УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ОБ АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТОВ

В статье дана характеристика алгебры предикатов как эффективного средства формального описания объектов бионики интеллекта.

1. Отношения

Статья является продолжением работы «О бионике интеллекта» (публикуемой в этом же номере журнала), в которой понятие предиката существенно использовалось при общей характеристике бионики интеллекта. Предикаты – это основной математический инструмент, предназначенный для формального описания объектов бионики интеллекта. Алгебру предикатов можно рассматривать как аналог школьной алгебры в логической математике (школьную же алгебру можно отнести к числовой математике). Язык алгебры предикатов представляет собой универсальное средство формального описания любых механизмов интеллекта человека и машин. Алгебра предикатов – это первая ступень формального языка для разработчиков, проектирующих средства искусственного интеллекта. Второй ступенью является алгебра предикатных операций, которую можно рассматривать как логический аналог изучаемой в вузах высшей математики (последнюю тоже можно отнести к области числовой математики). На языке алгебры предикатов выражаются любые отношения, а на языке алгебры предикатных операций – любые действия над отношениями.

Отношения выражают свойства предметов и связи между ними. Они представляют собой универсальное средство формального описания любых объектов. За две с половиной тысячи лет науке не удалось обнаружить в мире ни одного объекта, о котором можно было бы с уверенностью сказать, что он в принципе не поддается формальному описанию с помощью отношений. Никакие другие известные средства формального описания объектов (например школьная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление) свойством универсальности не обладают. Естественный язык, представляющий собой универсальное средство духовного общения людей, можно рассматривать как механизм для выражения отношений. Обращаясь с речью к другим людям, мы передаем им вполне определенный смысл произносимого предложения, который есть ничто иное, как некоторое отношение. Обмен мыслями между людьми осуществляется за счет передачи и приема отношений. Каждая мысль представляет собой какое-то отношение. Мышление же есть процесс преобразования отношений, получения новых отношений из уже имеющихся. Информация, поступающая к нам из внешнего мира, имеет вид отношений, характеризующих структуру окружающих нас предметов и процессов. Результатом действий человека во внешнем мире является приведение структуры предметов и процессов в соответствие тем отношениям, которые были сформированы в уме человека в результате его мыслительной деятельности.

Научное определение понятия отношения сформировал в первой половине XVII века Декарт, опираясь на введенные им понятия переменной и координатной системы. С помощью последних можно ввести понятие предметного пространства. Отношения задаются над предметным пространством. Поэтому прежде мы рассмотрим понятие предметного пространства. Входные сигналы, предъявляемые испытуемому в экспериментах, относящихся к теории *T*, называются *предметами* теории *T*. К примеру, в теории цветового зрения человека (которая была рассмотрена в упомянутой выше работе «О бионике интеллекта») предметами служат световые излучения. Непустое множество *U* всевозможных предметов теории *T* называется *универсумом предметов* теории *T*.

Примерами универсума предметов могут служить множества {1, 2, 3}, {α, β, γ, δ}, множество натуральных чисел; множество всех действительных чисел, множество всех *n*-мерных числовых векторов (например совокупность всех линейчатых спектров световых излучений, каждый из которых состоит из *n* линий); множество всех действительных функций на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2]$ числовой оси (например совокупность всех сплошных спектров световых излучений, каждый из которых имеет вид некоторой кривой). К примеру, в теории цветового зрения в роли универсума *U* выступает множество всех световых излучений. В принципе, и пустое множество можно взять в роли универсума предметов. Однако в этом случае получается *пустая теория* – в прямом и переносном смысле этого слова. Такая теория бесполезна. Это теория ни о чем. В пустой теории будет истинным любое утверждение.

Введем в рассмотрение *предметные переменные* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ теории T. Здесь символом m обозначено число предметных переменных. Содержательно предметные переменные можно проинтерпретировать как *места* предметов, используемые в экспериментах теории T. Предметы, занимающие определенные места, называются еще иначе *состо-*

яниями этих мест. Если предмет a находится на месте $x_i (i = \overline{1,m})$, то говорят, что переменная x_i *принимает значение* a, и пишут $x_i = a$. Приведем примеры мест и их состояний: температура человека в разных точках его тела; цвет зрительного ощущения в разных точках поля зрения: скорость автомобиля в различные моменты времени; спектральная плотность лучистой яркости светового излучения в разных точках его спектра (то есть при разных длинах волн электромагнитных колебаний). Символ m интерпретируем как число всех мест, используемых в теории T. К примеру, в теории цветового зрения местами для световых излучений служат поля сравнения x_1, x_2. Их всего два, поэтому в данном случае $m = 2$.

Непустое множество V всевозможных переменных теории T называется *универсумом переменных* теории T. Обычно универсум переменных берут конечным. Можно вводить также и бесконечные множества переменных, но в этом обычно не возникает необходимости, поскольку такие множества всегда можно выразить при помощи конечного числа переменных. Например континуальное множество переменных можно выразить одной функцией $y = f(x)$, для построения которой используются всего две числовые переменные x и y. В результате получаем бесконечное семейство $\{y_x\}$ переменных y_x с параметром $x \in R$ (R – множество действительных чисел). Поэтому мы ограничиваемся введением конечного универсума предметных переменных $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. К примеру, для теории цветового зрения универсумом переменных будет множество $V = \{x_1, x_2\}$, где предметные переменные x_1 и x_2 содержательно интерпретируются как поля сравнения в эксперименте, основанном на методе нулевого прибора.

