

НОРМАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ДЕСКРИПТОРНЫЕ НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ.- I

Введение

Трудность теоретического и численного анализа переходных процессов в нелинейных радиотехнических цепях часто приводит к тому, что для каждой конкретной цепи индивидуально выбираются метод исследования и переменные состояния. Здесь предлагается некоторый общий метод исследования нелинейных цепей с любым числом сосредоточенных элементов определенного класса – емкостей, индуктивностей, в том числе взаимных многополюсных, нелинейных сопротивлений и нелинейных проводимостей. Основные шаги метода излагаются в двух частях, из которых состоит данная работа. В первой части после некоторого унифицированного выбора переменных состояния и исключения остальных токов и напряжений, получаются уравнения переходных процессов в виде системы полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений. Производные переменных присутствуют только в линейных частях уравнений, однако в общем случае систему нельзя разрешить относительно производных. В векторной записи системы при векторе производных может стоять необратимая (вырожденная) квадратная матрица. Далее делается эквивалентная замена переменных, существенно упрощающая линейную часть уравнений и приводящая их к нормальной (канонической) форме К. Вейерштрасса. При такой нормализации уравнений аналитическая сложность нелинейных частей не возрастает, так как замена линейна.

Во второй части работы производится нормализация разностно-алгебраической системы уравнений, полученной путем конечно-разностной аппроксимации уравнений состояний. На следующем шаге нормализованные разностно-алгебраические уравнения моделируются с помощью дескрипторной нейронной сети, которая представляет собой определенное соединение динамических и статических нейронов. Анализируются структурные, динамические и функциональные свойства нейронной сети. Преобразования этих свойств путем обратной замены переменных позволяют указать некоторые «базисные» нелинейные зависимости в терминах переменных состояний исходной цепи. Указывается алгоритм последовательного вычисления состояний цепи в дискретные моменты времени, а в ряде случаев – явные аналитические формулы для состояний. Все шаги предлагаемого метода излагаются на примере модельной цепи с четырьмя линейными дифференциальными элементами и четырьмя нелинейными элементами.

Полулинейные дескрипторные динамические уравнения переходных режимов

Модельная цепь на рисунке представляет собой двухполюсник с заданным входным напряжением $U(t)$, двумя емкостями C_j , двумя нелинейными утечками g_j , взаимной индуктивностью и двумя нелинейными потерями $\varphi_j, j = 1, 2$:

$$\left. \begin{aligned} I_{C_1} &= C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt}, \quad I_{g_1} = g_1(U_{g_1}); \quad U_{\varphi_1} = \varphi_1(I_{\varphi_1}) \\ U_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}; \quad L_1 > 0, \quad L_{12} > 0 \\ U_2 &= L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}; \quad L_{12}^2 = L_1 L_2; \quad L_1 \neq L_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В качестве переменных динамического состояния цепи выбираются *токи на индуктивностях и напряжения на емкостях*. Для цепи на рисунке вектор состояния $x(t)$ является четырехмерным:

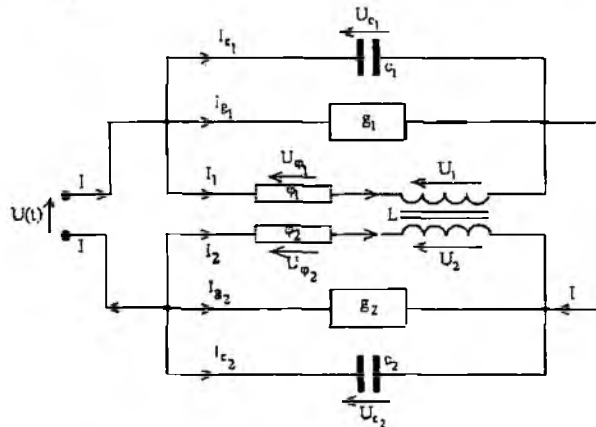
$$x(t) = (I_1(t), I_2(t), U_{C_1}(t), U_{C_2}(t))^T, \quad (2)$$

в то время как общее количество токов и напряжений всех девяти ветвей цепи равно 18. В общем случае полную систему уравнений Кирхгофа можно записать, например, с помощью фундаментальных матриц циклов и сечений графа цепи. В модельной цепи получится 9 уравнений Кирхгофа. Исключая из них внешний ток I , токи I_{φ_j} , напряжения U_{g_j} , получим следующие четыре уравнения законов сохранения ($j = 1, 2$):

$$U_j - U_{C_j} = -U_{\varphi_j}, \quad U_{C_1} - U_{C_2} = U(t), \quad I_{C_1} + I_{C_2} + I_1 + I_2 = -I_{g_1} - I_{g_2}.$$

