Математичні моделі та методи

УДК 519.22:311.214

В.Ю. Дубницкий[1], А.М. Кобылин[1], О.А. Кобылин[2]

[1] *Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ «Университет банковского дела», Харьков*
[2] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Предложены способы вычисления значений производной функции, заданной в явном и табличном виде. Численные значения функции и аргументов представлены в виде интервальных чисел, определённых в системе центр-радиус. В случае явного задания функции для определения производной использовано её интервальное расширение. Предложен способ численного дифференцирования. На основе этого предложен способ оценки влияния неопределённости исходных данных на неопределённость результатов косвенных измерений. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *интервальные числа**,** система центр-радиус, производная, эластичность функции, численное дифференцирование, косвенные измерения, неопределённость измерений.*

Введение

В работе [1] поставлена задача определения объёма и состава измерений в условиях неопределённости. Под неопределённостью косвенных измерений, заданных некоторой математической моделью, в этой работе понималась ситуации, при которой погрешности используемых исходных данных точно не известны. Предполагалось только знание границ изменения возможных значений входных характеристик. В работе рассматривали два подхода: вероятностный и гарантирующий. В первом случае задачу решали с учетом сведений о вероятностных свойствах погрешностей или полученных в результате эксперимента статистических оценок этих свойств. Во втором случае требовалось только знание границ возможных изменений входных характеристик для рассматриваемой математической модели процесса. Справедливо предположить, что в условиях ограничений на измерительные ресурсы следует определить те переменные, которые оказывают наибольшее влияние на уменьшение неопределённости окончательного результата исследования изучаемой математической модели.

Анализ литературы. В действующих в данное время нормативных документах [2, 3] различают два вида неопределённости: неопределённость типа А, оцениваемую статистическими методами и неопределённость типа В, которой присущи свойства нестохастической неопределённости. Для её определения используют априорную информацию о возможных интервалах значений исследуемых переменных и связанных с ними параметрах. Более подробно свойства этих типов неопределённости рассмотрены в работе [4]. При работе с данными, которым присуща неопределённость типа В, используют как методы, рекомендованные в работе [2], так и методы интервальной арифметики. В рекомендациях [2] определены следующие понятия:

- неопределенность измерений - параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине;
- стандартная неопределенность (*u*) - неопределенность результата измерений, выраженная в виде среднего квадратического отклонения.

Для косвенных измерений принимают известным уравнение вида:

$$y = f(x_1, \dots x_m), \qquad (1)$$

названное в работе [5] уравнением косвенного измерения. В том случае, когда аргументы выражения (1) попарно не коррелированны, то суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ вычисляют по формуле

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}\ . \qquad (2)$$

Расширенную неопределённость U определяют по условию

$$U = ku_c, \qquad (3)$$

где k – коэффициент охвата, определяемый по условию:

$$k = t_p\left(v_{eff}\right), \qquad (4)$$

$t_p\left(v_{eff}\right)$ - квантиль распределения Стьюдента с эффективным числом степеней свободы v_{eff} и доверительной вероятностью (уровнем доверия) p.

Эффективное число степеней свободы определяют по формуле:

$$v_{eff} = \left[u_c^4 \Big/ \sum_{i=1}^{m} \frac{u^4(x_i)}{v_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 \right], \qquad (5)$$

где $[\Theta]$ – символ, обозначающий целую часть числа Θ, v_i-число степеней свободы при определении оценки i-й входной величины, $v_i = n_i - 1$, $u(x_i)$ – стандартная неопределённость единичного измерения i-ой входной величины. Представим уравнение косвенного измерения вида (1) в расширенном виде:

