УДК 519.62

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ КОНЪЮКТИВНЫХ И СМЕШАНЫХ СИСТЕМ И ИХ ГРАФОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Л. Г. Ситник

Сумы, Сумской областной институт последипломного педагогического образования

В статье рассматриваются алгебраические методы решения систем логических уравнений конъюнктивного и смешанного типа, основанные на теории логических определителей. Получен общий вид решений таких систем и предложена интерпретация решений с помощью языка теории графов.

КОНЪЮНКТИВНАЯ СИСТЕМА, ДИЗЪЮНКТИВНО-КОНЪЮНКТИВНАЯ СИСТЕМА, ДЕДИЗЪЮНКЦИЯ, ИНТЕРПРЕТИРУЮЩИЙ ГРАФ

Введение

Данная статья является продолжением работы [1] на случай конъюнктивных и смешанных систем. Для них с использованием аппарата логических определителей построенные частные и общие решения, показана принципиальная разрешимость таких систем. Используются интерпретации на языке теории графов.

1. Система конъюнктивных уравнений

В графовой интерпретации дизъюнктивной системы (см. формулу (3) из [1]) каждой переменной сопоставлялась вершина, наделенная функцией дизъюнкции от значений вершин-соседей, связанных с ней единичными заходящими дугами. Пусть теперь каждая вершина интерпретирующего графа G будет наделена функцией конъюнкции, то есть будет принимать единичное значение, если все ее соседи уже наделены единичными значениями. Систему уравнений, сопоставляемую такому графу, будем называть конъюнктивной.

Будем пользоваться записью булевой степени x^a, означающей

$$x^a = \begin{cases} 1, a = 0 \\ x, a = 1 \end{cases}. \qquad (1)$$

Тогда каждое уравнение конъюнктивной системы можно представить в виде:

$$x_i = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}} b_i, i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

где знаки конъюнкции опущены [2].

Систему (2) будем условно изображать в матричной форме как

$$X = X^A B, \qquad (3)$$

где A – матрица показателей степеней переменных из X, объединяемых в (2) знаками конъюнкции.

Решение системы (2), как и дизъюнктивной системы (см. формулу (3) из [1]), неоднозначно. Поэтому среди прочих будем выделять 0-решения и 1-решения, имеющие тот же смысл, что и при решении дизъюнктивной системы. Найдем их.

Записи (1) соответствует эквивалентная форма $(x \vee \overline{a})$, а поэтому, перейдя от (2) к двойственной системе относительно $\overline{x}_i$, с помощью теоремы 1 из [1] получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Система конъюнктивных уравнений (2) имеет единственное 1-решение X^1:

$$x_i^1 = \bigcap_{j=1}^{n} b_j^{\left|A_{ji}^{(1)}\right|}, i = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

На графе G определитель $\left|A_{ji}^{(1)}\right|$ интерпретируется объединением всех путей, исходящих из вершин x_j и заканчивающихся вершиной x_i. Следовательно, значением переменной x_i^1 в 1-решении системы (2) будет конъюнкция всех b_j, из которых существует хотя бы один путь в вершину x_i, то есть справедливо следующее соотношение:

$$x_i^1 = \bigcap_{b_j \in B_i} b_j, B_i \subset B, i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

где B_i - множество всех истоков, из которых существуют пути в x_i на графе G; B - множество всех истоков, а $x_i^1 = 1$, если $B_i = \varnothing$.

Для интерпретации 1-решения на графе G в терминах его окраски удобно использовать не конъюнктивный принцип, определяемый (5), а «дизъюнктивный», приняв истоки с нулевой краской за определяющие. Тогда в нулевой цвет должны перекраситься все те вершины, у которых хотя бы одна соседняя уже окрашена в нулевой цвет.

Под однородной конъюнктивной системой (2), в которой в отличие от дизъюнктивной $b_j = 1, j = \overline{1,n}$.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 2. Любое частное решение системы (2) может быть представлено покомпонентной конъюнкцией ее 1-решения и одного из решений, соответствующей ей однородной системы.

Любое решение однородной системы (2) может быть найдено с помощью G_0 тем же путем, что и решение однородной дизъюнктивной системы (см. теорему 2 из [1]) , с той лишь разницей, что вершинам с петлями в графе G_c произвольным образом могут присваиваться не единичные, а нулевые значения. Множество всех частных решений системы (2), найденных указанным путем, и составляет ее общее решение.

