

АНАЛІЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПОВІЛЬНИХ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ У ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Галін П.К.

e-mail: pavlo.halin@nure.ua

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

In this work, an unsteady slow viscous flow in a doubly connected domain is considered. A distinctive feature of the stream function formulation is the presence of an unknown constant, which is determined from the condition ensuring the uniqueness of the pressure. To solve the problem, the *R*-function method combined with the superposition principle is proposed.

Дослідження нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини є однією з ключових задач математичного моделювання у гідродинаміці. Особливий інтерес становлять повільні течії (режим малих чисел Рейнольдса), для яких інерційні ефекти є незначними, а динаміка визначається балансом в'язких сил і тиску. Практична актуальність таких задач зумовлена їх застосуваннями у мікрофлюїдних системах, хімічних реакторах, біомедичних процесах (рух рідин у капілярах) тощо. Окрему складність становлять двозв'язні області (області з отворами), які природно виникають у задачах обтікання тіл, реакторах з внутрішніми вставками, каналах із перешкодами. У таких областях ускладнюється постановка крайових умов і виникає проблема однозначності тиску. Класичні чисельні методи (скінченних різниць, скінченних елементів) потребують складної генерації сіток. У цьому контексті ефективним є метод *R*-функцій, запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачовим, який дозволяє аналітично враховувати геометрію області та точно задовольняти крайові умови. Це робить його особливо перспективним для задач у складних багатозв'язних областях.

Нехай Ω – плоска двозв'язна область з межею $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1$, де $\partial\Omega_0$ – зовнішня межа, а $\partial\Omega_1$ – внутрішня межа. Вважаємо, що $\partial\Omega_0$ і $\partial\Omega_1$ – кусково-гладкі лінії, $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 = \emptyset$. В області Ω розглядатимемо повільну течію в'язкої нестисливої рідини. У наближенні Стокса (за відсутності масових сил) така течія описуватиметься наступною системою рівнянь

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

де (x, y) – просторові змінні, t – час, $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – вектор швидкостей рідини, p – тиск, ν – кінематична в'язкість, Δ – оператор Лапласа.

Аналіз плоских течій зручно проводити за допомогою введення функції течії $\psi = \psi(x, y, t)$, що пов'язана з компонентами вектору швидкостей співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Тоді з (3) випливає, що рівняння нерозривності (2) виконується як тотожність, а з рівнянь (1) перехресним диференціюванням можна виключити тиск і отримати для функції течії наступне рівняння:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

де Δ^2 – бігармонічний оператор.

Функція течії співвідношеннями (3) визначається з точністю до адитивної функції часу й у двозв'язній області буде багатозначною функцією. Тому, виходячи з задання $\vec{v}|_{\partial\Omega}$ і $\vec{v}|_{t=0}$, рівняння (4) слід доповнити наступними початковою та межовими умовами:

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (5)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = f_0(s, t), \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = f_0(s, t) + \alpha(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

де ψ_0 – початкове значення функції течії, $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку відповідно, $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, $\alpha(t)$ – деяка (невідома) функція часу.

Для визначення функції $\alpha(t)$ слід долучити додаткові гідродинамічні міркування, а саме визначимо $\alpha(t)$ з умови однозначності тиску у двозв'язній області $\bar{\Omega}$. Це означає, що для будь-якого замкненого контуру Γ , розташованого у $\bar{\Omega}$, виконується рівність

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0. \quad (7)$$

Зокрема, рівність (7) має виконуватися для контуру $\partial\Omega_1$. Тоді (з урахуванням (1) і (3)) рівність (7) набуде вигляду

$$\oint_{\partial\Omega_1} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x \partial t} - \nu \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) dy = 0. \quad (8)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, подамо розв'язок задачі (4) – (6) у вигляді

$$\psi(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \alpha(t)u_1(x, y, t), \quad (9)$$

де $u_0 = u_0(x, y, t)$ – розв'язок задачі

$$\frac{\partial \Delta u_0}{\partial t} = \nu \Delta^2 u_0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u_0|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (11)$$

$$u_0|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \left. \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (12)$$

а $u_1 = u_1(x, y, t)$ – розв’язок задачі

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial t} = \nu \Delta^2 u_1, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (13)$$

$$u_1|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (14)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad u_1|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad s \in \partial\Omega, t \geq 0. \quad (15)$$

Для розв’язання задач (10) – (12) і (13) – (15) використаємо метод R -функцій [2]. Структури розв’язку цих крайових задач можна обрати відповідно у вигляді [1]

$$u_0 = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi_0, \\ u_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1 \left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} \right) + \omega^2 \Phi_1,$$

де $f = E C f_0$, $g = E C g_0$ – відповідно продовження функцій f_0 , g_0 в Ω ; $\Phi_0 = \Phi_0(x, y, t)$, $\Phi_1 = \Phi_1(x, y, t)$ – невизначені компоненти структур; $\omega_0 > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega_1$, $\omega_0 = 0$ на $\partial\Omega_0$, $|\nabla \omega_0| = 1$ на $\partial\Omega_0$; $\omega_1 > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega_0$, $\omega_1 = 0$ на $\partial\Omega_1$, $|\nabla \omega_1| = 1$ на $\partial\Omega_1$; $\omega = \omega_0 \wedge_0 \omega_1$, $\wedge_0$ – знак R -кон’юнкції; оператор D_1 діє за правилом

$$D_1 u = (\nabla \omega, \nabla u) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

і має властивість $D_1 u|_{\partial\Omega} = - \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega}$.

Для апроксимації невизначених компонентів структурних формул можна використати, наприклад, метод Гальоркіна для нестационарних задач. Після розв’язування задач (10) – (12) і (13) – (15) знаходимо функцію $\alpha(t)$ з рівняння, отриманого підстановкою (9) у (8).

Список використаних джерел:

1. Сидоров М. В. Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений. *Радиоэлектроника и информатика*. 2003. № 1 (22). С. 42 – 44.
2. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -functions in boundary value problems in mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. 1995. Vol. 48, № 4. Pp. 151-188. DOI: 10.1115/1.3005099.