



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 06 ” листопада \_\_\_\_\_ 2023 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Ракітянському Дмитру Борисовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Стационарні та критичні точки в системах безпечної життєдіяльності

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель систем безпечної життєдіяльності в критичних точках

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Наумейко І.В.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 53 с., 8 табл., 14 рис., 1 дод., 20 джерел.

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ, АСИМПТОТИКА , ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ, ПЕРШЕ НАБЛИЖЕННЯ, СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЛІНЕАРИЗАЦІЯ.

Об'єкт дослідження – система захисту від шкідливих чинників, модель якої побудована у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Мета роботи – дослідження систем безпечної життєдіяльності в критичних точках.

Метод дослідження – розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром.

В роботі проведено чисельний аналіз критичних режимів систем із захистом від шкідливих впливів. Було отримано чисельний розв'язок для загальної задачі та аналітичний розв'язок рівняння захисту від шкідливого впливу. Для проведення обчислень та виконання графічних зображень результатів було застосовано математичний пакет Mathematica.

## ABSTRACT

Introductory note: 53 pages, 8 tables, 14 figures, 1 appendixes, 20 sources.

CRITICAL POINTS, ASYMPTOTICS, EIGENVALUES, FIRST APPROXIMATION, SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, LINEARIZATION.

Object of research – a system of protection against harmful factors, which model is the system of nonlinear differential equations.

Purpose of work – to study the systems of safety at their critical points.

Methods of research – solving systems of nonlinear differential equations.

In this work, a numerical analysis of critical modes of systems with protection against harmful effects is carried out. A numerical solution for the general problem and an analytical solution to the equation of protection against harmful effects were obtained. The Mathematica software package was used to perform calculations and graphical representations of the results.

## ЗМІСТ

	С.
Вступ .....	7
1 Аналіз предметної області.....	9
1.1 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання систем безпечної життєдіяльності в критичних точках.....	9
1.2 Постановка задач.....	14
2 Вибір і обґрунтування метода розв'язання .....	21
2.1 Математична модель взаємодії забруднення з навколишнім середовищем, що розглядається як модель "хижак-жертва" .....	21
2.2 Найпростіша вірусна модель інфекційного захворювання .....	26
2.3 Подібні моделі поширення епідемій .....	29
2.4 Застосування теореми Тихонова .....	31
2.5 Елементи теорії збурень.....	35
3 Результати обчислювального експерименту .....	41
3.1 Модель 1 .....	41
3.2 Модель 2 .....	43
Висновки .....	48
Перелік джерел посилання .....	50
Додаток А .....	52

## ВСТУП

Промислове виробництво є одним з найважливіших елементів економіки України, але воно також є небезпечним і застарілим. Тому пристрої та системи захисту персоналу та навколишнього середовища є особливо актуальними. Відомо [1], що ефективність виробництва і безпека є суперечливими критеріями. Їх об'єднання в єдиний можливо лише в надсистемі. Завдяки такому підходу ми маємо можливість розглядати модель «людина-машина-середовище з захистом» як модель де є конкуренція двох факторів – безпеки ефективності [2-4].

Спочатку будемо розглядати загальну систему «Людина-Машина-Середовище». Інформацією на вході для даної системи є інформація з системи, що знаходиться вище (інструкції, планові задачі тощо); інформацією на виході системи є результат праці.

Внутрішній стан системи змінюється у процесі функціонування системи. Елемент «людина» розіб'ємо на три функціональні частини:

– Л1 – людина, що управляє «машиною» головним чином для виконання головного завдання системи – виробництва кінцевого продукту, а також для забезпечення можливості цього виробництва; в цьому випадку розглядається програміст;

– Л2 – це людина, яка розглядається з погляду свого безпосереднього впливу на навколишнє середовище за рахунок свого вологовиділення або тепловиділення;

– Л3 – це людина, яка розглядається з погляду її психофізіологічного стану, який обумовлений факторами, що можуть впливати на нього в виробничому процесі; цей елемент вивчається з погляду охорони праці та суміжних дисциплін, будемо вважати стан цього елемента системи як вихідну точку проведеної декомпозиції.

Елемент «машина» виконує дві функції: основну технологічну, яка є впливом на предмет праці, і побічну, яка є зміною параметрів навколишнього середовища. Таким чином, елемент «машина» буде складатись з таких елементів:

– M1 – це елемент, що виконує першу функцію – основну технологічну функцію;

– M2 – це елемент, що виконує другу функцію, тобто впливає на навколишнє середовище і людину.

Нижче, на рисунку 1.1 показана система «Людина-Машина-Середовище», розроблена для відділу ІАЦ. Технічний стан обладнання, яке використовується визнано хорошим, все обладнання знаходиться в експлуатації менше трьох років. Обладнання, яке використовується, відповідає нормам і стандартам техніки безпеки. Спеціальна служба техпідтримки і ремонту обладнання проводить постійний нагляд і необхідний ремонт устаткування, яке експлуатується.

У дипломному проекті розглянуті деякі типи загальних моделей «людина-машина-середовище». Кожна з цих моделей гарно описує деякі практично важливі якості об'єкта, а всі моделі разом описують об'єкт з точки зору його безпечного функціонування [5]. Наступна деталізація моделей призводить до відомих або до деяких нових моделей підсистем [6]. Ця робота присвячена кількісному аналізу системи з захистом при зовнішньому шкідливому впливі.

## 1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ

1.1 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми моделювання систем безпечної життєдіяльності в критичних точках

Як альтернативу для розв'язання задачі про усунення катастрофи виберемо метод розв'язання задачі використовуючи сукупність критеріїв, які характеризують основні властивості процесу рішення [7, 8].

Розглядаються наступні методи вирішення:

- а) чисельний;
- б) аналітико-чисельний;
- в) аналітичний.

За допомогою таких властивостей можна охарактеризувати якість процесу вирішення задачі:

- а) який розрахунковий час;
- б) яка точність рішення (або похибки результату);
- в) яка складність алгоритму (застосовність до комп'ютерних розрахунків, залежність від початкових умов, побудова математичної моделі);
- г) яка форма подання результату;
- д) які ресурси пам'яті комп'ютера (скільки потрібно пам'яті комп'ютера для отримання рішення за допомогою алгоритму).

Будемо використовувати метод аналізу ієрархій для оцінки пріоритетів видів. Для даної задачі ієрархічна модель проблеми вибору методу рішення буде мати вигляд (рисунок 1.1).

Наступний етап – етап аналізу, що полягає в тому, щоб дослідити ступінь впливу вищезазначених показників на вибір відповідного методу. Матриця парних порівнянь властивостей процесі, заповнена судженнями, за шкалою Сааті [9] наведена на рисунку 1.2. Також на цьому рисунку представлено значення відношення узгодженості і вектор пріоритетів.

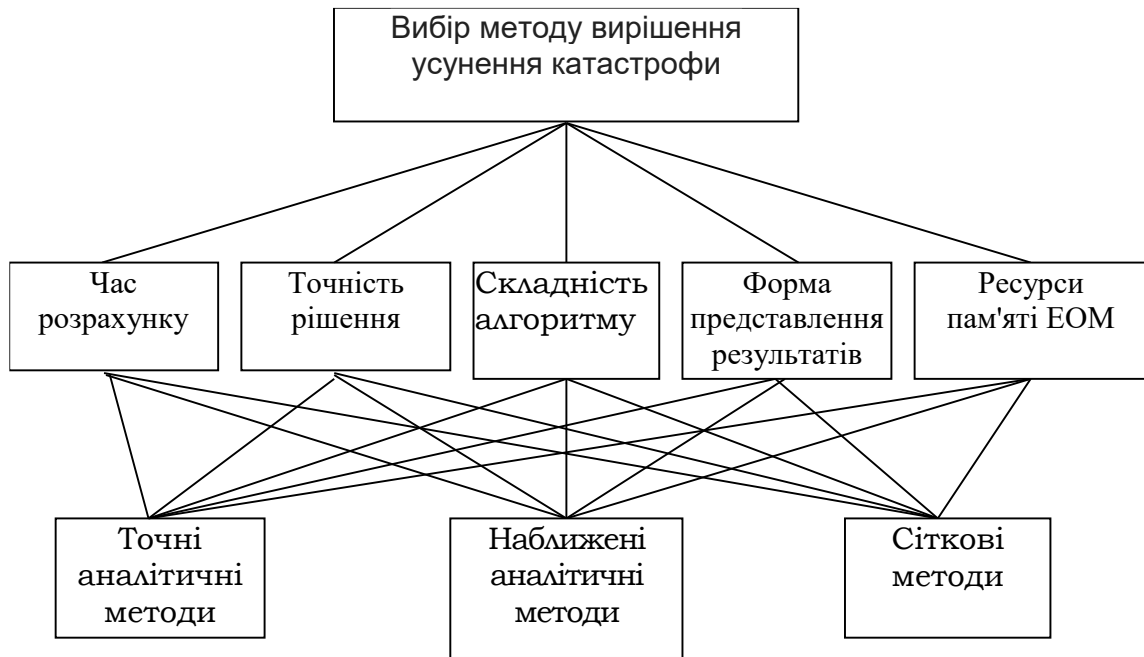


Рисунок 1.1 – Ієрархічна модель проблеми вибору

i\j	1. Время расч	2. Точность	3. Сложность	4. Форма пр	5. Ресурсы
1. Время расч	1	0,2	3	5	6
2. Точность		1	7	7	8
3. Сложность	0,33333	0,14286	1	3	4
4. Форма пр	0,2	0,14286	0,33333	1	2
5. Ресурсы	0,16667	0,125	0,25	0,5	1

Рисунок 1.2 – Матриця парних порівнянь властивостей процесу

Далі для матриці парних порівнянь (рис. 1.2) розрахуємо максимальне власне значення  $\lambda_{\max}$ , відношення узгодженості ВУ і індекс узгодженості ІУ:

$$\lambda_{\max} = 5, \text{ ВУ} = 0,083671, \text{ ІУ} = 0,086432.$$

Дивлячись на вектор пріоритетів, робимо висновок, що найбільше значення дається такій властивості рішення як "точність". Значення ВУ говорить про те, що матриця є узгодженою.