$$y = f(x_1, ...x_m; x_{m+1,...}x_{m+n}). \qquad (6)$$

Пусть $X_1 = \langle x_1, ...x_m \rangle$ – множество входных переменных, значения которых определяют непосредственно в данном эксперименте. Пусть $X_2 = \langle x_{m+1,...}x_{m+n} \rangle$ – множество переменных, которые в данном эксперименте рассматривают как параметры. Из условия (5) следует, что уменьшение неопределённости косвенных измерений может быть достигнута увеличением кратности измерений величин, входящих в множество X_1 при проведении данного эксперимента и (или) уточнением значений величин, входящих в множество X_2. Последнее также требует проведения специальных исследований. Известно, что любое исследование проводят в условиях временных и стоимостных ресурсных ограничений. Поэтому их распределение для достижения требуемой точности исследования можно рассматривать как самостоятельную и довольно сложную задачу. В тех случаях, когда использование статистических методов затруднено и возникает неопределённость типа В, авторы данного сообщения рекомендовали использовать методы интервального анализа для её определения. Для выполнения необходимых вычислений авторами предложен специализированный программный калькулятор, описанный в работе [6]. Применение интервального анализа для определения неопределённости типа В, возникающей при учёте вычислительных погрешностей показано в работе [7]. Дальнейшим развитием метода интервального анализа стал метод недоопределённых вычислений, одно из первых описаний которого приведено в работе [8].

В самом общем виде задачу в этом случае формулируют в следующем виде. Пусть на переменные x_1, x_2 ..., x_n , областями значений которых являются множества X_1 , X_2 , ..., X_n , наложены ограничения C_i (x_1 , x_2 , ..., x_n), i =1, k. Требуется найти наборы значений $<a_1$, a_2 , ..., $a_n>$ ($a_i \in X_i$), которые бы удовлетворяли всем ограничениям одновременно.

Такая постановка задачи называется проблемой удовлетворения ограничений, а для ее решения используются различные алгоритмы и методы. В частности проблема удовлетворения ограничений может формулироваться как система уравнений с числовыми параметрами, а для ее решения могут использоваться стандартные численные методы. Однако при решении многих реальных задач эти методы оказываются неприменимыми, особенно если модель включает данные, которые могут быть заданы в виде множеств и интервалов, содержащих допустимые значения. В работе [9] предложен способ геометрической интерпретации процесса поиска решения в виде последовательности сжимающихся параллелепипедов, сходящихся к интервалу, интерпретируемому как интервал, содержащий решение задачи. Следует отметить, что несколько ранее, в работе [10], авторы данного сообщения предложили метод решения задачи, аналогичный методу, описанному в работе [9], но обосновали его сходимость менее строго, чем это сделано в работе [9]. В доступной для читателя работе [11] изложено современная информация о методе недоопределенных вычислений. Использование интервального анализа и метода недоопределённых вычислений для анализа чувствительности модели первоначально было рассмотрено в работе [9]. Следует отметить, что процедуры выбора переменных, уменьшение интервала неопределённости которых в наибольшей мере влияет на уменьшение аналогичного интервала результата, не рассмотрены как в этой, так и в других аналогичных работах.

В данной работе все вычисления, связанные с интервальными числами, будут выполнены, если иного не оговорено, при условии их определения в системе центр-радиус. Правила действий с такими числами изложены в работах [6, 12].

Постановка задачи. Разработка основных положений методики, предназначенной для оценки влияния неопределённости исходных, интервально заданных, данных на интервал результата косвенного измерения.

Полученные результаты

Следуя работам [6, 12] рассмотрим множество действительных чисел *R*, на котором определим интервальное число [A] в виде замкнутого интервала:

$$[A] = (\underline{a}, \overline{a}) = (a_1, a_2) = [a_1, a_2], \ \underline{a} \leq, \overline{a}; \ a_1 \leq a_2 \qquad (7)$$

и представим его в виде:

$$\tilde{A} = \langle a, r_a \rangle, \qquad (8)$$

где $$a = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ r_a = \frac{a_2 - a_1}{2}, \ a, r_a, \in R. \qquad (9)$$

При применении системы центр-радиус действия сложения и вычитания с интервальными числами выполняют по следующим правилам:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \langle a + b, r_a + r_b \rangle; \qquad (10)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \langle a - b, r_a + r_b \rangle. \qquad (11)$$

В рамках данной работы примем, что границы интервалов, которые ограничивают рассматриваемые числа, образованы вычислительными ошибками, погрешностями измерений или неполным знанием области изменения некоторой физической величины. Поэтому в условии (9) должны быть выполнены неравенства:

$$a \geq r_a \geq 0, \ b \geq r_b \geq 0, \qquad (12)$$

иначе будем считать, что задача, в рамках наших представлений об исследуемом объекте, физического смысла не имеет. Для выполнения операций умножения и деления используем выражения вида:

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab+r_a r_b, ar_b+br_a\rangle; \qquad (13)$$

$$\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\left\langle \frac{ab+r_a r_b}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b+br_a}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \qquad (14)$$

