

АНАЛИЗ САМОПОДОБНЫХ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ДИСКРЕТНОМ ВЕЙВЛЕТ- ПРЕОБРАЗОВАНИИ

КИРИЧЕНКО Л.О., ДЕЙНЕКО Ж.В.

Проводится численный анализ возможностей метода мультифрактального анализа, использующего дискретное вейвлет-преобразование. Тестовыми данными являлись модельные реализации самоподобных и мультифрактальных процессов. Показывается, что сигналы, от-

раженные от зондируемого слоя атмосферы, имеют фрактальную структуру, которая зависит от высоты.

1. Введение

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. В частности, в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами, определения возраста геологических пород; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ, при исследовании мутаций и изменений на генетическом уровне; в экономи-

ке – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов. Этот список далеко не полон [1-5].

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов и обладают одним показателем скейлинга. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром скейлинговых показателей.

Одним из самых популярных инструментов мультифрактального анализа является метод максимумов модулей непрерывного вейвлет-преобразования (ММВП) [6,7]. Он базируется на вейвлет-анализе, который называют «математическим микроскопом» из-за способности сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Поскольку вейвлет-функции локализованы по времени и частоте, метод ММВП является мощным инструментом статистического описания нестационарных процессов.

Однако использование непрерывного вейвлет-преобразования приводит к избыточному представлению вейвлет-спектра и сравнительно невысокой скорости выполнения. Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) обеспечивает достаточно информации, являясь вместе с тем экономным по числу операций и по требуемой памяти. ДВП выполняется с помощью кратномасштабного анализа, который приводит к иерархической и быстрой схеме вычисления вейвлет-коэффициентов [8]. В работах французских исследователей P. Abry и P. Flandrin [5,9,10] предложен метод мультифрактального анализа, основанный на скейлинговых свойствах вейвлет-коэффициентов ДВП.

Целью представленной работы является численное исследование метода мультифрактального анализа, использующего ДВП, на различных моделях самоподобных и мультифрактальных процессов и применение его для анализа экспериментальных данных.

2. Самоподобные и мультифрактальные процессы [2-4,6]

Стохастический процесс $X(t)$ является самоподобным с параметром самоподобия H , если процесс $a^{-H}X(at)$ описывается теми же конечномерными законами распределений, что и $X(t)$:

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\{a^{-H}X(at)\}, \quad \forall a > 0, t > 0.$$

Параметр H , называемый показателем Херста, представляет собой меру самоподобия и меру длительности долгосрочной зависимости стохастического процесса.

Для самоподобного процесса начальные моменты можно описать формулой

$$M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH-1}, \quad (1)$$

где величина $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$.

Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются обобщенным показателем Хёрста $h(q)$, величина которого определяется параметром q .

Мультифрактальные процессы проявляют более гибкие скейлинговые закономерности для моментных характеристик. В отличие от монофрактальных самоподобных процессов, где все моменты

$M\left[|X(t)|^q\right]$ показывают одинаковое масштабное поведение, для мультифрактальных процессов выполняется отношение

$$M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qh(q)-1}, \quad (2)$$

где $h(q)$ – обобщенный показатель Херста, являющийся нелинейной функцией, для которой $H = h(2)$.

3. Кратномасштабный вейвлет-анализ [8,9,11]

Основная идея кратномасштабного вейвлет-анализа заключается в том, что разложение ряда производится по ортогональному базису, образованному сдвигами и кратномасштабными копиями вейвлетной функции. Базисные функции $\psi(t)$ называются вейвлетами, если они удовлетворяют ряду условий, в частности, определены на пространстве комплекснозначных функций с ограниченной энергией, колеблются вокруг оси абсцисс, быстро сходятся к нулю и имеют нулевой момент первого порядка.