Любое частное решение однородной системы (2) может быть найдено через его базисные решения, порождаемые вектором «автонулей» с компонентами:

$$x_l = \bigcap_{k=1}^{n} a_k l^{\left|A_{kl}^{(1)}\right|} = \left|\widehat{A}_l^0\right|, l = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Тогда любое частное решение однородной системы (2_0) суть покомпонентная конъюнкция любых наборов следующих базисных решений x_l^0 с компонентами:

$$x_{0i}^{(l)} = \left|\widehat{A}_l^0\right|^{\left|A_{li}^{(1)}\right|}, i = \overline{1,n},$$

Покомпонентная конъюнкция всех базисных решений является 0-решением однородной системы (2).

Для однородной системы конъюнктивных уравнений справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Однородная система конъюнктивных уравнений, соответствующая системе (2) , имеет единственное 0-решение X_0^0:

$$x_{0i}^0 = \bigcap_{l=1}^{n}\left(\bigcap_{k=1}^{n} a_{kl}^{\left|A_{kl}^{(1)}\right|}\right)^{\left|A_{li}^{(1)}\right|}, i = \overline{1,n}.$$

Если граф G ацикличен, то в нем не могут возникать «автонули», и, следовательно, имеют место:

Следствие 1. Интерпретирующий систему (2) граф G ацикличен, если и только если 0-решение, соответствующее однородной системе, представлено только единичными компонентами.

Следствие 2. Если интерпретирующий систему (2) граф G ацикличен, то она имеет единственное решение, совпадающее с 1-решением (0-решением).

Следствие 3. Интерпретирующий систему (2) граф G ацикличен, если и только если все компоненты вектора автонулей единичны:

$$\left|\widehat{A}_l^0\right| = 1, l = \overline{1,n}.$$

2. Дизъюнктивно-конъюнктивная система уравнений

Рассмотрим теперь случай системы, которая может включать в себя как дизъюнктивные уравнения, так и конъюнктивные:

$$\begin{aligned} x_i &= a_{i1}x_1 \vee a_{i2}x_2 \vee \ldots \vee a_{in}x_n \vee b_i, i = \overline{1,l}, \\ x_j &= x_1^{a_{j1}} x_2^{a_{j2}} \ldots x_n^{a_{jn}} b_j, j = \overline{l+1,n}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Назовем такую систему уравнений дизъюнктивно-конъюнктивной

Соответствующий интерпретирующий граф G будет содержать дизъюнктивные вершины $x_i, i = \overline{1,l}$ и конъюнктивные вершины $x_j, j = \overline{l=1,n}$. Такой граф можно представить как результат объединения нескольких графов $G^{(k)}$, в которых каждая дизъюнктивная вершина имеет только одну заходящую дугу. Каждый из таких графов можно трактовать как сугубо конъюнктивный, полагая, что дизъюнктивная вершина с одной заходящей дугой эквивалентна такой же конъюнктивной вершине. Будем называть графы $G_\nu^{(k)}, \nu = \overline{1,r}$ конъюнктивными составляющими графа G, а процедуру разложения графа G на конъюнктивные составляющие будем называть его дедизъюнкцией. Соответственное представление исходной системы (7) в виде r систем конъюнктивных уравнений также будем называть ее дедизъюнкцией [2]. Эти системы будем называть конъюнктивными составляющими дедизъюнкции системы (7). Имеет место следующая лемма.

Лемма. Для всякого решения системы (7) найдется конъюнктивная составляющая ее дедизъюнкция, допускающая тоже решение.

Доказательство этой леммы строится на той же основе, что в графе G можно у дизъюнктивных вершин, принявших нулевое значение, оставить любую одну заходящую дугу, а у принявших единичное значение оставить только одну заходящую дугу, связанную с любой из вершин, также принявших единичные значения.

Используя дедизъюнкцию системы (7) можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. 0-решение (1-решение) системы (7) есть покомпонентная дизъюнкция 0-решений (1-решений) конъюнктивных составляющих ее дедизъюнкций.

Доказательство этой теоремы основывается на том, что ни 0-решения, ни 1-решения конъюнктивных составляющих не могут иметь больше единичных компонент, чем исходная система, и эти компоненты не могут быть новыми. А то, что 0-решение и 1-решение исходной системы совпадает с каким-либо из решений конъюнктивной составляющей, определяется сформулированной выше леммой.

Следствие 4. Если интерпретирующий систему (7) граф G ацикличен, то он имеет единственное решение, совпадающее с 0-решением (1-решением).