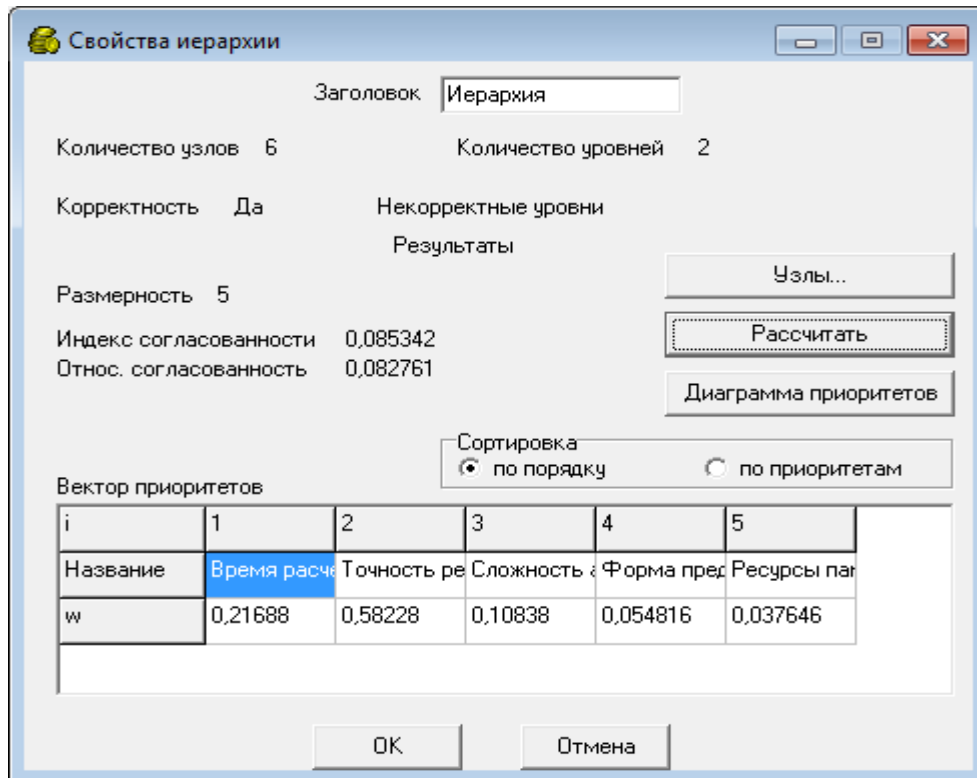


Рисунок 1.3 – Обчислення порівнянь властивостей

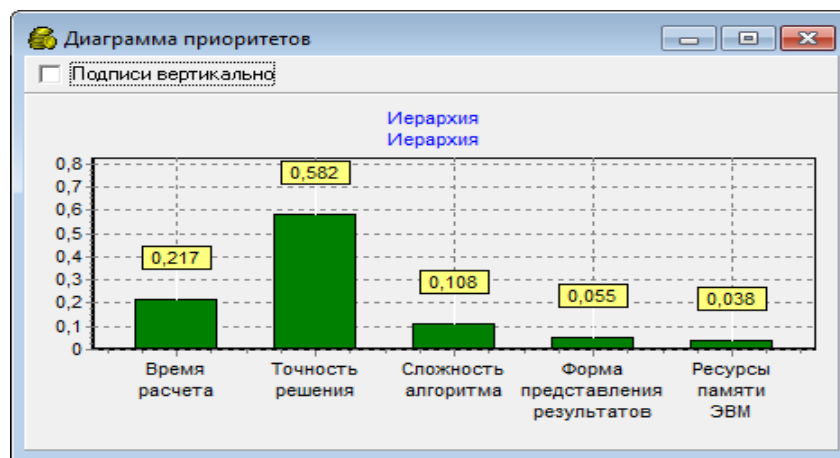


Рисунок 1.4 – Діаграма пріоритетів

Проаналізуємо тепер переваги кожного з розглянутих методів по відношенню до факторів другого рівня. Нижче представлені п'ять матриць парного порівняння і відповідні локальні вектори пріоритетів.

На наступному етапі аналізу зробимо оцінку глобальних пріоритетів. Далі перейдемо до розгляду впливу чинників третього рівня на фактори другого

рівня, тобто проведемо аналіз «ваги» кожного метода відносно кожного фактору другого рівня.

Для цього сформуємо і обробимо п'ять матриць парних порівнянь (табл. 1.2 – 1.6).

Таблиця 1.1 – Розрахунковий час

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	0,3	4	0,1973
2	6	1	8	0,8204
3	0,54	0,134	1	0,0730

Для таблиці 1.1 обчислимо значення  $IУ=0,0432$ ,  $ВУ=0,0661$ .

Таблиця 1.2 – Точність рішення

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	2	7	0,5642
2	0,444	1	5	0,3206
3	0,106	0,35	1	0,0710

Для таблиці 1.2 обчислимо значення  $IУ=0,0357$ ,  $ВУ=0,0451$ .

Таблиця 1.3 – Складність алгоритму

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	0,444	0,175	0,0826
2	2	1	0,156	0,2662
3	9	7	1	0,7532

Для таблиці 1.3 обчислимо значення  $IУ=0,0442$ ,  $ВУ=0,0587$ .

Таблиця 1.4 – Форма подання

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	3	6	0,6795
2	0,4	1	3	0,4431
3	0,1	0,19	1	0,0864

Для таблиці 1.4 обчислимо значення  $IY=0,0132$ ,  $VY=0,0189$ .

Таблиця 1.5 – Ресурси пам'яті комп'ютера

Методи	1	2	3	Вектор пріоритетів
1	1	2	0,212	0,2996
2	3	1	5	0,6684
3	0,444	0,15	1	0,2120

Для таблиці 1.5 обчислимо значення  $IY=0,0087$ ,  $VY=0,0219$ .

Таблиця 1.6 – Вектор локальних пріоритетів фокуса

Розрахунковий час	Точність рішення	Складність алгоритму	Форма подання	Ресурс пам'яті комп'ютера
0,0521	0,0659	0,0451	0,0627	0,6874

Далі проводиться синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених пріоритетів. За допомогою метода парних порівнянь за шкалою Сааті були обчислені вектори глобальних і локальних пріоритетів елементів ієрархічної структури (табл. 1.7 – 1.8).

Отже, враховуючи усі розглянуті фактори перевага віддається аналітичному методу, однак зауважимо, що також високу оцінку має аналітико-чисельний метод.

Таблиця 1.7 – Вектор локальних пріоритетів

Елемент рівня	Вектор пріоритетів		
	Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
Розрахунковий	0,5626	0,1954	0,0599
Точність рішення	0,1319	0,6943	0,2129
Складність алгоритму	0,6603	0,2118	0,0579
Форма подання	0,6785	0,3211	0,0583
Ресурс пам'яті комп'ютера	0,0482	0,6069	0,3268

Таблиця 1.8 – Вектор глобальних пріоритетів

Точні аналітичні методи	Наближені аналітичні методи	Сіткові методи
0,1927	0,2934	0,3040

## 1.2 Постановка задачі

За допомогою моделі Лотки-Вольтери можна описати взаємодію двох видів: популяції жертв і популяції хижаків [10, 11].

Нехай  $P(t)$  – чисельність хижаків, а  $N(t)$  – чисельність жертв для моменту часу  $t$ . Тоді модель Лотки-Вольтери буде мати такий вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bNP, \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cNP, \quad (1.1)$$

де  $a, b, c, d$  – додатні сталі.

Зауважимо, що система рівнянь (1.1) заснована на наступних припущеннях:

– за відсутністю хижаків жертви розмножуються необмежено, відповідно до рівняння  $dN/dt = aN$ , яке іноді називають рівнянням Мальтуса;

– за відсутністю жертв хижаки вимирають, що описується рівнянням  $dP/dt = -dP$ ;

– складові, що пропорційні добутку  $NP$ , можна розглядати як перехід енергії одного джерела в енергію іншого джерела (це ефект впливу однієї популяції – хижаків на іншу – жертв, або результат їх зустрічі, він полягає у зменшенні швидкості приросту  $dN/dt$  кількості жертв на величину  $NP$ , яка пропорційна кількості хижаків).

– Додамо нові змінні

$$u(\tau) = \frac{N(t)}{c}, \quad v(\tau) = \frac{P(t)b}{a}, \quad \tau = ab, \quad y = \frac{c}{d},$$

тоді система рівнянь матиме наступний вигляд

$$\frac{du}{d\tau} = u - uv, \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u - 1).$$

В системі рівнянь (1.1) існує дві нерухомі точки: точка  $(0, 0)$  – це сідло  $i$   $(1, 1)$ , для якої власні значення матриці Якобі  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$  –  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . Це означає, що положення рівноваги (1.1) негіперболічне і немає можливості зробити висновок про його стійкість на основі лінійного аналізу. Фазові траєкторії системи рівнянь є інтегральними кривими рівняння

$$\frac{dv}{du} = v \frac{(u-1)v}{(1-v)u},$$

розв'язок якого

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H. \quad (1.2)$$

Покажемо, що біля рівня (1.2) лінії рівня функції являють собою замкнуті криві, які відповідають періодичним розв'язкам системи рівнянь (1.1) (рис. 1.5). Сталу  $H$  у натуральному вираженні визначають початковими умовами, наприклад такими:  $u(0) = u_0$  і  $v(0) = v_0$

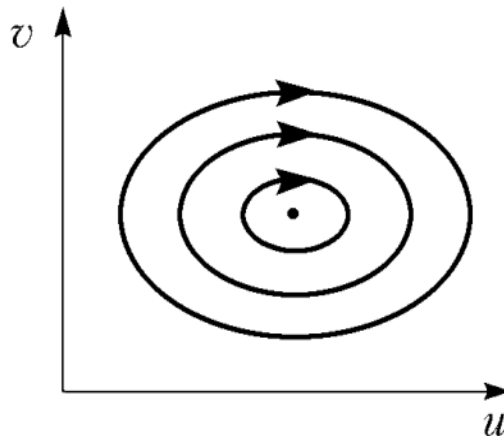


Рисунок 1.5 – Фазові траєкторії, які відповідають співвідношенню (1.3)

Математична модель, яка описується системою рівнянь (1.3), структурно нестійка, тому що мала зміна правих частин може призводити до якісної зміни поведінки рішення. Саме в цьому її основний недолік. Окрім того, з цієї причини важко сказати про збіг теорії з експериментом.