Произвольная функция $s(t)$ может быть разложена по

вейвлет-базису $\psi_{m,k}(t) = a^{\frac{m}{2}} \psi(a^m t + k)$ с параметрами масштаба a и сдвига k :

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{m,k} \psi_{m,k}(t), \quad (3)$$

где коэффициенты вейвлет-спектра $S_{m,k}$ определяются скалярным произведением

$$S_{m,k} = \langle s(t), \psi_{m,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{m,k}(t) dt. \quad (4)$$

В дискретном вейвлет-преобразовании параметры масштаба и сдвига задаются обычно в виде степенных функций: $a = 2^{-m}$, $k = k_0 \cdot 2^{-m}$, $m, k_0 \in Z$. Дискретные вейвлеты используются, как правило, в паре со свя-

занными с ними дискретными скейлинг-функциями. Скейлинг-функции имеют с вейвлетами общую область задания и определенное соотношение между значениями. При заданных материнском вейвлете ψ и соответствующей скейлинг-функции φ аппроксимирующие коэффициенты $\text{apr}(j, k)$ и детализирующие коэффициенты $\text{det}(j, k)$ ДВП для процесса $X(t)$ определяются следующим образом:

$$\text{apr}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\varphi_{j,k}(t)dt, \quad \text{det}(j, k) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\psi_{j,k}(t)dt, \quad (5)$$

где j – параметр масштаба, k – параметр сдвига ($j, k \in Z$) и

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k); \\ \psi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k). \end{aligned} \quad (6)$$

Кратномасштабный анализ, выполняемый с помощью ДВП, заключается в разбиении исследуемого временного ряда на две составляющие: аппроксимирующую и детализирующую, с последующим аналогичным дроблением аппроксимирующей до заданного уровня декомпозиции сигнала. Временной ряд $X(t)$ представляется в виде суммы аппроксимирующей компоненты $\text{approx}_N(t)$ и детализирующих компонент $\text{detail}_j(t)$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{approx}_N(t) + \sum_{j=1}^N \text{detail}_j(t) = \\ &= \sum_{k=1}^{N_a} \text{apr}(N, k)\varphi_{j,k}(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N_j} \text{det}(j, k)\psi_{j,k}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где N – выбранный максимальный уровень разложения ряда; N_j – количество детализирующих коэффициентов на уровне j ; N_a – количество аппроксимирующих коэффициентов на уровне N .

4. Оценивание самоподобия стохастических временных рядов с помощью ДВП [5,9,10]

Метод оценивания степени самоподобия базируется на свойствах детализирующих вейвлет-коэффициентов, полученных в результате декомпозиции процесса. Если случайный процесс $X(t)$ является самоподобным, то детализирующие коэффициенты $\text{det}(j, k)$, $k = 1, \dots, N_j$ на каждом уровне разложения также обладают свойством самоподобия:

$$\text{Law}\{\text{det}(j, k)\} = \text{Law}\{2^{j(H+1/2)} \text{det}(0, k)\}, \quad (8)$$

где $\text{det}(j, k)$ – k -й детализирующий коэффициент уровня разложения j ; N_j – количество вейвлет-коэффициентов на уровне разложения j ; H – показатель Хёрста. Это свойство вытекает из свойств вейвлет-базиса,

полученного путем масштабирования материнских вейвлетов.

Если существуют моменты порядка q , то для вейвлет-коэффициентов, полученных в результате декомпозиции процесса $X(t)$, выполняется следующее равенство:

$$M|\text{det}(j, k)|^q = M|\text{det}(0, k)|^q 2^{-jq\left(H+\frac{1}{2}\right)}. \quad (9)$$

Как следствие, для процессов с конечной дисперсией, что чаще всего встречается на практике, выражение (9) преобразуется в следующую форму:

$$M|\text{det}(j, k)|^2 = M|\text{det}(0, k)|^2 2^{-j(2H+1)}. \quad (10)$$

Для класса мультифрактальных процессов моменты порядка q отвечают следующему соотношению:

$$M|\text{det}(j, k)|^q = M|\text{det}(0, k)|^q 2^{-j\left(\xi(q)+\frac{q}{2}\right)}, \quad (11)$$

где $\xi(q)$ – нелинейная функция параметра q , связанная с обобщенным показателем Хёрста выражением

$$h(q) = \xi(q) / q - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Таким образом, исходя из выражений (8)-(12), можно предложить следующий алгоритм оценивания обобщенного показателя Хёрста по временному ряду $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$.

1. Для исходного ряда $X(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$ выполняем вейвлет-декомпозицию с заданным максимальным уровнем разложения.
2. Задаем значения параметра q , для которых требуется найти значения обобщенного показателя $h(q)$. В случае оценивания показателя Хёрста H для монофрактального процесса параметр $q = 2$.
3. Для каждого уровня разложения j вычисляем величину

$$E_j^q = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} |\text{det}|^q(j, k). \quad (13)$$

Согласно формуле (11) обобщенный показатель Хёрста $h(q)$ находится в скейлинговом соотношении с величиной E_j^q .