Иногда вводят не одну, а сразу много теорий. В этом возникает необходимость, когда изучают связи между различными теориями. Бывает, что несколько теорий приходится соединять в единую теорию, в этом случае множества предметных переменных отдельных теорий объединяют в единое множество переменных новой теории. Если в теории в процессе ее развития вводятся новые предметные переменные (в дополнение к тем, которые в ней были введены ранее), то это, строго говоря, требует перехода к другой теории. Множество предметных переменных – это одно из характеристических свойств теории; если оно изменяется, то при этом изменяется и сама теория.

Если известно, что $x_1 = a_1, x_2 = a_2, ..., x_m = a_m$, то говорят о наличии *набора* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ предметов $a_1, a_2, ..., a_m$, находящихся на местах $x_1, x_2, ..., x_m$. Примерами наборов могут служить: 1) линейчатый или сплошной спектры светового излучения (каждая линия спектра находится на своем месте; в случае линейчатого спектра место линии представлено ее номером; сплошной спектр содержит в своем составе бесконечное число линий, место каждой линии в нем представлено своим действительным числом); 2) пара цветов, сравниваемых испытуемым на полях сравнения по методу нулевого прибора; 3) цветовая картина, возникающая перед сознанием человека в его поле зрения, каждая точка которого характеризуется своим цветом; 4) напряженность электрического поля в различных точках пространства; 5) температура в определенной точке некоторого тела в различные моменты времени. Вместо того, чтобы говорить, что на месте x расположен предмет a, употребляют также выражение: «место x находится в состоянии a». Как внешний (объективный), так и внутренний (субъективный) миры человека устроены единообразно: всюду мы обнаруживаем места, находящиеся в определенных состояниях. С течением времени состояния мест могут меняться.

Места и их состояния обладают следующими характерными свойствами. Не может так случиться, чтобы некоторое место в какой-то момент времени не находилось ни в каком состоянии, иначе говоря, чтобы на заданном месте не присутствовал какой-либо предмет. Еще в V в. до н. э. древнегреческий философ Парменид обнаружил, что понятие места, не имеющего никакого состояния, логически противоречиво. Это положение он выразил следующими словами: «Вы говорите, что пустота *есть*. Следовательно, пустота – не ничто. Следовательно она – не пустота». Не бывает и такого, чтобы сразу несколько предметов одновременно занимали одно и то же место. Если какой-то предмет занимает некоторое место, то никакой другой предмет в данный момент времени там находиться уже не может. С первого взгляда такое утверждение кажется ложным. В самом деле, мы знаем, например, что одна и та же точка тела может одновременно испускать монохроматические световые лучи разной длины волны. Это наводит на мысль о том, что одно и то же место в какой-то момент времени может одновременно находиться во многих состояниях. Но, вникнув в суть сказанного, мы обнаруживаем, что у каждого такого светового луча имеется свое место на шкале длин волн.

Чтобы избежать противоречий, все состояния, обнаруженные якобы на одном и том же месте, приходится объединять в одно многокомпонентное состояние. Исходные же состояния теперь становятся компонентами некоторого векторного состояния, причем для каждого компонента такого вектора всегда найдется свое место. Ведь если предметы, которые кажутся расположенными на одном и том же месте, отличны друг от друга, то всегда найдется различающий их признак. Тогда ничто не сможет помешать нам принять значения этого признака в качестве мест для данных предметов. Так, например, отдельные спектральные линии в световом излучении объединяют в одно сложное (векторное) состояние, называемое спектром. В роли мест для спектральных линий можно принять длины волн соответствующих монохроматических световых излучений. Термин «место», таким образом, иногда приходится понимать в обобщенном смысле. Не обязательно место понимать как точку в трехмерном физическом пространстве. Местом, к примеру, может быть некоторый момент времени, отметка на шкале частот, порядковый номер, одно из полей шахматной доски.

Понятие набора не совпадает с понятием множества. Например множество $\{a,b\}$ не изменится, если в его записи поменять местами предметы a и b; однако набор (a,b) после выполнения той же операции становится иным. Не совпадает понятие набора и с понятием упорядоченного множества, то есть такого множества, на котором введено какое-нибудь отношение порядка. К примеру, множество чисел «1,2,3», упорядоченное отношением <, после перестановки в его записи символов 1 и 2, уже не будет упорядоченным относительно отношения <. Набор же предметов (1,2,3), после выполнения той же операции, останется набором, хотя и иным. Ближе всего к понятию набора подходит математическое понятие последовательности, которое определяется как функция с произвольно выбираемым множеством значений, заданная на множестве натуральных чисел. Понятие набора обобщает понятие последовательности. Его можно определить как функцию, отображающую произвольно выбранное множество V элементов, называемых местами, в произвольно выбранное множество U элементов, называемых предметами (или состояниями). Можно сказать и иначе: набор есть индексированное множество предметов $\{y_x\}$ $(x \in V, y \in U)$.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_m \in U$ и $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_m = a_m$, то пишут $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in U^m$ и говорят, что *набор* (иначе– *вектор, кортеж*) $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ принадлежит *предметному пространству* U^m. Число m называется *длиной* набора (или *размерностью* вектора). Запись U^m читается «U в (декартовой) степени m». Если множество V выбрано конечным, то предметное пространство называется *конечномерным*, в противном случае – *бесконечномерным*. Часто сами переменные используют в роли их значений. В этом случае вместо $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ пишут $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Что именно имеется в виду в каждом конкретном случае такой записи – переменные или их значения, определяется читателем по контексту. Пространство U^m теории T образовано из всевозможных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, каждый из которых составлен из предметов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ теории T. Число m называется *размерностью пространства* U^m. Оно должно совпадать с числом всех мест, используемых в экспериментах теории T. Любое подмножество P пространства U^m называется m-местным *отношением*, заданным над U^m. Примером отношения в теории цветового зрения может служить множество пар равноцветных световых излучений.