Однією з причин структурної нестійкості моделі є те, що модель є консервативною, іншими словами вона має перший інтеграл. Незважаючи на цей основний недолік моделі, із системи рівнянь (1.1) можна зробити нетривіальні

висновки, підтвержені чисельними спостереженнями. Зокрема, сформульований принцип Вольтери: якщо в системі «хижак-жертва», описаної моделлю (1.2), обидва види винищуються рівномірно, а також пропорційно числу їх індивідумів, то в такому випадку середня кількість жертв зростає, тоді як середня кількість хижаків зменшується.

Отже, згідно з принципом Вольтери, маємо висновок, що в екосистемі «хижак-жертва» більш чутливою до процесу пропорційного зменшення особин в популяції є популяція жертв.

Згідно з термінологією В.І. Арнольда [12], модель називається «жорсткою», якщо вона описується системою рівнянь (1.1). При незначній зміні моделі вона може стати м'якою, наприклад, якщо до правих частин (1.1) додати незначні складові, які враховують, наприклад, конкуренцію хижаків за жертв або жертв за їжу або (конкретні види рівнянь наведені нижче). Отже в загальному вигляді рівняння (1.2) можна переписати таким чином:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bPN + \varepsilon f(P, N), \quad \frac{dP}{dt} = -dP + cPN + \varepsilon g(P, N), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Залежно від незначних поправок  $\varepsilon f(P, N)$  і  $\varepsilon g(P, N)$  можливі такі сценарії, як приведено на рисунку 1.6.

Для розуміння інтерпретації є цікавим рисунок 1.6, б. За Арнольдом, якщо  $N$  – трудящі, а  $P$  – бандити, еволюція системи призводить спочатку до різкого збільшення кількості бандитів, потім до їх майже повного вимирання, тому що вони настільки пограбували трудящих, що вже нічого не можна взяти. В кінцевому рахунку система потрапляє в область таких великих або таких незначних значень  $N$  і  $P$ , що модель стає непридатною, тому що змінюються еволюційні закони. Розглянемо ще декілька більш складних моделей «хижак-жертва».

Система «хижак-жертва», в якій враховано внутрішньовидову конкуренцію:

$$\frac{dP}{dt} = aP \left( 1 - \frac{P}{K_1} \right) - bNP, \quad \frac{dN}{dt} = -dN \left( 1 - \frac{P}{K_2} \right) + cNP. \quad (1.3)$$

На рисунку 1.6 *a* – стан рівноваги стійкий. Це означає, що при будь-яких початкових умовах установлюється воно ж через великий час. На рисунку *б* стан рівноваги *B* нестійкий, тобто в системі йде так званий «рознос». На рисунку *в* в системі з нестійким стаціонарним станом *A* виникає періодичний режим *C* з часом (на відміну від системи (1.1) (див. рис. 1.5))

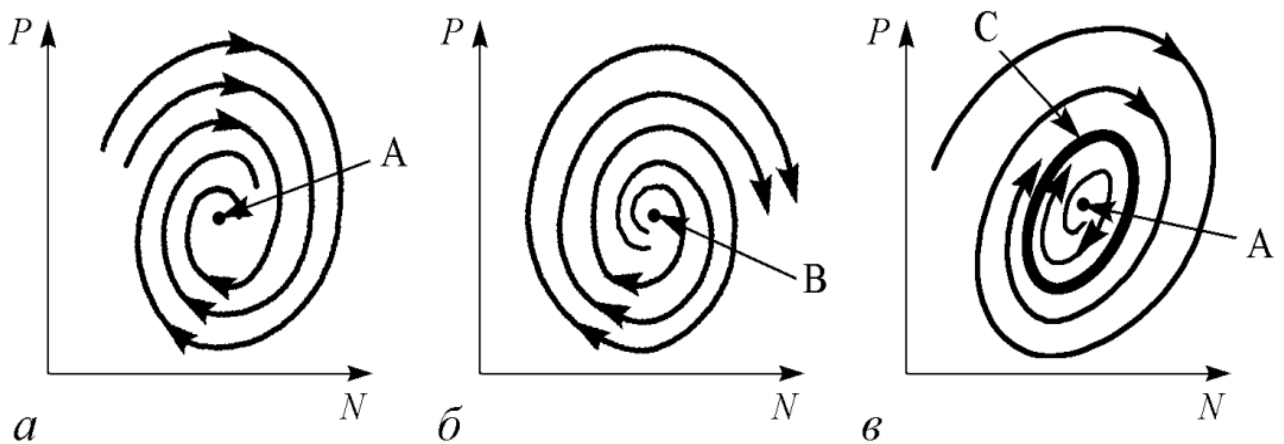


Рисунок 1.6 – Стани рівноваги

відбуваються коливання певної амплітуди, що не залежать від малості відхилення), де  $K_{1,2}$  – потенційні ємності систем. Ці потенційні ємності відповідають граничним значенням чисельності популяцій і визначаються доступною кількістю ресурсів. Дана система рівнянь буде мати наступний вигляд у безрозмірних змінних:

$$\frac{du}{dt} = u(1 - \alpha u - v), \quad \frac{dv}{dt} = u(-\gamma - \beta v + u), \quad (1.4)$$

де

$$N(t) = (a/c)u\tau, \quad P(t) = av(\tau)/b, \quad \alpha = a/(cK_1), \quad \beta = d/(aK_2).$$

Наступна модель – модель конкуренції:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - e N_1 N_2; \quad \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - h N_1 N_2. \quad (1.5)$$

Тут  $r_1, r_2, e, h$  – додатні сталі.

Аналізуючи систему рівнянь (1.5) бачимо, що якщо  $n$  популяцій лінійно залежать від  $m$  ресурсів і якщо  $m < n$ , то принаймні одна з популяцій вимирає.

Ще одна модель – модель мутуалізму:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(r_1 + a_{11}u_1 + a_{12} + u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = u_2(r_2 + a_{21}u_1 + a_{22} + u_2). \quad (1.6)$$

Щоб описати мутуалізм досить зазначити, щоб  $a_{12} > 0, a_{21} > 0$ .

Наприкінці розділу розглянемо модель Лотки-Вольтери, яка є узагальненою і яку можна описати за допомогою системою рівнянь

$$\frac{du}{dt} A(u) - B(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = -D(v) + C(u, v), \quad (1.7)$$

де  $u$  і  $v$  – кількості жертв і хижаків, відповідно,

$A(u)$  – функція розмноження жертв коли відсутні хижаки;

$D(v)$  – функція вимирання хижаків коли відсутні жертви;

функція  $B(u, v)$  описує виведене хижаками жертв;

$C(u, v)$  – функція ефективності споживання хижаками жертв.

Опишемо деякі можливі чинники, що є додатковими, всередині і між популяційних відносин:

– внутрішньовидова конкуренція жертв:  $A(u) = au(1 - u / K)$ .

– нелінійний характер залежності між швидкістю розмноження популяцій жертв і щільністю при малих значеннях щільності:  $A(u) = au_2 / (N + u)$ , де  $a$  і  $N$  – додатні сталі.

– насичення хижаків:  $B_1(u) = bu / (1 + \alpha u)$  – це трофічна функція хижака.

– нелінійний характер поїдання жертв хижаками:  $B_2(u) = bu_1 / (1 + \alpha u)$ .

– нелінійний характер залежності швидкості розмноження хижака від щільності популяції при малих значеннях щільності  $C_2(v) = cv / (Nv + v)$ , при цьому  $C(u, v) = C_1(u)C_2(v)$  і  $C_1(u) = B_1(u)$ ,  $D_2(u) = cv$ . Тоді  $C(u, v) = cv / (Nv + v)B_1(u)$ .

– конкуренція між хижаками за жертв:  $B_2(v) = bv / (1 + \beta v)$ , та  $B(u, v) = B_1(u)B_2(v)$ .

– конкуренція хижаків за будь-які інші ресурси:  $C(v) = v / (1 + v / K_1)$ .

## 2 ВИБІР І ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Математична модель взаємодії забруднення з навколишнім середовищем, що розглядається як модель "хижак-жертва"

Ситуація «забруднення-природа» розглядається як окремий випадок моделі «хижак-жертва», коли забруднення виступає в якості хижака, а природа – в якості жертви. Головне припущення, яке є в основі моделі, зводиться до того, що навколишнє середовище може активно поглинати і переробляти забруднення аж до певної межі [13–15].

Взагалі в системі навколишнє середовище-забруднення можуть бути три принципово різні сценарії взаємодій.

Сценарій 1. Коли є незначні обсяги викидів забруднення довкілля може його повністю переробити (це є стійка ситуація).

Сценарій 2. Коли обсяги викидів забруднення збільшуються, тоді в залежності від випадкових причин і зовнішніх умов навколишнє середовище може знаходитися або в задовільному стані, або може загинути (це є бістабільна ситуація).

Сценарій 3. Третя ситуація відповідає екологічній катастрофі, тобто це повне вимирання природи.

Припустимо, що загальний фон забруднення можна описати концентрацією забруднення  $P$  а стан навколишнього середовища – щільністю біомаси  $E$ . В такому випадку, якщо є постійно діюче джерело забруднення, то тоді процес еволюції забруднення буде описаний рівнянням

$$\frac{dP}{dt} = a - bP, \quad (2.1)$$

де  $a$  – це є потужність джерела забруднення за одиницю часу,

$b$  – це є коефіцієнт природного знищення забруднення (таке знищення ще

називають «мертвим», або називають природної дисипацією). Якщо початкова умова  $P(t=0) = P_0$  тоді рішення рівняння (3.1) матиме вигляд:

$$P(t) = \frac{a}{b} + \left( P_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt},$$

якщо концентрація забруднення зменшується із часом природним чином.

Розглянемо випадок, коли забруднення постійно взаємодіє з навколишнім середовищем, яке очищає його. При цьому будемо вважати, що система «навколишнє середовище-забруднення» є замкнутою. Тоді процес взаємодії з навколишнім середовищем можна описати наступною системою рівнянь:

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - f(\varepsilon, P), \quad (2.2)$$

де функція  $f(\varepsilon, P) \geq 0$  – показує абсорбування і переробку забруднення навколишнього середовища;

$g(E)$  – доданок, який описує динаміку навколишнього середовища коли відсутнє забруднення;

$h(E, P)$  – функція, що описує вплив забруднення на навколишнє середовище.

Візьмемо в якості функцій взаємодії живої природи і забруднення:

$$f(\varepsilon, P) = c\varepsilon P \quad \text{та} \quad h(\varepsilon, P) = d\varepsilon P,$$

де  $c$  і  $d$  – це постійні коефіцієнти.