Для возведения интервального числа в целочисленную степень в работе [12] получены формулы:

$$\tilde{A}^n=\langle a,r_a\rangle^n=\langle G,R\rangle; \qquad (15)$$

при условии, что $n\in Z$. Тогда:

$$G=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}r_a^{2k}a^{n-2k}; \qquad 16)$$

$$R=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k+1}r_a^{2k+1}|a|^{n-(2k+1)}. \qquad (17)$$

Постоянное число *C* представим в виде $C=\langle c,\ 0\rangle$. Примем, что $A=\langle a,r_a\rangle$ и $B=\langle b,0\rangle$. Тогда операции сложения и вычитания интервального числа с постоянным представим в виде:

$$\tilde{A}+\tilde{C}=\langle a+c,r_a\rangle; \qquad (18)$$

$$\tilde{A}-\tilde{C}=\langle a-c,r_a\rangle. \qquad (19)$$

Для умножения интервального числа, представленного в системе центр-радиус, на постоянную величину примем, что:

$$\tilde{A}\tilde{B}=\begin{cases}\langle a,0\rangle\langle b,r_b\rangle, A=\text{const}, B\neq \text{consn};\\ \langle a,r_a\rangle\langle b,0\rangle, A\neq\text{const}, B=\text{const}.\end{cases} \qquad (20)$$

При операции деления интервального числа на постоянное число получим, что:

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}=\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,0\rangle}=\left\langle\frac{ab}{b^2},\frac{br_a}{b^2}\right\rangle=\left\langle\frac{a}{b},\frac{r_a}{b}\right\rangle \qquad (21)$$

или $$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}=\frac{\langle a,0\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\frac{\langle ab,ar_b\rangle}{b^2-r_b^2}=\left\langle\frac{ab}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \qquad (22)$$

Для функции f переход от привычного аналитического вида к интервальному виду проводят по правилам интервального расширения, описанным в работах [12, 15]. Интервальным расширением функции вида (1) назовём выражения вида:

$$\langle y\rangle=f(\langle x_1\rangle,\ldots\langle x_m\rangle). \qquad (23)$$

Простейший способ получения интервального расширения функции вида (1) описан в работе [13] и основан на формальной замене аргументов и коэффициентов выражения (1) на их интервальные аналоги, и выполнения вычислений с использованием выражений (8) … (22). Для уменьшения интервала результата вычислений в настоящее время разработаны приемы, описанные в работах [14, 15]. Для функции одной переменной эту процедуру представим в виде:

$$\phi(\langle a_x;r_x\rangle)=\phi(\langle a_x;0\rangle)+\phi'(\langle a_x,r_x\rangle)(\langle a_x;r_x\rangle-\langle r_x;0\rangle). \qquad (24)$$

Для функции многих переменных описано обобщение условия (25).

$$f(\langle x_1\rangle,\ldots\langle x_m\rangle)=f(\langle a_{x1};r_{x1}\rangle,\ldots\langle a_{xm};r_{xm}\rangle)+ \\ +\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}\phi_i'(\langle a_{x1};r_{x1}\rangle,\ldots\langle a_{x1};r_{x1}\rangle,\langle r_{i+1};0\rangle\ldots\langle r_m;0\rangle)\times\\ \times(\langle a_{x+1};r_{x+1}\rangle-\langle a_{x+1};0\rangle)\end{pmatrix}. \qquad (25)$$

Выполнение расчетов по условию [24] требует вычисление численных значений интервально заданных функций, что резко увеличивает вычислительные сложности, особенно, если вычисления проводят с использованием условия (25).

При выполнении вычислений по условию (25) возникает задача вычисления значений производной функции, заданной в интервальном виде. В настоящее время известны следующие способы её решения. Первый способ состоит в том, что просто задачу решают в привычном аналитическом виде, а затем выполняют интервальное расширений полученного результата. Этот способ описан в работе [14]. Второй способ описан в работе[15]. Его реализация, авторы упоминаемой работы называют его способом автоматического дифференцирования, весьма сложна и практически требует индивидуального алгоритма и соответственно программы для каждой функции. Третий способ описан в работах [18,20]. Используя представление интервального числа в виде (7) запишем, что для функции $[Y]=f([X])$ её первая производная примет вид:

$$[Y_X']=\left[-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]. \qquad (26)$$