4. Каждому значению j ставится в соответствие логарифм величины E_j^q . Тангенс угла наклона прямой, аппроксимирующей полученные точки, определяет значение величины $\xi(q) + \frac{q}{2}$ для заданного значения q .
5. По формуле (12) вычисляем соответствующее значение $h(q)$.

6. Выполнив шаги 3-5 для всех заданных значений параметра q , получим искомую зависимость $h(q)$. В случае мультифрактального процесса она будет линейной функцией.

5. Численный анализ метода на модельных реализациях

Одной из наиболее известных и простых моделей самоподобного процесса является фрактальное броуновское движение (ФБД) [1,2]. Гауссовский процесс $X(t)$ называется фрактальным броуновским движением с параметром H , $0 < H < 1$, если приращения случайного процесса $\Delta X(\tau) = X(t+\tau) - X(t)$ имеют распределение вида

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0\tau^H}} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp} \left[-\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}} \right] dz,$$

где σ_0 коэффициент диффузии.

ФБД с параметром $H = 0.5$ совпадает с классическим броуновским движением. Приращения ФБД называются фрактальным гауссовским шумом, дисперсия которого подчиняется соотношению

$$D[X(t+\tau) - X(t)] = \sigma_0^2 \tau^{2H}.$$

ФБД является монофрактальным процессом, его скейлинговые характеристики полностью определяются значением показателя Хёрста H . На рис. 1 показана реализация ФБД при значении параметра $H=0.8$ длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация фрактального гауссовского шума.

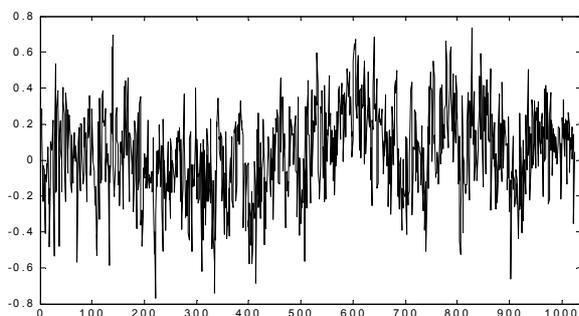
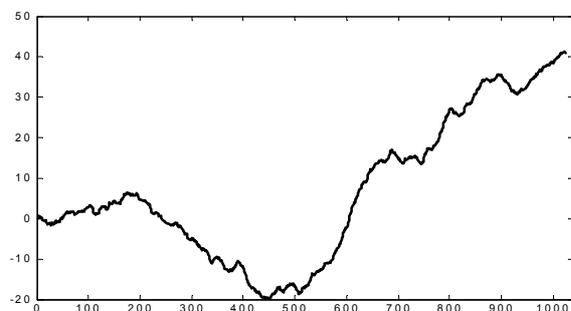


Рис. 1. Фрактальное броуновское движение (вверху) и фрактальный гауссовский шум (внизу) для $H=0.8$

Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является биномиальный каскад [1-4]. При его построении первоначальный единичный отрезок делим на две равные части, которым приписываем весовые коэффициенты p_1 и $p_2=1-p_1$ соответственно. Затем с каждым из отрезков поступаем аналогичным образом. В результате на втором шаге имеется 4 отрезка с весовыми коэффициентами p_1^2 , $p_1 \cdot p_2$, $p_2 \cdot p_1$ и p_2^2 . При числе шагов $n \rightarrow \infty$ и $p_2 \neq p_1$ мы приходим к неоднородному фрактальному множеству. На рис. 2 показан временной ряд значений биномиального каскада при $p_1=0.7$ и $n=10$, т.е. длиной реализации 2^{10} значений (вверху) и соответствующий кумулятивный ряд (внизу).