Будемо вважати, що поведінку навколишнього середовища при відсутності забруднення можна описати за допомогою логістичного рівняння, тобто  $g(\varepsilon) = r\varepsilon(1 - \varepsilon/K)$ , де  $r$  – постійний коефіцієнт, а  $K$  – максимальне значення  $\varepsilon$

при  $d\varepsilon/dt = 0$ . Якщо підставити вирази для  $f(\varepsilon, P)$ ,  $h(\varepsilon, P)$  та  $g(\varepsilon)$  в систему рівнянь (2.2), то тоді отримаємо

$$\frac{dP}{dt} = a - bP - c\varepsilon P, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = r\varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{K}\right) - d\varepsilon P. \quad (2.3)$$

Якщо перейти до безрозмірних змінних в системі рівнянь (2.3):

$$P = \frac{bu}{d}, \quad \varepsilon = \frac{bv}{c}, \quad \tau = bt, \quad \alpha = \frac{ad}{b^2}, \quad u_0 = \frac{r}{b}, \quad p = \frac{r}{cK},$$

то отримаємо просту математичну модель, яка описує взаємодію забруднення і навколишнього середовища у вигляді наступних рівнянь:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - uv, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2. \quad (2.4)$$

Тут бачимо, що система рівнянь (2.3) і є система хижак-жертва, в якій в якості жертви виступає не біологічний об'єкт – забруднення, а біологічно активне довкілля виступає в якості хижака.

В системі рівнянь (2.4) параметр  $\alpha$  можна розуміти як узагальнену потужність джерела забруднення;  $u_0$  – гранично допустиму концентрацію для даної екосистеми (якщо  $u > u_0, dv/dt < 0$ , природа вимирає);  $p$  – коефіцієнт внутрішньовидової концентрації в природі (характеристику екосистеми).

Положення рівноваги системи рівнянь (2.4), які відповідають умовам  $du/dt = 0$  та  $dv/dt = 0$ , можна знайти з рівнянь

$$a - u(1 + v) = 0, \quad -v(u - u_0) - pv^2 = 0.$$

Отже

$$A_1 = (\alpha, 0); A_2 = ((u_0 + p + Q) / 2, (u_0 - p - Q) / (2p));$$

$$A_3 = ((u_0 + p - Q) / 2, (u_0 - p + Q) / (2p)); Q = \sqrt{(u_0 + p)^2 - 4\alpha p}.$$

Зазначимо, що друге і третє положення рівноваги існують, коли  $[(u + p)^2 - 4\alpha p] > 0$ . Якщо провести стандартний лінійний аналіз на стійкість зазначених положень рівноваги, то прийдемо до параметричного виду системи рівнянь (2.3), наведених на рис. 2.1. На рис. 2.2 приведені відповідні фазові портрети системи рівнянь (2.4).

Якщо параметри входять в область IV, то всі траєкторії прагнуть при  $t \rightarrow \infty$  к  $A_3$  за винятком стій-кого різноманіття  $A_1$  (рис. 2.2, а). Фазовий портрет на рис. 2.2, б відповідає області II. В області III є єдиний глобальний аттрактор  $A_1$  (рис. 2.2, в).

Таким чином, математична модель відповідає трьом якісно описаним вище ситуаціям. Проте на початку цього розділу в якості головного припущення було вказано, що модель містить порогову величину забруднення, що може переробити природа. Цей ефект важливо враховувати при побудові математичної моделі.



Рисунок 2.1 – Параметричний портрет системи рівнянь (2.4)

Маючи фіксоване  $u_0$  всю область допустимих параметрів можна розділити на чотири множини.

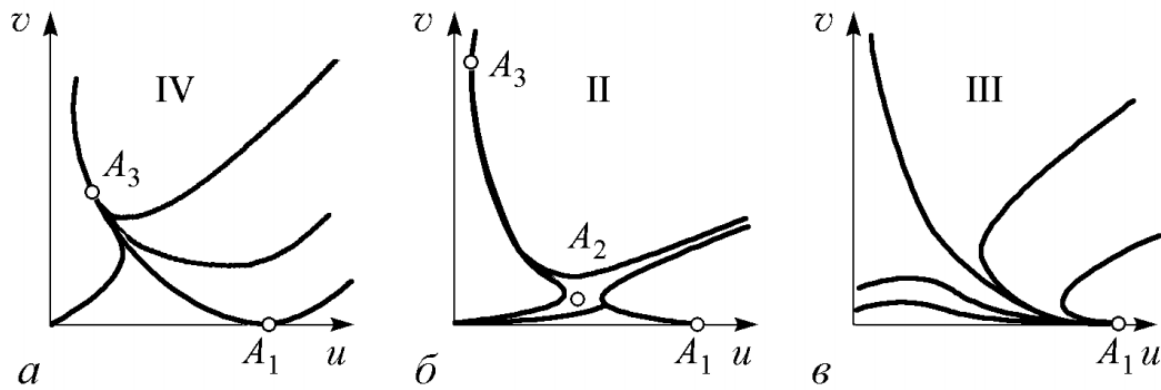


Рисунок 2.2 – Фазові портрети системи рівнянь (2.3)

Потрібно взяти одну з тропічних функцій [15], які описують процес насичення, наприклад:

$$f(\varepsilon, P) = \frac{c\varepsilon P / d}{A + P}. \quad (2.5)$$

Тоді при незначній концентрації забруднення і при високій концентрації  $f(\varepsilon, P) \approx c\varepsilon$ , яке більш реалістичне, ніж було первісне вираження.

Якщо привести системи рівнянь (2.2) до безрозмірного вигляду використовуючи співвідношення (2.5) і переобозначення, то отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{du}{dt} = \alpha - u - \frac{uv}{\lambda + u}, \quad \frac{dv}{dt} = v(u_0 - u) - pv^2, \quad (2.6)$$

де  $\lambda = A(d/b) > 0$  описує ступінь впливу природи на забруднення: чим більше величина, тим менше ступінь поглинання живої природи і навпаки. Параметр  $\lambda$  можна назвати кількісною характеристикою сприятливості даної екосистеми до викидів забруднення.

В системі рівнянь (2.6) можливі або одне, або два, або три стани рівноваги такого ж характеру, як і для системи (2.4) [15].

## 2.2 Найпростіша вірусна модель інфекційного захворювання

В 1974 році Г. Белл описав найпростішу модель імунної реакції, в якій взаємодія між антитілом і антигеном описується в термінах «хижак-жертва».

Покажемо варіант теорії Г. Белла [16], застосовуючи більш загальну модель Г.І. Марчука [17].

В моделі інфекційного захворювання основними факторами є такі фактори:

- концентрація патогенних антигенів  $V(t)$ ;
- концентрація антитіл  $F(t)$ ; антитіла – субстрати імунної системи, які нейтралізують антигени (імуноглобуліни, рецептори клітин тощо);
- концентрація плазмо клітин  $C$ -носіїв і продуцентів антитіл – передбачається постійна концентрація плазмо клітин  $C$ -носіїв і продуцентів антитіл;
- не враховується ступінь ураження органу мішені.

Антигени – це чужорідні клітини, які проникають в організм людини. Зазначимо, що рівняння, яке описує зміну кількості антигенів буде мати наступний вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV. \quad (2.7)$$

Перший доданок в цьому рівнянні – це швидкість приросту антигенів за рахунок їх розмноження;  $\beta$  – коефіцієнт розмноження антигенів; доданок  $\gamma FV$  описує число антигенів, які нейтралізовані антитілами  $F$  в одиницю часу;  $\gamma$  – коефіцієнт, який пов'язаний з імовірністю нейтралізації антигену антитілами коли вони зустрічаються один з одним.

Щоб отримати друге рівняння обчислимо баланс числа антитіл, які реагують з антигеном. Будемо мати

$$dF = \rho C dt - \eta \gamma F V dt - \mu_f F dt. \quad (2.8)$$

Перший термін у правій частині рівняння (2.8) визначає виробництво антитіл плазмовими клітинами за час  $dt$ ;  $\rho$  – це швидкість утворення антитіл плазмою клітки. Другий доданок ( $\eta \gamma F V dt$ ) описує зменшення кількості антитіл внаслідок їх зв'язку з антигенами, при цьому  $\eta$  антитіл припадає на нейтралізацію одного антигену. Третя складова ( $\mu_f F dt$ ) показує зменшення кількості антитіл внаслідок процесу старіння;  $\mu_f$  – це коефіцієнт, який є обернено пропорційним часу розпаду антитіл. Якщо розділивши рівняння (2.8) на  $dt$ , отримаємо

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V) F. \quad (2.9)$$

Якщо при  $t < t_0$   $V(t) \equiv 0$ , то початкові умови будуть мати вигляд

$$V(t_0) = V_0, \quad F(t_0) = F_0. \quad (2.10)$$

Нехай надалі  $t_0 = 0$ .

Розгляньмо два крайових випадки розвитку хвороби. Припустимо, що організм не генерує антитіла даного типу. Тоді з (2.7) випливає, що

$$\frac{dV}{dt} = \beta V \quad \text{и} \quad V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad (2.11)$$

де  $V_0$  – доза зараження (початкова концентрація антигенів) при  $t = 0$ . Зрозуміло, що такий сценарій відповідає розвитку хвороби із смертельним наслідком, оскільки відсутні компенсуючі механізми для зниження концентрації антигенів. Другий граничний випадок полягає в тому, що в організмі присутні антитіла, спроможні знищити всі антигени, які потрапляють в організм, незалежно від механізму утворення антитіл. У цьому випадку у

рівнянні (2.7) Припускаючи дозу зараження  $V_0$  малої, можна вважати величину  $F$  постійної, яка визначається нормальним рівнем антитіл  $F^*$ . Тоді рівняння (2.7) має вигляд

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \lambda F^*)V,$$

і тоді його розв'язок можна представити таким чином:

$$V = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}.$$

У граничному випадку, тобто коли  $B = 0$

$$V = V_0 e^{-\gamma F^* t}, \quad (2.12)$$

що відповідає високому рівню імунологічного бар'єру.