Подставляя в них выражения для $U_j, I_{C_j}, U_{\varphi_j}, I_{g_j}$ из (1), получаем искомую систему дифференциально-алгебраических уравнений относительно динамических переменных (2):

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} - U_{C_1} &= -\varphi_1(I_1) \\ L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} - U_{C_2} &= -\varphi_2(I_2) \\ U_{C_1} - U_{C_2} &= U(t) \\ C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} + C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} + I_1 + I_2 &= -g_1(U_{C_1}) - g_2(U_{C_2}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Двухполюсник с нелинейными сопротивлениями φ_k и проводимостями $g_k, k = 1, 2$.

Система дифференциально-алгебраических уравнений (3) имеет векторную форму

$$A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t) + \psi(x) \quad (4)$$

относительно вектора состояний $x(t)$ (2). Здесь

$$A = \begin{bmatrix} L_1 & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{12} & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(x) = \begin{bmatrix} -\varphi_1(x_1) \\ -\varphi_2(x_2) \\ 0 \\ -g_1(x_3) - g_2(x_4) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обе матрицы A, B необратимы: $\det A = 0, \det B = 0$. При этом $\text{rang} A = 2$ вследствие соотношения параметров в (1).

Замечание 1. Мы не исключаем из переменных состояния (2) одно из напряжений U_{C_j} с помощью третьего уравнения в (3) по двум причинам. Во-первых, возможность этого исключения присуща именно конкретной цепи на рисунке, а наша цель – описать универсальный алгоритм анализа рассматриваемого класса цепей. Во-вторых, исключение третьего

уравнения из системы (3) и переход к трехкомпонентному вектору состояний не изменит тип системы уравнений: она останется неразрешимой относительно производных состояний и в ее векторной форме (4) новая матрица $A(3 \times 3)$ также будет необратимой.

Динамические системы вида (3) с уравнениями, не разрешимыми относительно производных, в теории управления называются *дескрипторными* [1].

Резонансно-частотные и резольвентные характеристики уравнений состояний

Анализ переходных режимов в цепи сводится к исследованию решений задачи Коши для уравнения (4) с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})^T. \quad (5)$$

Вследствие вырожденности матрицы A такая задача Коши *может не иметь решения* при сколь угодно гладкой нелинейной функции $\psi(x)$, и даже при $\psi = 0$, (см. пример цепи в [2]). Для разрешимости задачи (4, 5) необходимо, чтобы начальный вектор x_0 принадлежал некоторому многообразию D_0 в пространстве решений $\mathbf{R}^4$, причем D_0 определяется матрицами A, B и функциями f, ψ в (4). В общем случае n -мерного пространства состояний $\mathbf{R}^n$ многообразие D_0 допустимых начальных векторов может иметь любую размерность: $0 \leq \dim D_0 \leq n$. Для линейного векторного уравнения вида (4) с $\psi \equiv 0$ многообразие D_0 допустимых начальных векторов фактически описывается через нормальную форму К Вейерштрасса для регулярного пучка матриц $\lambda A + B$, когда *характеристический многочлен*

$$a(\lambda) = \det(\lambda A + B) \quad (6)$$

не является тождественным нулем для всех λ : $a(\lambda) \neq 0$.

Размерность начального многообразия линейной дескрипторной системы в $\mathbf{R}^n$ равна степени характеристического многочлена: $\dim D_0 = \deg a(\lambda)$. Более того, в каждый момент времени t многообразие $\Lambda(t) = \{x(t), \forall x(0) \in D_0\}$ значений всех возможных траекторий системы имеет такую же размерность:

$$\dim \Lambda(t) = \deg a(\lambda), \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Конечные резонансные частоты λ_k линейной части уравнения состояний вида (4) есть корни характеристического многочлена $a(\lambda)$. В отличие от случая явного дифференциального уравнения при $A = E$, здесь сумма кратностей v_k корней λ_k может быть существенно меньше размерности пространства состояний $\mathbf{R}^n$ за счет вырождения матрицы A : $\sum v_k = \deg a(\lambda) < n$. Тогда соответствующая *линейная система* имеет *бесконечную резонансную частоту* $\lambda = \infty$, алгебраическая кратность которой v_∞ согласно теории К. Вейерштрасса

$$v_\infty = n - \sum v_k = n - \deg a(\lambda). \quad (8)$$

Таким образом, для переходных режимов *линейной цепи* с дескрипторным уравнением состояний справедлив следующий *принцип фазового дефекта*.