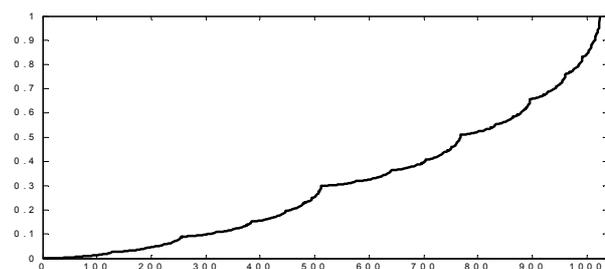
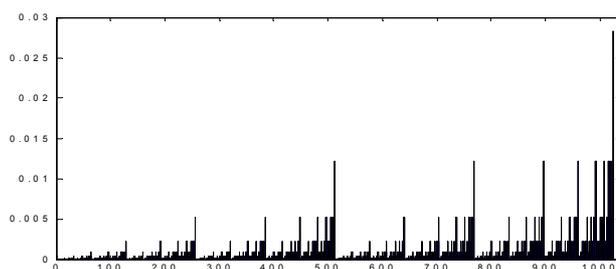


Рис. 2. Реализация биномиального каскада (вверху) и соответствующий кумулятивный ряд (внизу) для $p_1=0.7$

Функция обобщенного показателя Хёрста для биномиального мультифрактального процесса зависит только от весовых коэффициентов p_1 и p_2 и определяется аналитически:

$$h(q) = (1 - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2}) / q. \quad (14)$$

В работе было проведено оценивание обобщенного показателя $h(q)$ для модельных реализаций ФБД и мультифрактального биномиального каскада с разными параметрами. На рис. 3 показаны функции $h(q)$ ($q = 1 \div 5$), полученные для реализаций, представленных на рис. 2 и 3. Кружками отмечены значения обобщенного показателя Хёрста, оцененные по реализации ФБД с параметром $H=0.8$. Очевидно, что реализация обладает монофрактальными свойствами. Сплошной линией показана теоретическая функция $h(q)$ для биномиального процесса со значением $p_1=0.7$, а звездочками отмечены оценки величины $h(q)$, полученные методом, описанным выше.

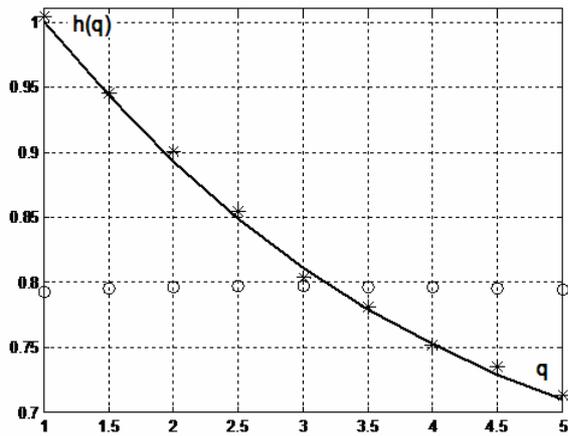


Рис. 3. Значения $h(q)$ для ФБД при $H=0,8$ (кружки), теоретическая функция $h(q)$ для биномиального каскада при $p_1=0,7$ (сплошная линия), соответствующие вычисленные по реализации значения $h(q)$ (звездочки)

6. Исследование фрактальных свойств сигналов, отраженных атмосферным слоем

Современные проблемы исследований и прогнозирования термодинамических процессов в атмосферном пограничном слое (АПС) требуют разработки и применения новых математических моделей и методов анализа данных. Поток тепла в АПС в общем случае следует рассматривать как случайный нестационарный процесс, состоящий из некоторой совокупности отдельных относительно короткопериодных квазистационарных процессов [12,13].

Одним из методов исследования процессов, протекающих в АПС, является акустическое зондирование и последующий анализ как эхо-сигналов, так и ансамблей последовательно полученных профилей эхо-сигналов – эхограмм. В результате экспериментальных исследований, проведенных на действующей станции акустического зондирования Харьковского национального университета радиоэлектроники в период с 2007 по 2009 г., получен обширный экспериментальный материал в виде эхограмм акустического зондирования, записанных в цифровом виде [13].

В данной работе был проведен анализ некоторых из этих экспериментальных данных. На рис. 4 приведен пример эхограммы, полученной в жаркий летний день с помощью бистатической системы акустического зондирования, установленной на крыше пятиэтажного здания, расположенного в центре мегаполиса. Такой вид эхограммы можно считать типичным для данных условий наблюдения.