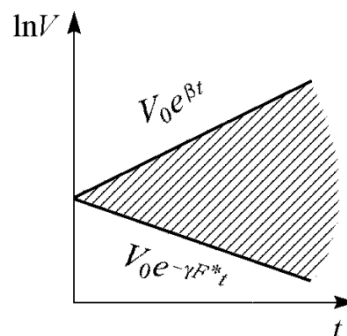


Рисунок 2.3 – Область захворювань, обмежена розв'язками для двох граничних випадків

Розв'язки (2.11) і (2.12) відображені на рисунку 2.3. З встановленими значеннями коефіцієнтів моделі і початковими умовами природно, що всі різноманітні динаміки захворювання вкладаються в заштриховану область на рисунку 2.3.

### 2.3 Подібні моделі поширення епідемій

Розглянемо SIR-модель Кермак-Маккендрік, припускаючи, що особини популяції можуть перебувати в трьох станах:

–  $S(t)$  – здорові особини, які входять до групи ризику і можуть підхопити інфекцію;

–  $I(t)$  – заражені переносники хвороби;

–  $R(t)$  – особини, які одужали і перестали поширювати хворобу (це можуть бути ті, хто отримав імунітет або, наприклад, померли).

Типову еволюцію особини можна описати діаграмою  $S \rightarrow I \rightarrow R$ .

Побудуємо феноменологічну модель, яка відповідає діаграмі. Для цього будемо використовувати такі припущення:

а) популяція має сталу суму  $N$  і є замкнутою;

б) проміжок часу, протягом якого хвора людина залишається небезпечною для оточуючих, розподілений за експоненціальним законом з середнім  $1/\gamma$ ;

в) контакти є випадковими і рівно можливими (однорідне перемішування).

При таких припущеннях будемо матим:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda S, \quad \frac{dI}{dt} = \lambda I - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

де  $\lambda$  – так звана сила інфекції, що в даному випадку дорівнює добутку кількості контактів в одиницю часу, виконаних однією здоровою особою (позначимо це як  $cN$ ), ймовірності передачі інфекції при контакті  $p$  і ймовірності зустріти хворого  $I(t)/N$ . Позначимо  $\beta = cp$ . Тоді отримаємо  $\lambda = \beta I$  і тоді отримаємо стандартні форми рівнянь:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0, S(t) + I(t) + R(t) = N. \quad (2.13)$$

Третє рівняння в цій системі надлишкове і може бути виключене, тому що  $dS / dt \leq 0$ , то будемо вважати фазовим простором трикутник  $S(t) + I(t) \leq N$ .

З першого і другого рівнянь системи (2.13) випливає, що

$$\frac{dI}{dS} = \frac{(\beta S - \gamma)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\sigma}{S}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta}, \quad I \neq 0. \quad (2.14)$$

Враховуючи початкові умови  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$ , обчислимо перший інтеграл  $I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0$ , за допомогою якого далі можна побудувати фазові криві на площині  $(S, I)$  (рисунок 2.4).

Постановка задачі для аналізу зараження вірусом комп'ютерів [14]. Нехай  $S$  – кількість комп'ютерів, які піддаються зараженню вірусом,  $I$  – частка комп'ютерів, які заражені вірусом і не мають антивірусного програмного забезпечення,  $R$  – частка комп'ютерів, які мають належний антивірусний захист (імунітет). Тоді рівняння моделі будуть мати вигляд (див. систему рівнянь (2.13)):

$$\frac{dS}{dt} = -aSI, \quad \frac{dI}{dt} = aSI - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI.$$

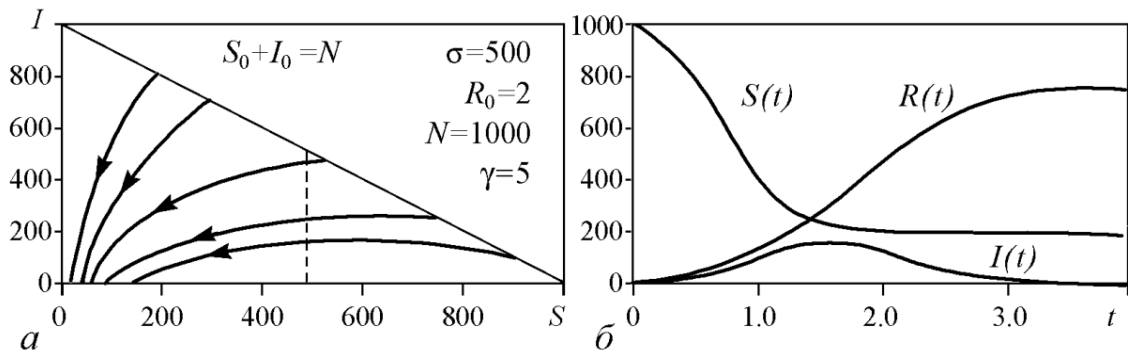


Рисунок 2.4 – Приклад конкретного розрахунку за рівняннями (2.13) і (2.14)

Основна ідея модифікації такої класичної моделі епідемії зводиться до введенні елемента циклічності, тобто такого елемента, який регулює додавання нових заражених комп'ютерів. Протягом кожного нового відрізка часу кількість інфікованих комп'ютерів розраховується на основі кількості інфікованих комп'ютерів, які залишилися з попереднього моменту, і кількість комп'ютерів, які схильні до епідемії, розглядається як випадкова величина з розподілом Пуассона.

$$\rho_m = (\lambda^m / m!)e^{-\lambda}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Розв'язок задачі має наступний вигляд. Треба побудувати графік функції  $I(t)$ , вирішуючи наведену вище систему рівнянь з початковими умовами  $S(0) = 100$ ,  $I(0) = 1$ ,  $R(0) = 0$ ,  $\lambda = 10$ ,  $a = 0.23$ ,  $b = 0.5$ . чисельними методами. Додавання нових елементів треба проводити при  $t_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 100$ .

## 2.4 Застосування теореми Тихонова

В роботі А.М. Тихонова (1952) було дано математично строге обґрунтування застосування методу квазістаціонарних концентрацій (редукції системи відповідно до ієрархії часів) і формулювання умов його застосовності [18].

Розглянемо найпростіший випадок двох диференціальних рівнянь.

$$\frac{dx}{dt} = \phi(x, y), \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (2.15)$$

Нехай  $x$  – швидка змінна,  $y$  – повільна змінна,. Отже відношення збільшень  $dx$  и  $dy$  за короткий проміжок часу  $dt$  багато менше одиниці  $dx / dy \ll 1$ .

Швидкість зміни  $x$  значно перевищує швидкість зміни  $y$ , а значить праву частину першого рівняння можна сформулювати так:

$$\phi(x, y) = AF(x, y), \text{ де } A \gg 1.$$

Перше рівняння системи тоді представимо у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = AF(x, y).$$

Якщо розділити ліву і праву частину рівняння на  $A$  і позначити  $\varepsilon = 1/A$ , то тоді отримаємо повну систему рівнянь, яка тотожна вихідній:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = F(x, y), \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (2.16)$$

де  $A \gg 1$  – незначний параметр.

Якщо характер рішення залишається незмінним при прямуванні значень малих параметрів до нуля (ці обставини і є суть теореми Тихонова), то можна направити  $F(x, y)$  до нуля і отримати для «швидкої» змінної  $x$  алгебраїчне рівняння замість диференціального.

$$F(x, y) = 0, \frac{dy}{dt} = G(x, y). \quad (2.17)$$

Відзначаючи від повної, таку систему називають виродженою. Фазовий портрет такої системи представлений на рисунку 2.12.

Фазові траєкторії в будь-якій точці фазової площини, за винятком околиці кривої  $F(x, y) = 0$  мають нахил, який можна визначити за допомогою рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \approx \varepsilon \ll 1,$$

тобто вони мають майже горизонтальне розташування. Це області швидких рухів, при яких  $y = \text{const}$ , а  $x$  швидко змінюється вздовж фазової траєкторії. Коли досягне за однією з таких горизонталей околиці кривої  $F(x, y) = 0$ , зображена точка буде рухатися по цій кривій.

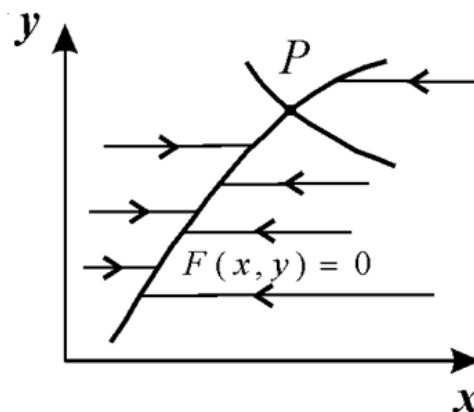


Рисунок 2.12 – Фазовий портрет системи (2.17)

Швидкість руху по горизонтальних ділянках траєкторії  $dx/dt \gg 1/\varepsilon = A$ , тобто вона є дуже великою, якщо її порівнювати зі швидкістю руху в околиці кривої  $F(x, y) = 0$ . Отже, лише характером руху вздовж цієї кривої визначається загальний час досягнення якогось стану на кривій  $F(x, y)$ . Це

означає, що такий час не залежить від початкових значень швидкої змінної  $x$ , а залежить лише від початкових значень повільної змінної  $y$ .

Зауважимо, що квазістаціонарні значення швидких змінних є результатом не остаточних стаціонарних значень повільних змінних, а лише їх миттєвих значень. У цьому контексті говорять про те, що швидка змінна "підпорядкована" повільній.

За допомогою теореми Тихонова встановлюються умови редукції системи диференціальних рівнянь з малим параметром (тобто іншими словами, умови заміни диференціальних рівнянь алгебраїчними для швидких змінних).

Тепер покажемо систему  $N$  рівнянь, з яких частина рівнянь містить малий параметр перед похідною.

$$\varepsilon \frac{dx_p}{dt} = F_p(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N), \quad (2.18)$$

$$\frac{dx_q}{dt} = F_q(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N). \quad (2.19)$$

Назвемо систему (2.18) приєднаною, а систему (2.19) виродженою.

Рішення повної системи (2.18) – (2.19) може наближатися до рішення виродженої системи (2.19), якщо будуть виконуватися наступні умови:

а) якщо розв'язок повної і приєднаної системи єдиний, а праві частини неперервні;

б) розв'язок  $x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, x_r = \phi_r(x_1, x_2, \dots, x_N)$  є ізольованим коренем алгебри  $F_p(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N) = 0$ ,  $p = 1, \dots, r$  (тобто в околі цього кореня не існує інших коренів);

в) розв'язок  $x_1, x_2, \dots, x_r$  – стійка ізольована особлива точка приєднаної системи (2.18) при всіх значеннях  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_N$ ;

г) початкові умови  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0$  знаходяться в області впливу стійкої особливої точки приєднаної системи.