В пространстве состояний $\mathbf{R}^n$ коразмерность t -сечения $\Lambda(t)$ фазового многообразия всех траекторий равна алгебраической кратности v_∞ бесконечной резонансной частоты $\lambda = \infty$:

$$\text{Codim } \Lambda(t) = v_\infty. \quad (9)$$

Замечание 2. Практически кратность v_∞ бесконечной резонансной частоты дескрипторной системы $A \frac{dx}{dt} + Bx(t) = 0$ может быть вычислена как алгебраическая кратность собствен-

ного числа $\mu = 0$ инверсного пучка $\mu B + A$, то есть как алгебраическая кратность нулевой резонансной частоты инверсной системы $B \frac{dy}{dt} + Ay(t) = 0$.

Кроме параметра размерности $\dim \Lambda(t)$, конкретная структура фазового многообразия $\Lambda(t)$ и, в частности, начального многообразия $D_0 = \Lambda(0)$, существенно зависит от *корневой кратности p бесконечной резонансной частоты $\lambda = \infty$* . В терминологии К. Вейерштрасса число p есть максимальная из степеней q бесконечных элементарных делителей μ^q пучка матриц $\lambda A + B$ [3, гл. XII, § 2]. В современной теории DAEs число p называется *индексом пучка $\lambda A + B$* [4,6]. Важность индекса p для характеристики переходных процессов в линейной дескрипторной системе объясняется связью индекса с точной степенной оценкой роста частотной резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$ левой части (4) при возрастании частоты $\lambda \rightarrow \infty$ [3,4]:

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C \cdot |\lambda|^{p-1}, \quad |\lambda| > r = \max_k |\lambda_k| + \varepsilon. \quad (10)$$

Здесь λ_k – конечные собственные числа пучка $\lambda A + B$ и $\varepsilon > 0$. Обратно, наименьшее целое p в оценке нормы резольвенты (10) может служить определением индекса регулярного пучка. Индекс равен нулю ($p=0$) тогда и только тогда, когда матрица A обратима ($\det A \neq 0$). В этом случае частотная резольвента убывает при возрастании частоты с гиперболической оценкой $\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|}$, $|\lambda| > r$, а уравнение (4) после умножения на матрицу

A^{-1} превращается в явное уравнение, разрешенное относительно производной $\frac{dx}{dt}$. При единичном индексе ($p=1$) резольвента ограничена на высоких частотах и для линейной системы принцип фазового дефекта (9) уточняется:

$$v_\infty = n - \text{rang} A \Rightarrow \dim \Lambda(t) = \text{rang} A. \quad (11)$$

Для более высоких индексов $p > 1$ размерность фазового многообразия $\Lambda(t)$ может быть как угодно меньше ранга матрицы A :

$$0 \leq \dim \Lambda(t) \leq \text{rang} A. \quad (12)$$

Например, пусть в (4) функция $f(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой, $\psi(x) = 0$, $B = E$ и нильпотентная матрица A имеет элементы $a_{i,i+1} = 1$ и $a_{i,k} = 0$ при $k \neq i+1$. Тогда $\text{rang} A = n-1$, однако уравнение (4) имеет единственное решение $x(t)$, фазовое многообразие $\Lambda(t)$ состоит из единственного вектора $x(t)$, так что $\dim \Lambda(t) = 0$.

Для *нелинейного уравнения* (4) описание фазового многообразия $\Lambda(t)$ и, в частности, предыдущие утверждения о его размерности, получаются лишь при специфических ограничениях на компоненты нелинейной векторной функции $\psi(x)$, см., например, [5]. Локальные теоремы существования и единственности решения полулинейных уравнений вида (4) получены в [5, 7, 8], глобальная теорема для индекса $p \leq 2$ приведена в [9].