При проверке графа G на ацикличность нет необходимости учитывать свойства его вершин (дизъюнктивность, конъюнктивность). Достаточно лишь исследовать матрицу A, используя следствие 3 или следствие 4, эквивалентные в силу их двойственности.

Пример 1. Для построения графов $G_\nu^{(k)}$ можно воспользоваться следующей процедурой. Пусть вместо матрицы A система представлена D-матрицей, отображающей дизъюнктивные связи, и K-матрицей, отображающей конъюнктивные связи в графе G. Например :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним лексикографическую дизъюнкцию D-матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee$$
$$\vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходящий граф представим следующим набором конъюнктивных графов (см. рис.1) с матрицами смежностей:

$$G_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, G_2^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_3^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, G_4^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

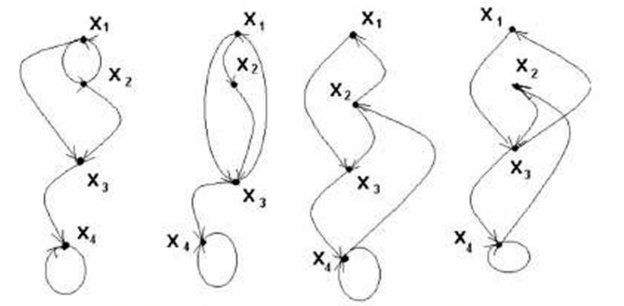

Рис.1. Набор конъюнктивных графов

Теперь можно убедиться, что соответствующие этим графам системы уравнений имеют только нулевые решения при любых *B*, и, следовательно, 0-решение в этом примере при любых *B* также нулевое.

Пример 2. (использование решения как формулы). В системах с искусственным интеллектом предметная область зачастую представляется семантической сетью в виде И-ИЛИ-графа, в котором вершинам типа ИЛИ сопоставляются понятия, а вершинам типа И – отношения (модули), отображающие одни понятия в другие. Если одно и то же понятие может быть сформулировано различными модулями, то в соответствующую ему вершину типа ИЛИ будут заходить несколько дуг.

В СС решаются различные задачи, в том числе :

– выводимо (вычислимо) ли требуемое понятие по заданному множеству исходных понятий;

– какие из модулей принимают участие в конкретном выводе.

Для этой цели СС сопоставим граф, в котором дизъюнктивные вершины отмечаются именами понятий, а конъюнктивные – именами отношений.

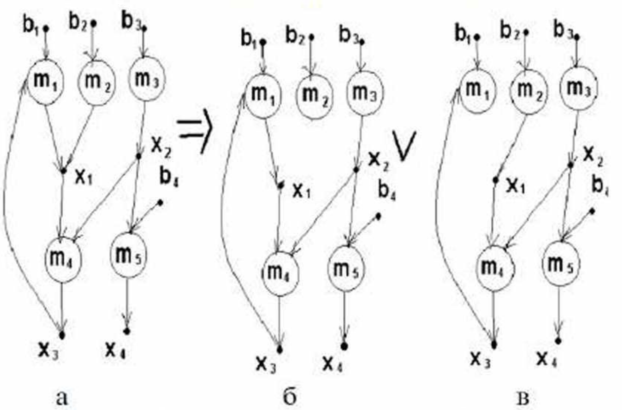

Рис.2. Структура семантической сети:
а – граф семантической сети;
б, в – конъюнктивные компоненты графа

На рис. 2а представлен такой граф, причем точками изображены дизъюнктивные вершины, а кружочками – конъюнктивные. После дедизъюнкции этого графа получим две его конъюнктивные компоненты $G_1^{(k)}$ и $G_2^{(k)}$ (рис. 2б и 2в), потенциально содержащие различные варианты решений задач на СС.

Конъюнктивные компоненты преобразуем в интерпретирующие графы G_1 и G_2 следующим образом.