Понятие отношения можно обобщить. Сделать это можно следующим образом. Произвольно выберем m каких-нибудь непустых необязательно различных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ универсума U. Образуем множество S всевозможных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, составленных из предметов $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$. Так определенное множество S называется *декартовым произведением* множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Оно записывается в виде $S = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Множество S называется также *подпространством* предметного пространства U^m. *Множества* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называются *координатными осями* подпространства S. Отношения можно задавать не только над всем пространством U^m, но также и над любым из его подпространств. В этом случае набор множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ определяет *тип отношения*. Отношение типа $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ определяется как подмножество декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Отношения, заданные на одном и том же декартовом произведении, называются *однотипными*. Если тип отношения определен, то конкретный универсум U пространства можно не указывать. Достаточно довольствоваться возможностью его введения. В роли универсума можно использовать любое множество, охватывающее объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$. В частном случае, принимая $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = U$, приходим к первоначально введенному нами понятию предметного пространства.

Рассмотрим пример отношения. Пусть $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $V = \{x_1, x_2\}$, $m = 2$, $A_1 = \{1,2,3,4\}$, $A_2 = \{3,4,5,6\}$. Подпространство $S = A_1 \times A_2$ есть множество всех пар вида (x_1, x_2), удовлетворяющих условию $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$: $S = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\}$. Декартово произведение S состоит из $4 \times 4 = 16$ двухкомпонентных векторов. В роли отношения P берем какое-нибудь одно из его подмножеств, например, $P = \{(1,6), (2,4), (3,3), (4,3), (4,4)\}$. Всего в подпространстве S можно образовать $2^{16} = 65536$ отношений. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного вектора, называется *пустым*, отношение; образованное из всевозможных векторов подпространства S, – *полным*.

Остановимся особо на одноместных и двуместных отношениях. Если в записи одноместного отношения убрать круглые скобки, то получится запись соответствующего ему множества, например, из отношения $\{(1),(3),(4)\}$ получаем множество$\{1,3,4\}$. Такие отношения и множества взаимно однозначно связаны друг с другом, поэтому их можно не различать. В дальнейшем, для краткости, вместо одноместных отношений будем записывать соответствующие им множества. Двуместные отношения удобно наглядно представлять в виде двудольных графов. Ниже для примера на рис. 1 изображен двудольный граф отношения $P=\{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$. Каждой паре, входящей в состав отношения, соответствует свое ребро графа, которое соединяет его вершины, помеченные именами компонентов этой пары.

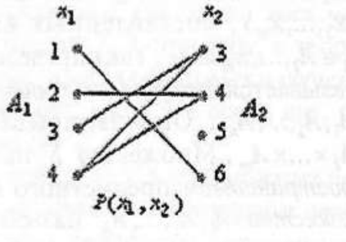

Рис. 1

Это же отношение можно представить в виде графиков (рис. 2, 3) и таблиц (табл. 1, 2) различного вида.

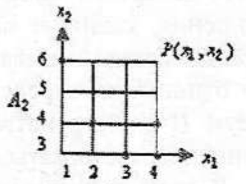

Рис. 2

Таблица 1

x_1	1	2	3	4	4
x_2	6	4	3	3	4

$P(x_1,x_2)$

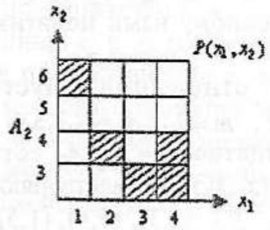

Рис. 3

Таблица 2

x_1	x_2
1	6
2	4
3	3
4	3
4	4

Для выражения m-местных отношений используются m-мерные графики и таблицы с m строками или m столбцами.

Любое отношение можно содержательно проинтерпретировать как знание о факте, выраженное некоторым высказыванием. *Факт* – это однозначная характеристика набора наблюдаемых состояний заданной совокупности мест. *Знание* же о факте не всегда обладает такой однозначностью, оно задает лишь некоторое множество возможных вариантов наборов состояний мест, то есть какое-то отношение. Факт однозначно характеризуется множеством, состоящим из одного набора состояний мест. Ничем иным факты и знания быть не могут. Проинтерпретируем, к примеру, этим способом записанное выше отношение P. Заданы два места x_1 и x_2. Изначально известно, что состояния места x_1 не могут выходить за пределы множества $\{1,2,3,4\}$, а состояния места x_2 – за пределы множества $\{3,4,5,6\}$. Отсюда следует, что с самого начала число возможных наборов состояний ограничено 16-ю парами. Предположим, что факт (то есть пара состояний мест x_1 и x_2, имеющих место в действительности) наблюдателю неизвестны. Объективно же факт всегда характеризуется какой-то вполне определенной парой состояний, например, парой (4,3). Это означает, что место x_1 находится в состоянии 4, а место x_2 – в состоянии 3. Но наблюдатель этого не знает, он располагает лишь знанием о факте, выраженным отношением $P=\{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$, которое сужает множество возможных пар состояний с 16 до 5. Опираясь на это знание, наблюдатель заключает, что пары состояний (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6) не имеют места в действительности. Эту информацию он может использовать в своих рассуждениях при выработке каких-либо решений.