Число початкових умов в системі, що виникає при редукції, менше, ніж в початковій системі: початкові значення швидких змінних не враховуються у виродженій системі. Згідно з теоремою Тихонова, при виконанні умови в), результат не залежить від початкових умов для змінних приєднаної системи.

Отже, необхідною умовою для редукції є наявність малого параметра в рівняннях (2.18). Цікавою є система двох диференціальних рівнянь виду (3.18), в якій особлива точка розташована на нестійкій гілці кривої  $F(x, y) = 0$ . Така система виконує коливальні релаксаційні рухи.

Теорему Тихонова використовують явно чи неявно при аналізі практично будь-яких моделей динамічних систем.

## 2.5 Елементи теорії збурень

Термін "теорія збурень" у теорії звичайних диференціальних рівнянь [19] використовується в двох сенсах: у широкому значенні для позначення теорії, яка досліджує загальні питання залежності рішень від параметрів, і у вузькому сенсі для теорії, присвяченої дослідженню можливостей розкладання в ряди за ступенями малого параметра. Останню часто називають асимптотичною теорією збурень.

Загальна постановка задачі має наступний вигляд. Будемо розглядати диференціальне рівняння

$$x' = f(t, x, \varepsilon) \quad (2.20)$$

з малим параметром  $\varepsilon$ . Для зручності будемо розглядати лише задачу Коші для такого рівняння:

$$x(0) = x_0. \quad (2.21)$$

Нехай задача (2.20)–(2.35) має розв'язок  $\varphi(t, \varepsilon)$  при кожному  $\varepsilon$ .

Припустимо, що функція  $\varphi(t, \varepsilon)$ , яку розглядаємо, виявилася аналітичною по  $\varepsilon$  (це означає, що, наприклад, відповідно до теореми Пуанкаре про розкладанні,  $\varphi(t, \varepsilon)$  аналітична, якщо функція  $f$  аналітично залежить від своїх аргументів). Тоді ми можемо представити цю функцію у вигляді ряду

$$\varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \dots, \quad (2.22)$$

а тоді часткові суми цього ряду апроксимують розв'язок  $\varphi(t, \varepsilon)$  як завгодно точно. Зазначимо, що у загальному випадку ряд (2.36) зовсім не обов'язково сходиться. Його часткову суму

$$\psi_k(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^k\varphi_k(t) \quad (2.23)$$

називають формальним асимптотичним рішенням завдання (3.20)–(3.21),

$$\psi'_k(t, \varepsilon) - f[t, \psi_k(t, \varepsilon), \varepsilon] = O(\varepsilon^{k+1}) \quad (2.24)$$

та  $\psi_k(0, \varepsilon) = x_0$ . Якщо ж, додатково вказати, що

$$\varphi(t, \varepsilon) - \psi_k(t, \varepsilon) \equiv r_{k+1}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad (2.25)$$

то кажуть, що функція  $\psi_k(t, \varepsilon)$  є асимптотичним рішенням завдання (2.22)–(2.23) порядку  $k$ . Якщо  $\psi_k(t, \varepsilon)$  є асимптотичним рішенням для будь-якого  $k$ , то ряд (2.24) називається асимптотичним розкладанням, або асимптотикою рішення  $\varphi$  за малим параметром. У загальному випадку немає потреби, щоб асимптотичний розклад збігався до розв'язку, і тому нев'язка  $r_k(t, \varepsilon)$  при фіксованому  $k$ , не обов'язково прямує до нуля при  $k \rightarrow \infty$ .

Стверджується тільки, що для кожного фіксованого  $k$  ця нев'язка прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , як  $\varepsilon^{k+1}$ .

Основна задача теорії збурень збігається до можливості побудови асимптотики рішень звичайних диференціальних рівнянь з параметром. Диференціальні рівняння, якими задовольняють члени  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , асимптотик, зазвичай виявляються істотно простішими, ніж вихідні рівняння. Властивість асимптотичних розкладів дозволяє ефективно вивчати поведінку рішень при малих  $\varepsilon$ , навіть якщо асимптотичні ряди часто не сходяться. На сучасному етапі чисельні методи успішно доповнюють асимптотичні методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь.

Дуже легко вирішується питання про існування асимптотичних розкладів в разі гладкої залежності  $f$  від  $\varepsilon$ . Наприклад, з теореми про ліпшіцевості оператора зсуву випливає наступне: якщо  $f$  задовольняє умові Ліпшиця по  $x$  і  $\varepsilon$ ,  $\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + r_1(t, \varepsilon)$ , де  $\varphi_0$  – є рішенням задачі при  $\varepsilon = 0$ , а  $r_1$  задовольняє умові Ліпшиця по  $\varepsilon$ , отже, зокрема,  $\|r_1(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon$ .

Отже, у цьому випадку  $\varphi_0$  є асимптотикою нульового порядку розв'язку задачі (або ще говорять про головний член асимптотики). Теорема про диференціювання оператора зсуву дозволяє у випадку, коли  $f$  має похідні, задовольняють умові Ліпшиця по сукупності змінних  $x$  і  $\varepsilon$ , побудувати асимптотику першого порядку:

$$\psi_1(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t).$$

У цій асимптотичній розкладанні  $\varphi_0$  залишається таким самим, як і вище, а  $\varphi_1$  є розв'язком відповідного рівняння варіацій. Точно так само, теорема про існування старших похідних розв'язків по параметру дозволяє вивести і обґрунтувати асимптотику старших порядків. Це означає виведення кінцевої суми ряду Тейлора і оцінку залишкового члена функції  $\varphi_k(t) = \partial^k \varphi(t, \varepsilon) / \partial \varepsilon^k |_{\varepsilon=0}$ , які визначаються з відповідних рівнянь у варіаціях. Ці рівняння легко виводяться

за допомогою наступної формальної процедури. Формальний ряд підставляється в рівняння та початкові умови, формально розкладають праву частину рівняння в ряд Тейлора за  $\varepsilon$  в точці  $\varepsilon = 0$  і прирівнюють коефіцієнти при однакових ступенях  $\varepsilon$  в отриманих формальних рядах. Це призводить до системи звичайних диференціальних рівнянь для коефіцієнтів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , а також до відповідних початкових умов.

$$x' + a(t) + \varepsilon b(t)x^2 = c(t), x(0) = 0.$$

Ця ситуація стає істотно складнішою у випадку так званих сингулярно-збурених рівнянь (більш правильно говорити про сингулярно-збурені задачі). Ці терміни включають різні класи рівнянь з параметрами, в яких розв'язки залежать від значення параметра не регулярним чином. Найпростішим прикладом такого рівняння може бути рівняння  $\varepsilon x' = -x$  з малим параметром  $\varepsilon$ . Його спільне розв'язання  $Ce^{-t/\varepsilon}$  є неаналітичним (сингулярним), оскільки воно залежить від  $\varepsilon$  в точці  $\varepsilon = 0$ .

Нижче ми покажемо лише деякі особливості асимптотик сингулярно-збурених задач, скориставшись прикладом задачі Коші.

$$\varepsilon x' = -x - e^t, \tag{2.26}$$

$$x(0) = 1, \tag{2.27}$$

Розв'язок завдання (2.26) – (2.27), якщо припустити параметр  $\varepsilon$  малим і позитивним матимете вигляд:

$$\phi(t, \varepsilon) = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{1}{1 + \varepsilon} e^t. \tag{2.28}$$

Тепер спробуємо представити розв'язок (2.24) у вигляді ряду (2.26). Підставляючи (2.36) в (2.40) а також зрівнюючи коефіцієнти, що стоять при однакових ступенях  $\varepsilon$ , отримаємо:

$$\varphi_0(t) = -e^t, \quad \varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = -e^t, \quad \varphi_3(t) = e^t,$$

Таким чином, ряд (5) збігається до функції  $\frac{e^t}{1+\alpha}$ . Тобто ряд збігається до другого члену в розв'язку, який представляє розв'язок виродженого рівняння (нульового порядку) при  $\varepsilon = 0$ . Відзначимо дві обставини, які між собою тісно пов'язані. По-перше, отримана сума не відповідає початковій умові (зверніть увагу, що при знаходженні функції це не було потрібно), і, по-друге, у отриманому розкладі невідомі апроксимуються першим членом розкладу, наявність якого виробляє "зайвий" ефект для виродженого рівняння початковою умовою. Також слід відзначити, що перший член у розв'язку поза малими околами нуля, тобто за межами прикордонного шару, швидко – з експоненційною швидкістю – зникає. Отже, отриманий ряд апроксимує розв'язок на відрізках типу  $[\delta, T]$  ( $\delta > 0$ ).

Для побудови рівномірного на  $[0, T]$  асимптотичного розкладу помітимо, що "прикордонний шар" частини розв'язку  $\varphi(t, \varepsilon)$  задачі регулярно залежить від агрегату  $t/\varepsilon$ , взятого як єдине ціле. Це дозволяє нам представити розв'язок  $\varphi(t, \varepsilon)$  у вигляді  $\Phi(t, t/\varepsilon, \varepsilon)$  і також дозволяє спробувати розкласти функцію  $\Phi(t, \tau, \varepsilon)$  в ряд за ступенями  $\varepsilon$  (маючи на увазі в подальшому, що  $\tau = t/\varepsilon$ ). Наприклад, у такому вигляді:

$$\Phi(t, \tau, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \dots + \pi_0(\tau) + \varepsilon\pi_1(\tau) + \varepsilon^2\pi_2(\tau) + \dots \quad (2.43)$$

Підставивши, як і раніше, (2.43) в рівняння (2.40) і використовуючи початкову умову (2.41), а також прирівнюючи коефіцієнти при однакових

ступенях  $\varepsilon$  (зрозуміло, окремо розглядаючи функції, які залежать від незалежного в даному контексті аргументу  $\tau$  і незалежного аргументу  $t$ ), отримуємо наступне сімейство рівнянь:

$$\varphi_0(t) = -e^t, \quad \pi'_0(\tau) = -\pi_0(\tau), \quad \varphi_0(0) + \pi_0(0) = 1,$$

$$\varphi_1(t) = -\varphi'_0(t), \quad \pi'_1(\tau) = -\pi_1(\tau), \quad \varphi_1(0) + \pi_1(0) = 0,$$

$$\varphi_2(t) = -\varphi'_1(t), \quad \pi'_2(\tau) = -\pi_2(\tau), \quad \varphi_2(0) + \pi_2(0) = 0,$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

Отже маємо

$$\begin{aligned} \phi(t, \varepsilon) &= \Phi\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = -e^t + \varepsilon e^t - \varepsilon^2 e^t + \dots + 2e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \varepsilon e^{\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} - \dots = \\ &= -e^t(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots) + e^{\frac{t}{\varepsilon}}[2 + \varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots)] = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{1}{1 + \varepsilon} \varepsilon^t. \end{aligned}$$

Отже, ми успішно склали розклад у вигляді (2.43) для вирішення задачі (2.40) – (2.42).