Переходя к интервальным числам системе центр-радиус по правилам (9) получим, что:

$$\tilde{Y}_x=\langle 0;(y_2-y_1)/(x_2-x_1)\rangle, \qquad (27)$$

что называют эластичностью. Эта же величина в работе [16] названа коэффициентом влияния. Исходя из условий (8) и (9) примем, что δ=2r, Таким образом, условие (26) с учетом условий (8) и (27) можно в интервальном виде в системе центр-радиус представить в виде:

$$\tilde{\varepsilon}_y==\sum_{i=1}^{m}\tilde{E}_{y/xi}\frac{\langle 2;0\rangle\cdot\langle r_{xi};0\rangle}{\langle a_{xi};r_{xi}\rangle}. \qquad (28)$$

Следовательно, для получения выражения (29) требуется процедура получения производной функции, заданной в интервальном виде.

Представим интервально-заданную в системе центр-радиус функцию в следующем виде**:**

$$\langle y\rangle=f(\langle x\rangle)=\langle D_f a_x;D_f r_x\rangle, \qquad (29)$$

где $D_f a_x$ – центр функции $f(\langle x\rangle)$, полученный в результате её интервального расширения, $D_f r_x$ её радиус. Рассмотрим её аналитическое и численное решение. Получение производной функции вида (30) в интервальном виде труда не составляет:

$$\langle y_x'\rangle=f_x'(\langle x\rangle)=\langle D_f a_x;D_f r_x\rangle. \qquad (30)$$

Для решения задачи в численном виде используем приведенное в работе [19] выражение:

$$f'x_u = \frac{f_u - f_{u-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f_u - f_{u-1}}{h_i}; \; f_u = f(x_u); \; u = \overline{0,k}. \quad (31)$$

Примем, что относительная погрешность величины x известна, не зависит от номера наблюдения u и равна ε_x. Тогда число:

$$\left\langle \tilde{f}_x \right\rangle = \frac{\left\langle D_F(a_x + \Delta_x); D_f\left(\frac{\varepsilon}{2}(ax + \Delta_x)\right)\right\rangle - \left\langle D_f a_x; D_f \frac{\varepsilon a_x}{2}\right\rangle}{\left\langle (a_x + \Delta_x\right\rangle; \frac{\varepsilon}{2}\left\langle (a_x + \Delta_x\right\rangle - \left\langle a_x; \frac{\varepsilon a_x}{2}\right\rangle} = \frac{D_F(a_x + \Delta_x) - D_f a_x; D_f\left(\frac{\varepsilon}{2}(ax + \Delta_x)\right) + D_f \frac{\varepsilon a_x}{2}}{\left\langle \Delta_x; \frac{\varepsilon(2a + \Delta)}{2}\right\rangle}. \quad (33)$$

$$\tilde{X} = \left\langle a_x; r_x \right\rangle = \left\langle a_x; \varepsilon_x a_x / 2 \right\rangle. \quad (32)$$

Такая запись позволяет представить интервальное число в виде функции его радиуса.

Принимая во внимание условия (30)…(31) представим условие (32) в таком виде:

Для функции нескольких переменных заданной вида (24) определим в интервальном виде частную эластичность по аргументу $\left\langle \left\langle a_{xi}; r_{xi} \right\rangle \right\rangle$ так:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z/xi} &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(\left\langle a_{x1}; r_{x1}\right\rangle ..., \left\langle a_m; r_m\right\rangle) \times \\ &\times \left\langle a_{xi}; r_{xi}\right\rangle / f(\left\langle a_{x1}; r_{x1}\right\rangle ..., \left\langle a_m; r_m\right\rangle). \end{aligned} \quad (34)$$

Упрощённый способ определения эластичности $E_{y/x}$ описан в работе [21]. В соответствии с ним эластичность функции определяют так:

$$\hat{E}_{y/x} = \left(\frac{2(y_2 - y_1)}{y_1 + y_2}\right) \Bigg/ \left(\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}\right). \quad (35)$$

Числитель $\tilde{V}$ условия (35), представленный в интервальном виде примет вид:

$$\tilde{V} = \frac{\left\langle 2(a_{y2} - a_{y1}); 2(r_{y2} + r_{y1})\right\rangle}{\left\langle (a_{y2} + a_{y1}); (r_{y2} + r_{y1})\right\rangle}. \quad (36)$$