Высказывание о факте может быть истинным или ложным. Оно *истинно*, если характеризующее его отношение содержит в себе факт, то есть набор состояний мест, имеющий место в действительности, и *ложно* в противном случае. Например, если факт характеризуется парой (4,3), то высказывание, соответствующее отношению P, истинно, поскольку $(4,3)\in\{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$. Высказывание же, соответствующее отношению $\{(1,6),\ (2,4)\}$, ложно, поскольку $(4,3)\notin\{(1,6),\ (2,4)\}$. Высказывание, которому соответствует пустое отношение, *противоречиво*, поскольку невозможно, чтобы места $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не находились ни в каких состояниях. Высказывание, отвечающее полному отношению S, образованному из всевозможных наборов состояний, *тавтологично* (бессодержательно), так как не несет никакой новой информации о факте: оно никак не ограничивает изначально заданное множество из 16-ти наборов состояний. Любое высказывание, которому соответствует непустое отношение, *выполнимо*, поскольку для него всегда найдется такой фактический набор состояний, для которого оно будет истинным.

Высказывание *B выводимо* (следует) из высказывания *A*, если отношение P_A, соответствующее высказыванию *A*, включено в отношение P_B, соответствующее высказыванию *B*. Пусть, к примеру, $P_A=\{(1,6),\ (2,4)\}$, $P_B=\{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$. Мы видим, что отношение P_A включено в отношение $P_B:\{(1,6),\ (2,4)\}\subseteq\{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$. Отсюда вытекает, что высказывание B следует из высказывания A. В этом случае пишут $A\Rightarrow B$. Если же $P_{A'}=\{(1,6),\ (4,5)\}$, то $P_{A'}$ не включено в P_B, а значит, из A' не следует B. Противоречивое высказывание нельзя вывести ни из одного выполнимого высказывания, тавтологичное высказывание следует из любого высказывания, из противоречивого высказывания выводимо любое высказывание.

Высказывания выражаются предложениями, которые бывают утвердительными, вопросительными и повелительными. *Утвердительное предложение* выражает высказывание, которое несет в себе знание о некотором факте. Это знание характеризуется вполне определенным отношением. *Вопросительные предложения* бывают двух родов. *Вопросительное предложение первого рода* требует двоичного ответа типа «да» или «нет», например, «Идет дождь? – Да». Чтобы дать на него правильный ответ, надо преобразовать вопросительное предложение в утвердительное (в нашем примере формируем утвердительное предложение «Идет дождь»), извлечь из него содержащееся в нем отношение и проверить, охватывает ли это отношение фактический набор состояний. К примеру, если задан вопрос, соответствует ли отношение P факту (4,3), то следует ответить утвердительно, поскольку $(4,3) \in \{(1,6),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,3),\ (4,4)\}$. Отношение же {(1,6), (2,4)} факту (4,3) не соответствует, поскольку $(4,3) \notin \{(1,6),\ (2,4)\}$.

Вопросительное предложение второго рода требует развернутого ответа, например, «Который час? – Без четверти два». Чтобы дать на него правильный ответ, надо сформировать какое-нибудь отношение, охватывающее фактический набор состояний. Если, к примеру, факт характеризуется парой (4,3), то ответ, выражающий отношение {(1,6), (4,3)}, будет правильным, а ответ, выражающий отношение {(1,6), (2,4)}, – неправильным. Чем меньше в сформированном отношении содержится наборов состояний, тем более содержательным будет ответ. Ответ, который соответствует отношению, состоящему из единственного набора, будет полностью характеризовать фактические состояния всех мест. Такой ответ называется *однозначным* (исчерпывающим). В нашем примере отношение {(1,6), (4,3)} характеризует факт (4,3) более полно, чем отношение {(1,6), (2,4), (3,3), (4,3), (4,4)}. Отношение же {(4,3)} несет в себе исчерпывающую информацию о факте (4,3).

Повелительное предложение, в отличие от вопросительного, требует не слов, а действий, например «Решайте задачу!». Чтобы выполнить повеление, тот, к кому оно обращено, должен сформировать состояния указанных ему мест так, чтобы содержащееся в повелении отношение стало соответствовать действительному положению дела. Чтобы выполнить повеление «Решайте задачу!», надо найти такое решение, которое удовлетворяло бы условиям поставленной задачи. Если, к примеру, задано отношение {(1,6), (4,3)}, то действия, приводящие к фактическому положению, которое характеризуется парой (1,6) (или парой (4,3)), будут правильными, действия же, формирующие пару (2,4), будут неправильными.

Рассмотренное нами исходное понятие отношения может показаться случайно выбранной и ничем не примечательной математической конструкцией. Понятие отношения с первого взгляда воспринимается как рядовое, примитивное и неказистое, тем не менее, его роль в науке совершенно исключительна. Потребовался гений Декарта, чтобы понятие отношения выделить из числа многих ему подобных и увидеть в нем основание всей науки и даже всего мироздания. Все, что находится вне и внутри нас, может быть выражено отношениями. Это обусловлено тем, что мир основан на очень простых и единообразных принципах логики.

