2б для значений доверительной вероятности 0,95 и 0,99 соответственно).

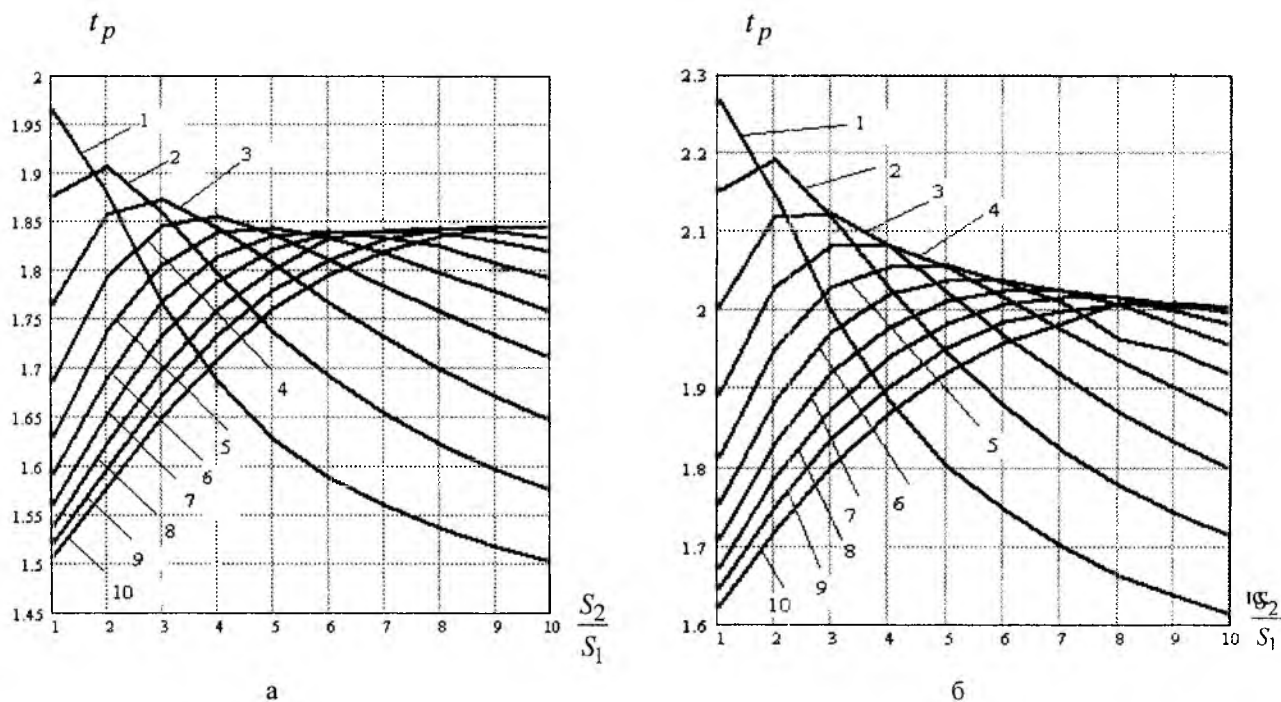


Рис. 3

Из графика (рис 3) видно, что максимум максимум значения t_p достигается при равенстве оценок СКО гармонических составляющих $S_1=S_2=S_3$. Вид композиции, удовлетворяющей этому условию, приведен на рис. 1 в.

На рис. 2 также приведены графики зависимости доверительного коэффициента от отношения оценок СКО составляющих для случая композиции четырех арксинусных законов распределения (кривые, обозначенные 3а и 3б для доверительной вероятности 0,95 и 0,99 соответственно). Здесь максимум максимум достигается при том же условии, что для пре-

дыдущей композиции – при равенстве всех оценок СКО составляющих. Гистограмма, соответствующая такой композиции, приведена на рис. 1 г.

Аналогичные исследования для композиции 5 арксинусных законов распределения показали, что в результате получается закон распределения, практически неотличимый от нормального (проверка по критерию Пирсона дала положительный результат для вероятности 0,95). Эксцесс такого закона распределения равен – 0.27.

Таким образом, метод Монте-Карло позволил осуществить композицию арксинусных законов распределения и исследовать зависимость доверительного коэффициента от отношения оценок СКО гармонических составляющих.

Показано, что во всех случаях максимум доверительного коэффициента достигается при равенстве отношений оценок СКО гармонических составляющих к оценке СКО первой гармоники, что соответствует также максимуму значения эксцесса. В то же время максимум максимум доверительного коэффициента достигается при равенстве оценок СКО всех гармонических составляющих, входящих в состав композиции.

Полученные результаты могут найти применение при оценивании погрешностей измерения мощности в линиях передачи СВЧ диапазона, коэффициента гармоник, параметров качества электроэнергии, параметров объектов вращения и других практических случаях.

Список литературы: 1. Кукуш В.Д. Электрорадиоизмерения. М.: Радио и связь, 1985. 368 с. 2. V.T. Portman, Y. L. Rubenchik. Uncertainty Assessment of the Geometric Accuracy of the 2D Machined Profile // Proceedings of 4th International Conference on Measurement. 2003. p.p. 447 – 450. 3. ГОСТ 13109-97 Электрическая энергия. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. М.: Изд-во стандартов, 1998. 31 с. 4. Рабинович С.Г. Погрешность измерений. Л.: Энергия, 1973. 262 с. 5. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991. 304 с.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 27.10.2003