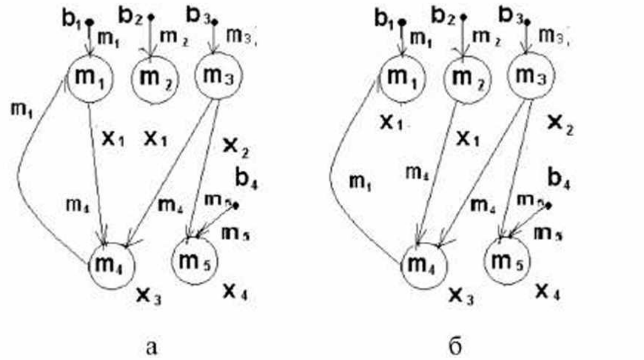

Рис.3. Интерпретирующие графы:
а – связь $m_1 \rightarrow m_4$; б – связь $m_2 \rightarrow m_4$

Имена отношений приписываются дугам, заходящим в конъюнктивные вершины, дизъюнктивные вершины исключаются, их именами помечаются предшествующие дизъюнктивным вершинам (рис.3а и 3б). При таком построении некоторые из конъюнктивных вершин будут помечены одними и теми же именами понятий. Поэтому матрицы смежности для полученных графов будем записывать относительно уникальных индексов, сопоставленных вершинам модулей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_4 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_4 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где дуги представляются приписанными им именам модулей, причем значение $m_i = 1, i = \overline{1,5}$. Пусть названные выше задачи решаются относительно понятий x_3 и x_4 , или, что то же, относительно m_4 и m_5 Ответы на поставленные вопросы можно получить, найдя 0-решения для графов G_1 и G_2. Но так как G_1 содержит цикл, включающий m_4, то он не может быть использован для вывода m_4. Остается использовать G_1, для которого получим:

$$x_3 = (m_1 b_1)^0 (m_2 b_2)^{m_4} (m_3 b_3)^{m_4} (m_5 b_4) = (m_2 b_2 m_3 b_3)^{m_4},$$

$$x_4 = (m_1 b_1)^0 (m_2 b_2)^0 (m_3 b_3)^{m_{54}} (m_5 b_4)^{m_5} = (m_3 b_3 m_5 b_4)^{m_{54}}.$$

Таким образом, x_3 вычислимо, если определены b_2 и b_3 , а участвуют в вычислениях модули m_2, m_3 и m_4 . Для вычисления x_4 достаточно определить b_3 и b_4, а в вычислениях участвуют модули m_3 и m_5.

Решения систем логических уравнений, рассмотренные в данной работе и статье [1], были реализованы программно. Если проанализировать соответствующие формулы решений, то не сложно заметить, что для их программной реализации необходимо вычислить булев определитель. Решение данной задачи может быть реализовано по следующему алгоритму.

Шаг 1. Ищется элемент определителя $A(i, j)$ равный 1 и запоминается номер его строки и столбца.

Шаг 2. Осуществляется поиск 1 в столбце $j+1$ и во всех строках, кроме i-той. Если единичный элемент отсутствует, то определитель равен нулю, в противном случае шаг 2 повторяется до тех пор, пока не будет найдена последовательность из n единиц, каждая из которых стоит в отдельном столбце и отдельной строке. Это означает, что булев определитель равен 1.

Выводы

В статье предложен метод решения конъюнктивных и смешанных систем логических уравнений матричными методами, позволивший применять известные аналитические методы решения линейной алгебры (аналог метода Крамера). Разработан общий алгоритм нахождения решения систем логических уравнений и его графоаналитическая интерпретация.

Для частных случаев решения систем логических уравнений предложены понятия: «0-решение» и «1- решение» этих систем, позволяющие представить в компактном виде структуру общего решения.

Список литературы: **1.** *Ситник Л. Г., Шабанов-Кушнаренко С. Ю.* Решение систем дизъюнктивных уравнений методом логических определителей // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал.– 2008.– №1(68). **2.** *Чистов В. П.* Аналитические решения логических уравнений // Техническая кибернетика (Изв. АН СССР).– 1994.– № 2.– С. 219–224.

Поступила в редколлегию 18.02.2009

УДК 519.62

Розв'язання систем кон'юнктивних і змішаних систем та їх графова інтерпретація / Сітнік Л. Г. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал.– 2009.– №1(70).– С. 64–67.

У статті розглядається питання про розв'язання систем логічних рівнянь за допомогою логічних визначників. Знайдено вигляд розв'язків даних систем і запропонована інтерпретація з використанням теорії графів.

Іл.: 3. Бібліогр.: 2 найм.

UDK 519.62

Decision of the systems of the conjunct and mixed systems and their graphs interpretation / Sitnik L. G. // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2009. – №1(70).– P. 64–67.

In the article a question is about the decision of the systems of logical equations through logical determinants. The general view of decisions of these systems is found and interpretation with the use of theory of graphs offered.

Fig.3.: Ref.: 2 items.