Знаменатель $\tilde{W}$ условия (35), представленный в интервальном виде примет вид:

$$\tilde{W} = \frac{\left\langle 2(a_{x2} - a_{x1}); 2(r_{x2} + r_{x1})\right\rangle}{\left\langle (a_{x2} + a_{x1}); (r_{x2} + r_{x1})\right\rangle}. \quad (37)$$

Дальнейшие вычисления выполняли численными методами. Рассмотрим пример применения описанной методики. Условия примера заимствованы из работы [15, С. 59]. Для функции вида:

$$z = x^2 + xe^y - y^2 \quad (38)$$

требуется определить в интервальном виде её относительную погрешность. Интервалы определения её аргументов приведены в табл.1.

Таблица 1

Интервалы определения аргументов функции z

Аргументы функции z	Область определения интервалов	
	В классической интервальной арифметике	В системе центр-радиус
x	[2,094;4,189]	$\langle 3{,}141;\ 1{,}047\rangle$
y	[3,110;3,173]	$\langle 3{,}141;\ 0{,}315\rangle$

Поставленная задача решалась двумя способами. В первом были использованы интервальные расширения соответствующих функций, заданных условиями (26), во втором задача решалась численным методом, используя условия (28,32). Промежуточные действия, необходимые для решения задачи первым способом приведены в табл. 2. Результаты определения коэффициентов влияния в зависимости от выбранного способа решения приведены в табл. 3.

Приведенные в табл. 3 результаты позволяют сделать вывод о том, что решение задачи методом интервального расширения позволяет получить меньший интервал неопределённости, чем численное решение поставленной задачи.

Таблица 2

Коэффициенты влияния относительных погрешностей аргументов на относительную погрешность функции z

Расчётные характеристики	Аргументы			
	x		y	
	Расчетная формула	Результат	Расчетная формула	Результат
Эластичность функции по аргументу	$E_{z/x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z}$	$E_{z/x} = \frac{x(e^y + 2x)}{xe^y + x^2 - y^2}$	$E_{z/y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z}$	$E_{z/y} = \frac{y(xe^y - 2y)}{xe^y + x^2 - y^2}$
Коэффициент влияния аргумента	$A_x = E_{z/x} \frac{\delta_x}{x}$	$A_x = \frac{\delta_x(e^y + 2x)}{xe^y + x^2 - y^2}$	$A_y = E_{z/y} \frac{\delta_y}{z}$	$A_y = \frac{\delta_y(xe^y - 2y)}{xe^y + x^2 - y^2}$

Таблица 3

Результаты определения коэффициентов влияния

Способ решения	Коэффициенты влияния			
	A_x		A_y	
	Система центр-радиус	Классическия интервальный анализ	Система центр-радиус	Классическия интервальный анализ
Интервальное расширение	$\langle 0{,}38; 0{,}16\rangle$;	$[0{,}22; 0{,}54]$	$\langle 0{,}14; 0{,}06\rangle$;	$[0{,}08; 0{,}20]$
Численное дифференцирование	$\langle 0{,}34; 0{,}26\rangle$;	$[0{,}18; 0{,}60]$	$\langle 0{,}17; 0{,}09\rangle$;	$[0{,}08; 0{,}26]$

Выводы

1. Предложены способы вычисления значений производной функции, аргументы которой есть интервальные числа, представленные в системе центр-радиус.

2. В случае явного задания функции для определения производной использовано её интервальное расширение.

3. Предложен способ численного дифференцирования функций, аргументы которой есть интервальные числа, представленные в системе центр-радиус.

4. Предложен способ оценки влияния неопределённости исходных данных на неопределённость результатов косвенных измерений для функций, аргументы которой есть интервальные числа, представленные в системе центр-радиус.

Список литературы

1. Эльясберг П.Е. Измерительная информация: Сколько её нужно? как её обрабатывать? [Текст] / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1983. – 206 с.

2. ДСТУ – Н РМГ 43 : 2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределённости измерений» (РМГ 43: 2001). – 34 с.

3. Guidelines for Expression of the Uncertainly in Measurement: First edition . – 134 p.

4. Васілевський О.М. Основи теорії невизначеності вимірювань [Текст] / О.М. Васілевський, В.Ю. Кучерук, Є.Е. Володарський. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 230 с.

5. Сборник задач по метрологии [Текст] / В.И. Нефёдов, А.А. Балагур, В.И. Мельчаков, Е.В. Федорова. – М.: МГИР (технический университет)», 2010. – 124 с.