Опишем резонансно-частотные и резольвентные характеристики уравнения (4) для модельной цепи на рисунке. Характеристический многочлен здесь

$$a(\lambda) = \det(\lambda A + B) = \lambda \cdot \Delta, \quad \Delta = L_1 - 2L_{12} + L_2 = \left(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2}\right)^2. \quad (13)$$

Следовательно, при условии $L_1 \neq L_2$ на индуктивности пучок $\lambda A + B$ является регулярным. Существует единственный конечный резонанс на нулевой частоте: $\lambda_1 = 0$. Соответствующее собственное подпространство $\{v_0: (0 \cdot A + B)v_0 = 0\}$ одномерно и задается собственным вектором пучка $v_0 = (1, -1, 0, 0)^T$. Вектор v_1 , присоединенный к собственному вектору v_0 , ол-

ределяется равенством $(0 \cdot A + B)v_1 = -Av_0$ (см. [10, с. 319]). Легко проверяется, что это равенство возможно только при условии $\Delta = 0$, где число Δ определено в (13). Однако, $\Delta \neq 0$, поэтому присоединенных векторов v_1 нет. Следовательно, собственное число $\lambda_1 = 0$ пучка $\lambda A + B$ имеет кратность $v_1 = 1$, алгебраическая кратность v_∞ бесконечной резонансной частоты равна $v_\infty = 3$ и может вычисляться по любой из двух формул (8).

Вычисление обратной матрицы дает следующий вид частотной резольвенты:

$$(B + \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} + \lambda L_2 (C_1 + C_2) & -\frac{1}{\lambda} - \lambda L_{12} (C_1 + C_2) & \frac{1}{\lambda} + \lambda (L_{12} C_1 + L_2 C_2) & L_2 - L_{12} \\ -\frac{1}{\lambda} - \lambda L_{12} (C_1 + C_2) & \frac{1}{\lambda} + \lambda L_1 (C_1 + C_2) & -\frac{1}{\lambda} - \lambda (L_1 C_1 + L_{12} C_2) & L_1 - L_{12} \\ L_{12} - L_2 & L_{12} - L_1 & L_1 - L_{12} & 0 \\ L_{12} - L_2 & L_{12} - L_1 & L_{12} - L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Очевидно, при больших частотах λ имеет место неухудшаемая оценка

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq C|\lambda|, \quad |\lambda| > r > 0. \quad (14)$$

Следовательно, индекс матричного пучка $\lambda A + B$ равен 2: $p = \text{ind}(\lambda A + B) = 2$.

Нормальная форма дескрипторных уравнений состояний

Преобразуем общее уравнение вида (4) к *нормальной форме*, используя приведение матричного пучка $\lambda A + B$ к *канонической форме К. Вейерштрасса*. Согласно [3, гл. XII, § 2] существуют две обратимые квадратные матрицы P, W , приводящие семейство матриц $\lambda A + B$ к блочно-диагональной форме:

$$P(\lambda A + B)W = \lambda A_0 + B_0, \quad A_0 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Здесь E_m – единичная матрица размерности $m \times m$, J – матрица размерности $m \times m$, H – блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой есть нильпотентные клетки Жордана N_i размеров s_i . При этом

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \sum_i s_i = n - m, \quad N_i^{s_i} = 0, \quad N_i^{s_i-1} \neq 0.$$

Легко проверить, что индекс p пучка $\lambda A + B$ совпадает с индексом канонического пучка $\lambda A_0 + B_0$ и равен $p = \max_i s_i$. Следовательно, индекс пучка $\lambda A + B$ совпадает с индексом нильпотентного матричного блока H в канонической форме (15): $H^p = 0$, $H^{p-1} \neq 0$.

После умножения на матрицу P и замены

$$x(t) = Wy(t), \quad y(t) = W^{-1}x(t) \quad (16)$$

уравнение (4) преобразуется к следующей нормальной форме:

$$A_0 \frac{dy}{dt} + B_0 y(t) = Pf(t) + P\psi(Wy). \quad (17)$$

В соответствии с блочной структурой (15) матриц A_0, B_0 канонической формы разобьем произвольный вектор $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ на две части:

$$y = y_\alpha \oplus y_\beta, \quad y_\alpha = (y_1, \dots, y_m)^T, \quad y_\beta = (y_{m+1}, \dots, y_n)^T. \quad (18)$$

Тогда нормализованное уравнение (17) записывается как пара уравнений, связанных через нелинейные функции:

$$\frac{dy_\alpha}{dt} + Jy_\alpha(t) = (Pf)_\alpha(t) + (P\psi)_\alpha(Wy). \quad (19)$$

$$H \frac{dy_\beta}{dt} + y_\beta(t) = (Pf)_\beta(t) + (P\psi)_\beta(Wy). \quad (20)$$

Уравнение (19) является разрешенным относительно производной $\frac{dy_\alpha(t)}{dt}$, а вся «дескрипторность» исходной системы (4) перенесена на уравнение (20), не разрешенное относительно производной $\frac{dy_\beta(t)}{dt}$. Здесь матрица H нильпотентна и имеет стандартную жорданову форму, описанную выше.