Отношения, являющиеся частями одного и того же пространства, однотипны. Над однотипными отношениями можно выполнять операции объединения, пересечения и дополнения. *Объединением отношений* P и Q называется отношение $P \cup Q$, образованное из всех наборов отношения P и всех наборов отношения Q. Например $\{(1,6),\ (2,4)\} \cup \{(1,6),\ (4,3)\} = \{(1,6),\ (2,4),\ (4,3)\}$. *Пересечением отношений* P и Q называется отношение $P \cap Q$, образованное из всех тех наборов, которые содержаться как в отношении P, так и в отношении Q. Например $\{(1,6),\ (2,4)\} \cap \{(1,6)\ (4,3)\} = \{(1,6)\}$. *Дополнением отношения* P называется отношение $\sim P = \tilde{P}$, образованное из всех наборов пространства , за исключением тех наборов, которые присутствуют в отношении . Например ~{(1,6), (2,4), (3,3), (4,3), (4,4)}{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6)}.

Объединению $P_A \cup P_B$ отношений $\neg\ A = \bar{A}$ и P_B соответствует высказывание $A \vee B$, называемое *дизъюнкцией высказываний* A и B. Оно образуется соединением исходных высказываний союзом «или». Например дизъюнкцией высказываний «Идет дождь» и «Светит солнце» будет высказывание «Идет дождь или светит солнце». Пересечению $P_A \cap P_B$ отношений P_A и P_B соответствует высказывание $A \wedge B$, называемое *конъюнкцией высказываний* A и B. Оно образуется соединением исходных высказываний союзом «и». Например конъюнкцией тех же высказываний будет высказывание «Идет дождь и светит солнце». Дополнению $\sim P_A$ отношения P_A соответствует высказывание $\neg\ A = \bar{A}$, называемое *отрицанием* высказывания A. Оно образуется присоединением к исходному высказыванию частицы «не». Например отрицанием высказывания «Идет дождь» будет высказывание «Не идет дождь». Это же высказывание можно выразить предложением «Ложно, что идет дождь».

2. Предикаты

Важно располагать математическими средствами записи отношений с помощью формул. Как показывает опыт развития науки и техники, нет более удобного и практичного средства описания объектов, чем формулы. Формулы не только дают названия объектам, но и выражают их глубинные свойства и структуру. Вместо того, чтобы ставить опыты над реальными объектами, можно «поэкспериментировать» с формулами, описывающими эти объекты, и получить все интересующие нас сведения о них. Отношения, выраженные формулами, можно «оживить» при помощи ЭВМ, которая будет воспроизводить поведение описываемых ими объектов. При этом, как можно надеяться, у вычислительной машины появятся мысли, соответствующие этим отношениям, и она приобретет способность их обрабатывать, то есть мыслить. Обращаясь к опыту математики, можно заметить, что формулами всегда выражаются только функции. Видимо, никакие другие математические объекты не поддаются формульному описанию. Но отношение – это не функция, а нечто более общее. Известны различные способы выражения отношений: множествами наборов предметов, графами, графиками, таблицами. Но среди них нет ни одного формульного.

Известен такой метод: если не представляется возможным решить какую-то задачу, то ее заменяют другой взаимно однозначно связанной с нею задачей, которая поддается решению. Затем переводят полученное решение на язык первой задачи. В результате получают решение исходной задачи. Мы применим этот метод для отыскания способа формульной записи отношений. Называется он *методом перевода*. Возьмем какое-нибудь отношение P_A и перейдем к соответствующему ему высказыванию A. Это высказывание будет истинным относительно одних фактов и ложным по отношению к другим. Например высказывание, соответствующее отношению $P=\{(1,6), (2,4), (3,3), (4,3), (4,4)\}$, будет истинным для факта (4,3), поскольку $(4,3)\in P$, и ложным относительно факта (2,3), так как $(2,3)\notin P$. Факт истинности высказывания будем выражать символом 1, а факт его ложности – символом 0. Символ 1 называется *истиной*, символ 0 – *ложью*. Действуя так, мы приходим к функции $P(x_1,x_2)$ с двоичными значениями 0 и 1, определенной на декартовом произведении

$$A_1\times A_2=\{1,2,3,4\}\times\{3,4,5,6\}.$$

Ниже приводится табл. 3 этой функции.

Функции такого типа называются предикатами. Сформулируем общее определение понятия предиката. *Предикатом*, заданным на декартовом произведении $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$, называется любая функция $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\xi$, отображающая декартово произведение $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$ множеств $A_1,A_2,\ldots,A_m$ во множество $\Sigma=\{0,1\}$. Символы 0 и 1 называются *булевыми элементами*, Σ – множество всех булевых элементов. Переменная $\xi\in\{0,1\}$, являющаяся значением предиката P, называется *булевой*. Предикат $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, в отличие от соответствующего ему отношения P, есть функция, поэтому появляется надежда, что его удастся выразить в виде формулы. Между отношениями и предикатами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому, имея формулу какого-либо предиката, мы всегда сможем отнести ее и к соответствующему отношению. Предикат $P(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ на $A_1\times A_2\times\ldots\times A_m$ называется *конечным*, если все множества $A_1,A_2,\ldots,A_m$ конечны, и *бесконечным* – в противном случае. Эта же терминология переносится и на соответствующие предикатам отношения. Переменные $x_1,x_2,\ldots,x_m$ называются *аргументами предиката P*.