По оси абсцисс отложено время в секундах, по оси ординат – высота зондируемого слоя в метрах. Максимальная высота зондируемого слоя атмосферы $h_z \cong 372,3$ м; значение разрешающей способности по высоте $\Delta h \cong 5$ м при температуре воздуха $t_B \cong 27^\circ\text{C}$; несущая частота зондирующего сигнала $f_0 = 1800$ Гц, период повторения зондирующих импульсов $T_{\text{и}} = 2$ с. Горизонтальные полосы, которые просматриваются

на эхограмме, обусловлены отражением от близко расположенных зданий [1-5]

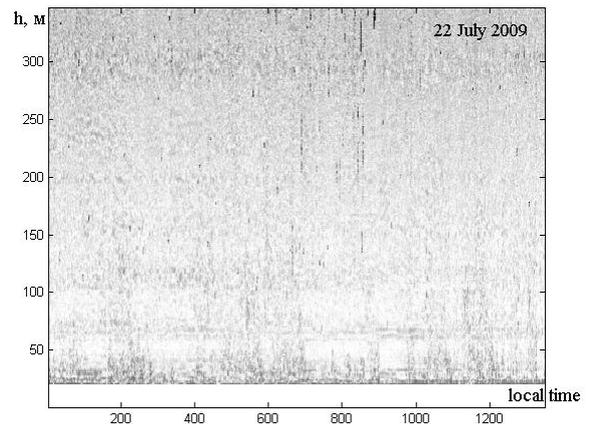


Рис. 4. Эхограмма акустического зондирования

На рис. 5 представлены значения сигналов $X(t)$, отраженных при разной высоте зондируемого слоя – 50 и 200 м. Оценки параметра Хёрста, полученные для этих сигналов, соответственно равны $H_{50}=0,73$ и $H_{200}=0,55$.

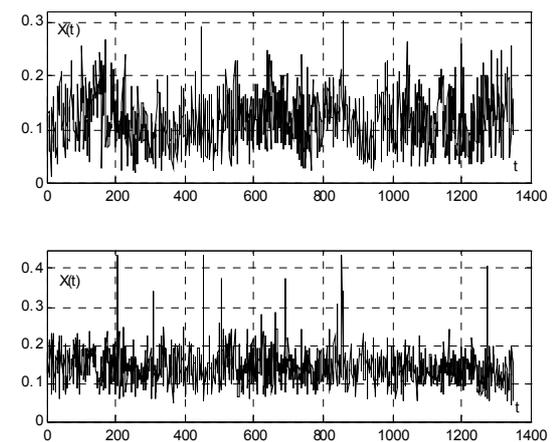


Рис. 5. Отраженные сигналы при высоте зондируемого слоя 50 м (вверху) и 200 м (внизу)

Методом, описанным в разделе 4, были получены оценки показателя Хёрста для сигналов, отраженных при разной высоте зондируемого слоя. На рис. 6 показаны значения параметра Хёрста H , как функции высоты отражающего слоя h , рассчитанные для численных данных эхограммы, представленной на рис. 4.

Как видно из рис. 6, на малых высотах, где оказывает влияние близость зданий, сооружений, высоких деревьев и других объектов мегаполиса, значения показателя Хёрста не превышают 0,6. Затем, в связи с притоком тепла в нижних слоях атмосферы, значения показателя Хёрста возрастают до 0,75, что говорит о наличии долгосрочной зависимости в атмосферных процессах на небольших высотах. По мере увеличения высоты и удаленности от мегаполиса показатель Хёрста уменьшается и стремится к 0,5, что соответствует слабокоррелированным случайным процессам.

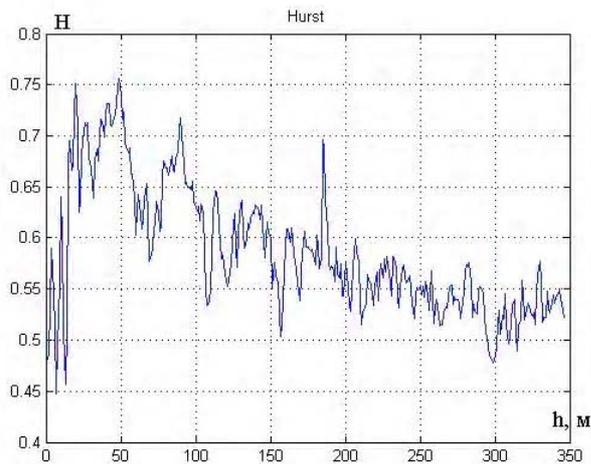


Рис. 6. Параметр Хёрста H как функция высоты отражающего слоя h

Мультифрактальный анализ, проведенный с помощью ДВП, подтверждает, что с увеличением высоты отражающего слоя атмосферы изменяется корреляционная структура процессов, что отражается в уменьшении значений обобщенного показателя Хёрста $h(q)$. На рис. 7 приведены значения обобщенного показателя Хёрста для сигналов, отраженных при высотах $h_1 = 50$ м, $h_2 = 150$ м и $h_3 = 200$ м. Следует отметить, что диапазон функции $h(q)$ не изменяется с увеличением высоты h . Кроме того, данные сигналы не проявляют сильной неоднородности (если сравнить с диапазоном $h(q)$ для биномиального каскада). Таким образом, можно считать, что математическими моделями сигналов, отраженных от атмосферы, могут выступать монофрактальные случайные процессы.