6. Дубницкий В.Ю. Вычисление значений элементарных функций с интервально заданным аргументом в системе центр- радиус [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин, О.А. Кобылин // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 7 (144). – С. 107-112.

7.Дубницкий В.Ю. Определение вычислительной погрешности расчёта надёжности [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.И. Ходырев // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2012. – №7 (59). – С. 272-278.

8. Нариньяни А.С. Недоопределённость в системах представления и обработки знаний. [Текст] / А.С. Нариньяни // Изв. АН СССР, Сер. Техн. Кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 3-28.

9. Кашеварова Т.П. Использование метода недоопределённых вычислений для анализа чувствительности математических моделей. [Текст] / Т.П. Кашеварова // Вычислительные технологи. – 1999. – № 4. – С. 24- 32.

10. Дубницкий В.Ю. Применение метода вложенных параллелепипедов для поиска области технологического оптимума. [Текст] / В.Ю. Дубницкий, В.Л. Чернявский // Изв. ВУЗов, сер. Строительство. – 1996. – № 9. – С. 86-88.

11. Еленевич М.А. Метод недоопределенных вычислений в задаче автоматической валидации данных в системе обработки телеметрической информации космических аппаратов. [Текст] / М.А. Еленевич, И.Б. Туркин, Ю.А. Шовкопляс // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 4 (45). – С. 114-119.

12. Жуковська, О.А. Основи інтервального аналізу: навч. посіб .[Текст] / О.А. Жуковська. – К.: Освіта України, 2009. – 136 с.

13.Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. –360 с.

14. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ [Текст] / С.П. Шарый. – М.: XYZ, 2010. – 606 с.

15. Прикладной интервальный анализ [Текст] / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 468 с.

16. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. [Текст] / С.Г. Рабинович. – Л : Энергия, 1978. – 262 с.

17. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. [Текст] / О.Н. Салманов.– Санкт-Петербург.: Изд-во BHV, 2003. – 464 с.

18. Левин В.И. Интервальная производная и интервально-дифференциальное исчисление / В.И. Левин // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – 2015. – № 3. – С. 22-29.

19. Шарый С.П. Курс вычислительных методов. [Текст] / С.П. Шарый. – Новосибирск.: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2016. – 464 с

20. Методичні вказівки для практ. занять «Методика розрахунків похибок непрямих вимірювань» з дисц. «Фізичні основи неруйнівного контролю» [Текст] / Уклад. О.Л. Багмет, В.П. Себко. – Х.: НТУ «ХПІ», 2002. – 28 с.

21. Замков О.О.Математические методы в экономике [Текст] / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: Дело и Сервис, 2001. – 368 с.

Поступила в редколлегию 25.02.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Гороховатский, Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ «Университет банковского дела», Харьков.

ОЦІНКА ВПЛИВУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ НА НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ НЕПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін, О.А. Кобилін

Запропоновано способи обчислення значень похідної функції, заданої в явному і табличному вигляді. Чисельні значення функції і аргументів представлені у вигляді інтервальних чисел, визначених в системі центр-радіус. У разі явного завдання функції для визначення похідної використано її інтервальне розширення. Запропоновано спосіб чисельного диференціювання в системі центр-радіус. На основі цього запропоновано спосіб оцінки впливу невизначеності початкових даних на невизначеність результатів непрямих вимірювань. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: *інтервальні числа, система центр-радіус, похідна, еластичність функції, чисельне диференціювання, непрямі вимірювання, невизначеність вимірювань.*

EVALUATION OF INITIAL DATA UNCERTTANYTY EFFECT ON INDIRECT MEASUREMENT RESULTS UNCERTAINTY

V.Yu. Dubnitskiy, A.M. Kobylin, O.A. Kobylin

Calculation methods are proposed for calculation of values of derived function given in explicit and tabular form. Numerical values of function and arguments are presented in the form of interval numbers determined in center-radius system. In case of explicit function setting its interval expansion was used to determine its derivative. Numerical differentiation method was proposed in center-radius system. On this basis a method was proposed for evaluation of initial data uncertainty effect on indirect measurement results uncertainty. A numerical example was discussed.

Keywords*: interval numbers, center-radius system, derivative, function elasticity, numerical differentiation, indirect measurement, measurement uncertainty.*