Члени  $\pi_0, \pi_1, \dots$  отриманого розкладу вважаються погранслайними, оскільки вони швидко (в даному випадку з експоненційною швидкістю) зменшуються віддалено від початкової точки і не є дуже малими зблизька від неї. Члени  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  вважаються регулярними, оскільки вони меншою мірою визначаються початковою точкою і залишаються значимими на великих відстанях від неї.

### 3 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

#### 3.1 Модель 1

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z(t)' = \gamma u(t), \varepsilon \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

де  $z(t)$  – інтенсивність роботи динамічної захисної системи

$u(t)$  – інтенсивність негативного впливу.

Якщо  $z(t) \gg u(t)$ , то

$$\begin{cases} u(t)' = \alpha u(t) - \beta \varepsilon \cdot z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z(t)' = \gamma u(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Далі зробимо підстановку  $u' = \frac{z''}{\gamma}$  і  $u = \frac{z'}{\gamma}$  в перше рівняння системи (3.1)

$$\frac{z''}{\gamma} = \frac{\alpha z'}{\gamma} - \beta z \frac{z'}{\gamma}, \quad z'' = \alpha z' - \frac{\beta}{2} (z^2)'$$

Далі перевизначимо змінні ( $z = z'$ ). Отже отримаємо нове диференціальне рівняння

$$z' = \alpha z - \frac{\beta}{2} z^2 + c, \quad z(0) = z_0, \quad (3.3)$$

де  $c$  – деяка константа.

Початкова умова обумовлює стаціонарний захист (екран). Рівняння можна розв'язати аналітично. Розв'язком рівняння буде функція

$$z = \frac{1}{\beta} \left( \alpha - \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} t \sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta} + \operatorname{arctg} \left( \frac{a - z_0 \beta}{\sqrt{-\alpha^2 - 2c\beta}} \right) \right) \right). \quad (3.4)$$

Щоб визначити вартість захисту слід використати функцію

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z - z_0) dt + C_0,$$

де  $z_0$  – величина стаціонарного захисту;

$c_0$  – вартість стаціонарного захисту;

$c(z)$  – функція вартості, яка може мати вигляд:

а)  $c(z) = z$ ;

б)  $c(z) = z^2$ ;

в)  $c(z) = z \ln(z)$ .

Тепер проінтегруємо, взявши за  $T=6.5$  (це час, за який захист системи прийме значення менше, ніж  $z_0$ ) і покажемо отримані результати:

а)  $c(z) = z$ ;  $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 73 + 1200 = 1273$ ;

б)  $c(z) = z^2$ ;  $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 544 + 1200 = 1744$ ;

в)  $c(z) = z \ln z$ .  $\tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 221.33 + 1200 = 1421.33$ .

## 3.2 Модель 2

Розглянемо іншу систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z'(t) = \gamma u(t) - \delta z(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Якщо  $z(t) \gg u(t)$ , то

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha u(t) - \beta \varepsilon \cdot z(t)u(t), \\ \varepsilon \cdot z'(t) = \gamma u(t) - \delta \varepsilon \cdot z(t), \varepsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.5) не має аналітичного розв'язку в загальному вигляді. Функції  $z(t)$  і  $u(t)$  були отримані за допомогою пакету Mathematica [20] у вигляді інтерполяційних функцій, що представляє чисельне рішення системи (3.5).

Далі визначимо її стаціонарні точки,  $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ ,  $(0,0)$ . Для цього прирівняємо ліві частини до 0 при будь-яких значеннях параметрів  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

$$\begin{cases} 0 = \alpha u - \beta z u, \\ 0 = \gamma u - \delta z. \end{cases} \quad (3.7)$$

Модель (3.5) є імітаційною і дозволяє інтерактивно підбирати необхідні параметри захисту, наприклад, так.

На рисунку 3.1 зображено фазовий портрет системи (3.5), якщо взяти для визначеності такі значення параметрів системи  $\alpha = 0.4, \beta = 0.3, \gamma = 0.5, \delta = 2$  і стаціонарний захист  $z_0 = 11$  з вартістю  $C_0 = 1100$ .

Як бачимо з фазового портрета, система прямує до стану  $z = 1.3$ ,  $u = 5.3$ , але інтервал часу, протягом якого вона перейде в малу околицю стійкого стану –  $t = 16$  є неприйнятним для нашого випадку, якщо ми приймемо, що обов'язковою є умова  $t = 8$  – тобто робоча зміна. А значить необхідно збільшити рівень впливу захисту.

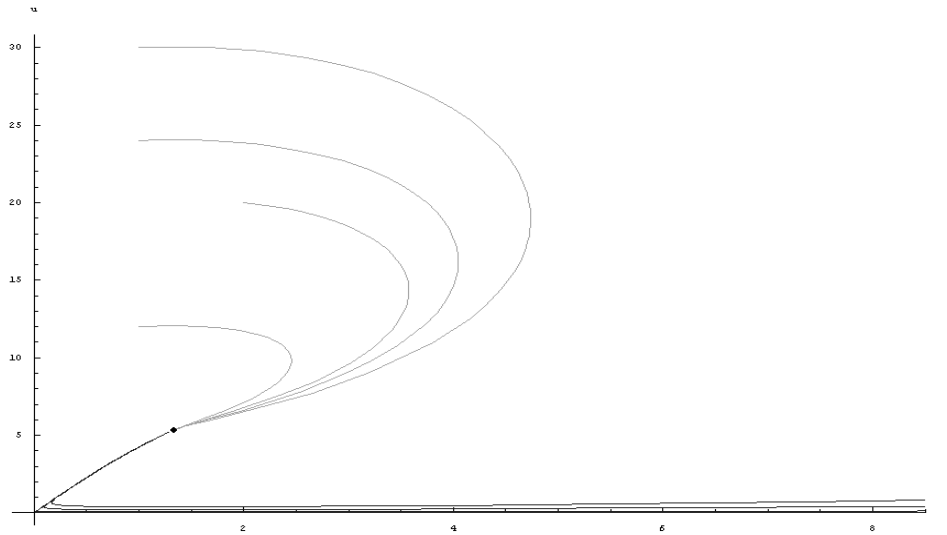


Рисунок 3.1 – Фазовий портрет системи (3.7)

Збільшимо для цього параметр  $\beta$ . Візьмемо для нашої системи  $\beta = 0.31$ . Це позначиться на вартості стаціонарного захисту у бік її збільшення. Вартість стаціонарного захисту дорівнює  $C_0 = 1320$ . На рисунку 3.2 зображено фазовий портрет зміненої системи (3.5).

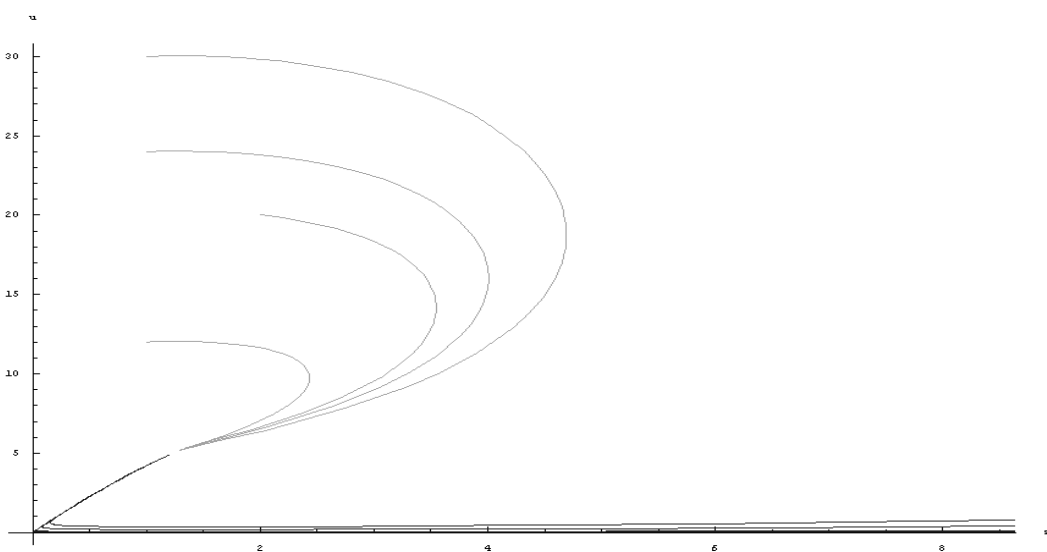


Рисунок 3.2 – Фазовий портрет системи (3.5)

Як бачимо система прагне до стану  $z=1,29, u=5,16$ , але інтервал часу, за який система прагне до стійкого стану все ще є неприйнятним для нашого випадку. Отже, для досягнення більшої стійкості системи, необхідно збільшити рівень впливу. Цього разу візьмемо  $\beta=0.4$ . І візьмемо цього разу вартість нашого стаціонарного захисту рівній  $C_0=2400$ . На рисунку 3.3 зображено фазовий портрет зміненої системи. Тепер система прагне до стану  $z=1, u=4$ . Інтервал часу, за який система переходить в околицю сталого стану  $t=7.5 < 8$  є допустимим для нашого випадку. Зробимо обчислення вартості системи захисту. Для цього скористаємось емпіричними функціями вартості:

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 34.32 + 2300 = 2343.42;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 861.41 + 2300 = 3421.31;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 213.16 + 2300 = 2063.96.$$