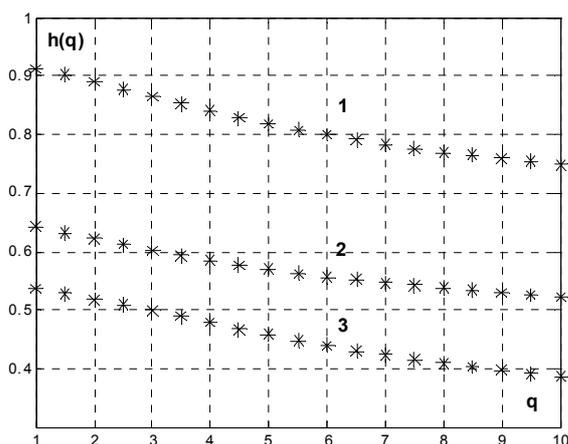


Рис. 7. Обобщенный показатель Хёрста для сигналов, отраженных при высотах $h_1 = 50$ м (1), $h_2 = 150$ м (2) и $h_3 = 200$ м (3)

Выводы

Традиционно для мультифрактального анализа применяется метод, основанный на непрерывном вейвлет-преобразовании. В работе проведен численный анализ возможностей метода мультифрактального

анализа, использующего дискретное вейвлет-преобразование. Тестовыми данными являлись модельные реализации самоподобных и мультифрактальных процессов.

Впервые показано, что сигналы, отраженные от зондируемого слоя атмосферы, имеют фрактальную структуру, которая зависит от высоты.

Практическая значимость работы состоит в том, что используемый алгоритм быстрого вейвлет-преобразования позволяет с минимальными затратами по времени и объему информации применять методы мультифрактального анализа, что, в частности, важно для работы в режиме реального времени.

Авторы выражают благодарность В.И. Леонидову за предоставленный цифровой материал эхограмм и обсуждение результатов работы.

Литература: 1. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с. 2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с. 3. Божокин С.В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 128 с. 4. Riedi R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications, p. 625–715, Birkhduser. 2002. 5. Veitch D., Abry P., Flandrin P., Chainais P. Infinitely Divisible Cascade Analysis of Network Traffic Data // Proc. IEEEInt'l Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. 6. Kantelhardt W. Fractal and Multifractal Time Series – 2008: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>. 7. Muzy J.F, Bacry E, Arneodo A. Multifractal formalism for fractal signals: the structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method // Phys. Rev. E 47, 875–884 (1993). 8. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 9. Patrick Flandrin, Paulo Gonzalves, Patrice Abry. Scale Invariance and Wavelets. in Scaling, Fractals and Wavelets. Ed. by P. Abry, P. Gonzalves, J. Lйvy Vйhel. John Wiley & Sons, London, 2009. 10. Abry P., Flandrin P., Taqu M.S., Veitch D. Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. in Doukhan P., Oppenheim G., Taqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications. P. 125–160. Birkhduser. 2002. 11. Дьяконов В. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р. 2002. 12. Леонидов В.И., Сидоров Г.И. Автоматизация классификации амплитудно-временных структур эхо-сигналов в системах акустического зондирования пограничного слоя атмосферы // Радиотехника. 2004. №137. С.123-129. 13. Леонидов В.И., Семенец В.В. Формализация описания эхограмм акустического зондирования атмосферы в зоне мегаполиса // Радиотехника. 2010. Вып. 160. С.177-183.

Поступила в редколлегию 21.08.2011

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Бодянский Е.В.

Кириченко Людмила Олеговна, канд. техн. наук, доцент каф. ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: ludmila@kture.kharkov.ua.

Дейнеко Жанна Валентиновна, ст. преподаватель каф. ИКГ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: shanna@kture.kharkov.ua.