Таблица 3

x_1 \ x_2 (A_1 \ A_2)	3	4	5	6
1	0	0	0	1
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	1	1	0	0

$P(x_1,x_2)$

Запишем правила, позволяющие переходить от отношений к соответствующим им предикатам и обратно. Пусть L – множество всех отношений над S, M – множество всех предикатов на S. Отношение P из L и предикат P из M называются *соответствующими* друг другу, если при любых $x_1\in A_1, x_2\in A_2,\ldots,x_m\in A_m$:

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\begin{cases}1, если\ (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in P,\\ 0, если\ (x_1,x_2,\ldots,x_m)\notin P.\end{cases} \quad (1)$$

Зная отношение P, можно всегда с помощью правила (1) отыскать все значения предиката P, то есть дать полную его характеристику (например, представить предикат P в виде таблицы). Обратный переход от предиката P к отношению P можно осуществить с помощью следующего правила:

$$\text{если } P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=1\text{, то } (x_1,x_2,\ldots,x_m)\in P;$$

$$\text{если } P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0\text{, то } (x_1,x_2,\ldots,x_m)\notin P. \quad (2)$$

Правило (2) позволяет по известным булевым (двоичным) значениям предиката P найти все наборы предметов, принадлежащие отношению P. Правила (1) и (2) устанавливают взаимно однозначное соответствие между всеми отношениями множества L и всеми предикатами множества M, заданными на S. Множество всех векторов $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, удовлетворяющих уравнению

$P(x_1,x_2,\ldots,x_m)=1$, образует отношение P, которое называется *областью истинности предиката* P. Предикат $P\in M$, определяемый правилом (1), называется *характеристической функцией отношения* $P\in L$. В дальнейшем с целью упрощения символики предикат будем обозначать знаком точно так же, как и соответствующее ему отношение. Из контекста всегда будет легко установить, к чему относится символ – к предикату или отношению.

Любое уравнение, встречающееся в математике, есть отношение. Возьмем, к примеру, уравнение $x+y=3$, где x и y заданы на множестве $A=\{0,1,2,3\}$, и отыщем соответствующее ему отношение P. Имеем: $P=\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$. Переходим к табл. 4 соответствующего предиката P. Для этого во всех ячейках таблицы с координатами x, y проставляем 1, если $(x,y)\in P$, и 0, если $(x,y)\notin P$.

Таблица 4

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

$P(x,y)$

От таблицы предиката P, если потребуется, можем перейти назад к отношению P, которое теперь для разнообразия представляем в нашем примере в виде двудольного графа. Делаем это, поочередно обходя все ячейки таблицы с единицами. По координатам x, y каждой ячейки проводим ребро графа, соединяющее его вершины, помеченные символами x и y. Выполнив это, получаем граф, изображающий отношение (рис. 4).

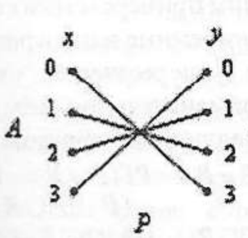

Рис. 4

Над булевыми элементами можно выполнять операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. *Дизъюнкцией булевых элементов* ξ и η называется операция $\xi\vee\eta$, отображающая $\Sigma\times\Sigma$ в Σ, значения которой определяются равенствами $0\vee 0=0$; $0\vee 1=1\vee 0=1\vee 1=1$. *Конъюнкцией булевых элементов* ξ и η называется операция $\xi\wedge\eta=\xi\cdot\eta=\xi\eta$, отображающая $\Sigma\times\Sigma$ в Σ, значения которой определяются равенствами: $0\wedge 0=0\wedge 1=1\wedge 0=0$; $1\wedge 1=1$. *Отрицанием булева элемента* ξ называется операция $\neg\xi=\overline{\xi}$, отображающая Σ в Σ, значения которой определяются равенствами: $\neg 0=1$, $\neg 1=0$. Дизъюнкцию еще иначе называют *логическим сложением*, а конъюнкцию – *логическим умножением*.

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания подчиняются *законам идемпотентности* $\xi\vee\xi=\xi$, $\xi\xi=\xi$; *коммутативности* $\xi\vee\eta=\eta\vee\xi$, $\xi\eta=\eta\xi$; *ассоциативности* $(\xi\vee\eta)\vee\zeta=\xi\vee(\eta\vee\zeta)$, $(\xi\eta)\zeta=\xi(\eta\zeta)$; *дистрибутивности* $(\xi\vee\eta)\zeta=\xi\zeta\vee\eta\zeta$, $\xi\eta\vee\zeta=(\xi\vee\zeta)(\eta\vee\zeta)$; *элиминации (поглощения)* $\xi\vee\xi\eta=\xi$, $\xi(\xi\vee\eta)=\xi$; *свертывания* $\xi\vee\xi\overline{\eta}=\xi$, $\xi(\eta\vee\overline{\eta})=\xi$; *де Моргана* $\overline{\xi\vee\eta}=\overline{\xi}\,\overline{\eta}$, $\overline{\xi\eta}=\overline{\xi}\vee\overline{\eta}$; *двойного отрицания* $\overline{\overline{\xi}}=\xi$; *исключенного третьего* $\xi\vee\overline{\xi}=1$, *противоречия* $\xi\overline{\xi}=0$; *лжи* $\xi\vee 0=\xi$, $\xi\cdot 0=0$ и *истины* $\xi\cdot 1=\xi$, $\xi\vee 1=1$. Все законы справедливы при любых $\xi,\eta,\zeta\in\Sigma$.