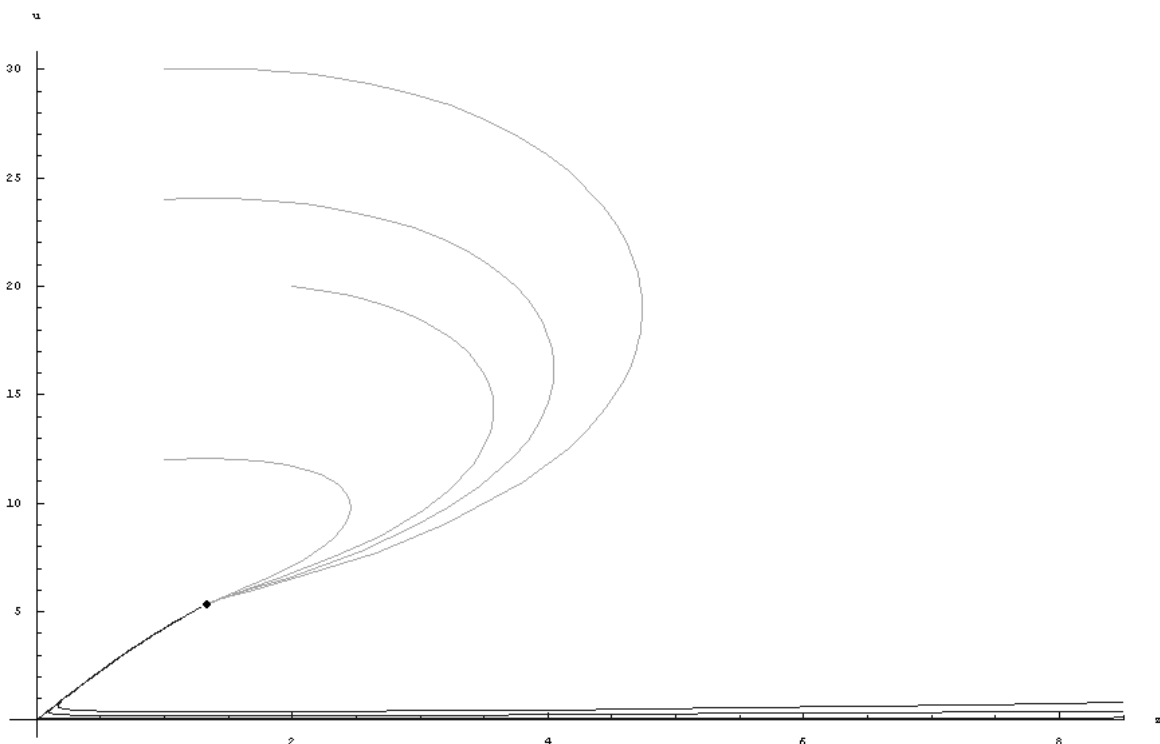


Рисунок 3.3 – Фазовий портрет системи (3.5)

Будемо розглядати поведінку системи в околах її стаціонарних точок.

Поглянемо на ситуацію, де відсутній шкідливий чинник, і захист не активований - це відповідає штатному режиму.

Лінеаризуємо систему (3.5). Для цього скористаємось формулою

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dz} & \frac{dF}{du} \\ \frac{dG}{dz} & \frac{dG}{du} \end{pmatrix}_{(x,y)},$$

де  $(x, y)$  – стаціонарна точка,

$F, G$  – функції з правої частини системи,

Для знаходження власних значень лінеаризованої системи розв'яжемо рівняння  $\det |A - \lambda E| = 0$ .

$$\det |A - \lambda E| = \det \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}_{(0,0)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

$$-\lambda(\gamma - \lambda) + \alpha\delta = 0. \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta}).$$

Для того, щоб стаціонарна точка була вузлом, необхідно  $\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\delta} \geq 0$  або  $\gamma \geq 2\sqrt{\alpha\delta}$  для випадку, коли  $\alpha\delta > 0$ .

Давайте проаналізуємо власні значення. Наразі ігноруємо залежність від  $\beta$  на даному етапі. Розглянемо, як змінюється поведінка системи залежно від параметра  $\alpha$ .

Припустимо  $\alpha > 0$  і також для визначеності будемо брати  $\delta > 0, \gamma > 0$ , тоді  $\lambda_{1,2} > 0$  для  $0 \leq \alpha \leq \frac{\gamma^2}{4\delta}$ .

Отримаємо в точці  $(0,0)$  для системи нестійкий вузол. В такому випадку маємо катастрофу, тобто захист не справляється.

Нехай  $\alpha < 0$  і для визначеності  $\delta > 0, \gamma > 0$ , тоді  $\lambda_{1,2} < 0$  для будь-яких  $\alpha < 0$ . Для системи (3.5) в точці  $(0,0)$  будемо мати стійкий вузол, що нам і було потрібно.

Тепер розглянемо другу стаціонарну точку  $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ .

Лінеаризуємо систему і знайдемо її власні значення.

$$\det |A - \lambda E| = \det \left| \begin{pmatrix} -\beta u & \alpha - \beta z \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}_{\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \det \left| \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\delta}{\gamma} - \lambda & 0 \\ -\delta & \gamma - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0.$$

$$-\left(\frac{\alpha\delta}{\gamma} + \lambda\right)(\gamma - \lambda) = 0, \lambda_1 = \gamma, \lambda_2 = -\frac{\alpha\delta}{\gamma}.$$

Нехай  $\alpha > 0$  і для визначеності нехай  $\delta > 0, \gamma > 0$ , тоді  $\lambda_1\lambda_2 < 0$  для  $\alpha > 0$ .

Ми отримали сідло для системи у стаціонарній точці  $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ .

Нехай  $\alpha < 0$  і для визначеності нехай  $\delta > 0, \gamma > 0$ , тоді  $\lambda_{1,2} > 0$  для  $\alpha < 0$ .

Ми отримали нестійкий вузол для системи у стаціонарній точці  $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}\right)$ .

Зауважимо, що обидва випадки є неприйнятними з погляду безпеки діяльності і життя.

А значить єдиним прийнятним розв'язком для системи (3.5) буде розв'язок в точці  $(0,0)$  із значенням  $\alpha < 0$  для визначеності  $\delta > 0, \gamma > 0$ , тоді  $\lambda_{1,2} < 0$  для будь-яких  $\alpha < 0$ .

## ВИСНОВКИ

У даній роботі проведено чисельно-аналітичне дослідження критичних режимів нелінійних динамічних систем з урахуванням зовнішнього впливу та системи захисту. Була здійснена оптимізація витрат на захист системи при обмеженнях на її якість. Розрахунки вартості захисту були проведені у математичному пакеті Mathematica.

В цій роботі було розглянуто різні типи загальних моделей ЛМС. Кожна модель адекватно описує певний практично важливий аспект об'єкта. Всі ці моделі разом становлять опис об'єкта з точки зору його безпечного функціонування. Особлива увага у роботі приділена кількісному аналізу важливої моделі ЧМС - системи з захистом в умовах зовнішнього негативного впливу.

Знайдені формули та числові значення для інтенсивності захисту дозволяють визначити його вартість у відносних одиницях.

$$\tilde{C}(T) = \int_0^T c(z - z_0) dt + C_0.$$

Для першої моделі це

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 67 + 1300 = 1363;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 634 + 1300 = 1634;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 331.33 + 1300 = 1521.33$$

а для другої

$$\text{а) } c(z) = z; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 43.42 + 2300 = 2343.42;$$

$$\text{б) } c(z) = z^2; \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 861.31 + 2300 = 3521.31;$$

$$\text{в) } c(z) = z \ln z. \quad \tilde{c} = \int_0^T c(z(t) - z_0) dt + C_0 = 193.96 + 2300 = 2543.96.$$

Окрім отримання рішень у закритому аналітичному вигляді та їх дослідження, цей підхід дозволив отримати реальні оцінки вартості захисту. Навіть можливість зменшення цієї вартості спостерігається при умові, що інтенсивність шкідливого фактора  $u$  не є більшою за порогове значення динамічного захисту  $c(z(t) - z_0) = 0$ .

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Hoppensteadt F. Predator-prey model // Scholarpedia. 2006. 1 (10). P. 1563.
2. Наумейко И., Аль-Рефай В. А.
3. Наумейко И., Стельмашук В. І. Дослідження динамічних режимів системи захисту об'єкта в умовах впливу шкідливих факторів // Науковий вісник Чернігівського національного технологічного університету. 2012. №1 (64). С. 3–9.
4. Brauer F., Castillo-Chavez C. Mathematical Models in Population Bi-ology and Epidemiology. Springer-Verlag, 2000. 201 p.
5. Lotka A. Elements of mathematical biology. Baltimore : Dover Pubns, 1957. 457 p.
6. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. Москва : МЦНМО, 2004. 32 с.
7. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва : Радио и связь, 1993. 282 с.
8. Дорогобед А. Н., Кобрунов А. И. Практическое руководство по изучению пакета Wolfram Mathematica. Ухта : УГТУ, 2015. 90 с.
9. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
10. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т.31 (73), №3. С. 575–586.
11. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : ИЛ, 1958. 474 с.
12. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии и медицине. Москва: Наука, 1985. 239 с.

13. Братусь А. С., Мещерин А. С., Новожилов А.С. Математические модели взаимодействия загрязнений с окружающей средой // Вычислительная математика и кибернетика, 2001. Т. 6. 140 с.

14. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. Москва : Физматлит, 2010. 400 стр.

15. Inozemtsev G. Scientific and technical preconditions of electric field application at plants protection // ECONTechMOD. An International Quarterly Journal. 2012. V. 1. № 1, 47–50.

16. Alexeev I., Voloshyn O. Formation of Compensation Mechanism of Regional Enterprises' Human Resources Regeneration in the Labor Potential Development System // Econtechmod. An International Quaterly Journal. 2013. V. 2, № 3. P. 3–8.

17. Наумейко И., Аль-Рефай В. А. К вопросу анализа критических режимов систем с динамической защитой от вредных воздействий // 2-я Междунар. научно-техн. конференция ИСТ-2013, 16–22 сентября 2013 г. Евпатория, 2013. С. 12.

18. Наумейко И. В. Критические точки динамической модели распределенных вредных факторов // материалы Междунар. научно-техн. конференции ИСТЭ-2011, 1–6 окт. 2011 г. Харьков-Ялта. С. 60–61.

19. Наумейко И., Аль-Рефай В. А.

20. Наумейко И., Стельмащук В. І., Сердюк Н. Н. Моделювання взаємодії людини з техногенною системою в умовах впливу шкідливих чинників // Вісник Чернігівського національ