Для уравнения (4) модельной цепи на рисунке характеристический пучок матриц $\lambda A + B$ приводится к канонической форме (15) с помощью матриц

$$P = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{-1} \Delta \\ \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_2) & \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)(L_{12} - L_1) & L_1 - L_{12} + \frac{C_2}{C_1}(L_{12} - L_2) & 0 \\ \frac{C_2}{C_1}(L_2 - L_{12}) & \frac{C_2}{C_1}(L_1 - L_{12}) & -\Delta + \frac{C_2}{C_1}(L_2 - L_{12}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & \frac{C_1 L_2}{L_2 - L_{12}} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{C_1 L_1}{L_1 - L_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{C_2}{C_1} & -\frac{C_2}{C_1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Эти приводящие матрицы вычислены в пакете Matlab с использованием аналитических свойств частотной резольвенты $(\lambda A + B)^{-1}$, спектральных проекторов пучка [2] и методов, развитых в [4]. Матрицы P, W можно также получить чисто алгебраическими методами, вычисляя базисный набор собственных и присоединенных (корневых) векторов пучка [3, гл. XII]. Матрицы $A_0 = PAW, B_0 = PBW$ канонической формы

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Следовательно, в блочной структуре (15) $m=1$, блоки $E_m=1, J=0$ есть скаляры; $E_{n-m}=E_3$, трехмерная нильпотентная матрица H состоит из двух нильпотентных клеток Жордана:

$$H = N_1 \oplus N_2; N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (s_1 = 2); N_2 = 0 (s_2 = 1).$$

Уравнение (17) есть векторная форма системы скалярных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1. \frac{dy_1}{dt} &= -\Delta^{-1}u(t) + \Delta^{-1}[\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_2)] \\ 2. \frac{dy_3}{dt} + y_2(t) &= -C_1^{-1}[g_1(x_3) + g_2(x_4)] \\ 3. y_3(t) &= \Delta^{-1} \left[L_1 - L_{12} + \frac{C_2}{C_1}(L_{12} - L_2) \right] u(t) + \\ &+ \Delta^{-1} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \cdot \varphi(x_1, x_2) \\ 4. y_4(t) &= \left[\frac{C_2(L_2 - L_{12})}{C_1\Delta} - 1 \right] u(t) - \frac{C_2}{C_1\Delta} \cdot \varphi(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Здесь введено обозначение

$$\varphi(x_1, x_2) = (L_2 - L_{12})\varphi_1(x_1) + (L_1 - L_{12})\varphi_2(x_2), \quad (24)$$

а вместо переменных x_k в правые части равенств (24) следует подставить их выражения через y_k (см. (16, 21)):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{C_1 L_2}{L_2 - L_{12}} \cdot y_2 - y_1; \quad x_2 = y_1 + \frac{C_1 L_1}{L_1 - L_{12}} \cdot y_2 \\ x_3 &= \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) y_3 - \frac{C_2}{C_1} y_4; \quad x_4 = y_3 + y_4. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Список литературы: 1. *Bender D.I., Laub A.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1987. V. AC-32, № 6. P. 2062-2077. 2. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // *Дифференц. уравнения*. 1975. Т. 11. № 11. С. 1996-2010. 3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. 4. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006. 272 с. 5. *Rutkas A.* The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space // *Spectral and evolutionary problems. Proceedings of Sixth Crimean Fall Mathematical School-Symposium (Simferopol)*. 1996. V. 6. P. 317-320. 6. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. Zürich: European Mathematical Society Publishing House, 2006. 377 p. 7. *Favini A., Rutkas A.* Existence and uniqueness of solutions of some degenerate nonlinear equations // *Differential and Integral Equations*. 1999. V. 12, № 3. P. 373-394. 8. *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.* Existence of solutions of degenerate non-linear differential operator equations // *Nonlinear Oscillations*. 2001. V. 4, № 2. P. 252-263. 9. *Руткас А.Г., Худошин И.Г.* Глобальная разрешимость одного вырожденного дифференциально-операторного уравнения // *Нелінійні коливання*. 2004. Т.7, № 3. С. 414-429. 10. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.

Харьковский национальный
университет радиозлектроники

Поступила в редакцию 01.04.2009