Записанные равенства называются *законами алгебры булевых элементов*. Все законы, кроме закона двойного отрицания, парные. Говорят, что в каждой паре они *двойственны* друг другу. Закон же двойного отрицания *самодвойствен* (двойствен самому себе). Двойственные законы превращаются друг в друга заменой в них знака $\vee$ на знак $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$, 0 на 1 и 1 на 0. Справедливость законов алгебры булевых элементов доказывается методом полного перебора. Например для доказательства первого закона де Моргана надо проверить выполнение следующих четырех равенств $\overline{0\vee 0}=\overline{0}\cdot\overline{0}$, $\overline{0\vee 1}=\overline{0}\cdot\overline{1}$, $\overline{1\vee 0}=\overline{1}\cdot\overline{0}$, $\overline{1\vee 1}=\overline{1}\cdot\overline{1}$.

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания можно распространить также и на предикаты. Определяются они следующими равенствами для любых $x_1\in A_1, x_2\in A_2,\ldots,x_m\in A_m$:

$$(P\vee Q)(x_1,x_2,\ldots,x_m)=P(x_1,x_2,\ldots,x_m)\vee Q(x_1,x_2,\ldots,x_m);\quad(3)$$

$$(P\wedge Q)(x_1,x_2,\ldots,x_m)=P(x_1,x_2,\ldots,x_m)\wedge Q(x_1,x_2,\ldots,x_m);\quad(4)$$

$$(\neg P)(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\neg(P(x_1,x_2,\ldots,x_m)).\quad(5)$$

Символы $\vee$, $\wedge$, $\neg$, стоящие в (3)–(5) слева от знаков равенства, обозначают операции над предикатами; справа эти же символы обозначают операции над значениями предикатов, то есть над булевыми элементами. Согласно определению (3) предикат $P\vee Q$ можно получить, проставляя в каждой ячейке его таблицы дизъюнкцию значений предикатов P и Q при тех же наборах значений аргументов, то есть образуя дизъюнкцию логических элементов, содержащихся в одинаково расположенных ячейках таблиц предикатов P и Q. Аналогично заполняются таблицы конъюнкции $P\wedge Q$ предикатов P и Q и отрицания $\overline{P}$ предиката P. Ниже даны примеры построения таблиц дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов (табл. 5–9).

Таблица 5

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	1

$P(x,y)$

Таблица 6

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	0	0	0	1
1	0	1	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	0	1

$Q(x,y)$

Таблица 7

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	1	0	0	1
1	1	1	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	0	1

$(P \vee Q)(x,y)$

Таблица 8

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1

$(P \wedge Q)(x,y)$

Таблица 9

$x \backslash y$	2	3	4	5
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	0

$\overline{P}(x,y)$

Предикат, во всех ячейках таблицы которого стоят нули, называется *тождественно ложным* и обозначается символом 0. Если же во всех ячейках таблицы предиката стоят единицы, то такой предикат называется *тождественно истинным.* Он обозначается символом 1. Тождественно ложному предикату соответствует пустое отношение, тождественно истинному – полное.

Операции $\cup$, $\cap$, ~ над отношениями из L и операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ над предикатами из M называются *соответствующими* друг другу. Если ими действовать на отношения и предикаты, соответствующие друг другу, то в результате будут получаться отношения и предикаты, также соответствующие друг другу. Образуем, к примеру, по предикатам P и Q, заданным вышеприведенными таблицами, соответствующие им отношения $P=\{(0,2), (0,5), (1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,5)\}$, $Q=\{(0,5), (1,3), (1,4), (2,3), (2,5), (3,5)\}$ и найдем их объединение и пересечение, а также дополнение отношения P: $P \cup Q=\{(0,2), (0,5), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,5), (3,2), (3,5)\}$, $P \cap Q=\{(0,5), (1,3), (2,3), (3,5)\}$, $\sim P=\{(0,3), (0,4), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4)\}$. Переходя от полученных отношений к соответствующим им предикатам, получаем совпадение с предикатами, указанными в таблицах.

С помощью равенств (3)–(5) законы для операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, введенные нами ранее для булевых элементов, легко переносятся на одноименные операции над предикатами. Например

$$\overline{(P \vee Q)}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = \neg\ (P \vee Q)(x_1,x_2,\ldots,x_m) =$$

$$= \neg(P(x_1,x_2,\ldots,x_m) \vee Q(x_1,x_2,\ldots,x_m)) =$$

$$= \neg P(x_1,x_2,\ldots,x_m) \wedge \neg Q(x_1,x_2,\ldots,x_m) =$$

$$= (\overline{P})(x_1,x_2,\ldots,x_m) \wedge (\overline{Q})(x_1,x_2,\ldots,x_m) =$$

$$= (\overline{P} \wedge \overline{Q})(x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

для любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$. Следовательно, $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$. Итак, для любых $P,Q,R \in M$ $P \vee P = P$, $PP = P$; $P \vee Q = Q \vee P$, $PQ = QP$; $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$, $(PQ)R = P(QR)$; $(P \vee Q)R = PR \vee QR$, $PQ \vee R = (P \vee R)(Q \vee R)$; $P \vee PQ = Q$, $P(P \vee Q) = P$; $P \vee Q\overline{Q} = P$, $P(Q \vee \overline{Q}) = P$; $\overline{P \vee Q} = \overline{P}\,\overline{Q}$, $\overline{PQ} = \overline{P} \vee \overline{Q}$; $\overline{\overline{P}} = P$; $P \vee \overline{P} = 1$, $P\overline{P} = 0$; $P \vee 0 = P$, $P \cdot 0 = 0$; $P \cdot 1 = P$, $P \vee 1 = 1$. Теперь символы 0 и 1 означают не булевы элементы, а тождественно ложный и тождественно истинный предикаты. Записанные равенства называются *законами алгебры предикатов.*

Мы видим, что при переходе от булевых элементов к предикатам форма законов для операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания остается неизменной, хотя сами операции теперь воздействуют на объекты другой природы. Известно много разных троек операций, которые подчиняются тем же законам. Еще одним примером таких операций могут служить рассмотренные нами в разделе 1 операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и дополнения ~ отношений. Применительно к ним те же законы перепишутся следующим образом: для любых $P,Q,R \in L$ $P \cup P = P$, $P \cap P = P$; $P \cup Q = Q \cup P$, $P \cap Q = Q \cap P$; $(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$, $(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$; $(P \cup Q) \cap R = (P \cap R) \cup (Q \cap R)$, $(P \cap Q) \cup R = (P \cup R) \cap (Q \cup R)$; $P \cup (P \cap Q) = Q$, $P \cap (P \cup Q) = P$; $P \cup (Q \cup \sim Q) = P$, $P \cap (Q \cap \sim Q) = P$; $\sim(P \cup Q) = \sim P \cap \sim Q$; $\sim(P \cap Q) = \sim P \cup \sim Q$; $\sim\sim P = P$; $P \cup \sim P = S$, $P \cap \sim P = \varnothing$; $P \cup \varnothing = P$; $P \cap \varnothing = \varnothing$; $P \cap S = P$, $P \cup S = S$. Записанные равенства называются *законами алгебры отношений.*

Можно выделить все то общее, что содержится в этих трех формулировках законов. Это «общее» называется булевой алгеброй. Ниже дается ее определение. *Булевой алгеброй* называется любое фиксированное множество B хотя бы с двумя какими-нибудь элементами 0 и 1 в нем и с заданными на этом множестве какими-либо операциями $x+y$, $x\ y$ и $-x$, называемыми *сложением*, *умножением* и *обращением элементов* $x,y\in B$, которые при любых $x,y,z\in B$ подчиняются следующим семи законам: $x+x=x$, $x+y=y+x$, $(x+y)+z=x+(y+z)$, $(x+y)z=xz+yz$, $x+y(-y)=x$, $-(x+y)=(-x)(-y)$, $-(-x)=x$. Эти законы называются *аксиомами булевой алгебры*. Остальные законы, а именно $xx=x$, $xy=yx$, $(xy)z=x(yz)$, $xy+z=(x+z)(y+z)$, $x+xy=x$, $x(x+y)=x$, $x(y+(-y))=x$, $-(xy)=(-x)+(-y)$, $x+(-x)=1$, $x(-x)=0$, $x+0=x$, $x\cdot 0=0$, $x\cdot 1=x$, $x+1=1$, в булевой алгебре также выполняются, однако в перечне аксиом их приводить нет необходимости, поскольку они логически вытекают из указанных аксиом. Определение булевой алгебры, в силу своей общности, охватывает целое семейство родственных конкретных алгебр. В роли множества *B*, его элементов 0 и 1, а также операций сложения, умножения и обращения элементов множества *B* можно брать любые объекты без каких бы то ни было ограничений. Каждый такой их выбор, который обеспечивает выполнение всех перечисленных аксиом, дает один из возможных вариантов булевой алгебры. Если в роли множества *B* мы возьмем множество всех *n*-местных булевых функций, в роли 0 и 1 – булевы элементы 0 и 1, а в роли операций +, × и – – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание булевых функций, то получим *булеву алгебру булевых функций*. Если под множеством *B* будем понимать множество *L* всех отношений какого-нибудь типа, под знаками 0 и 1 – пустое и полное отношения, а под знаками +, × и – – объединение, пересечение и дополнение отношений, то приходим к *булевой алгебре отношений*. Понимая же под *B* множество *M* всех предикатов некоторого типа, под знаками 0 и 1 – тождественно ложный и тождественно истинный предикаты, а под знаками +, ×, – – дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание предикатов, приходим к *булевой алгебре предикатов*. При изучении интеллекта булева алгебра играет исключительно важную роль, она описывает самые глубинные механизмы интеллекта, его первооснову. Можно сказать и иначе: булева алгебра – это тот каркас, который скрепляет в единое целое здание интеллекта.

3. Алгебра предикатов

В разделе 2 мы ввели предикаты и булевы операции над ними. Теперь займемся разработкой способа формульной записи предикатов заданного типа. Тип предиката задаем, указывая множества $V=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ и $A_i=\{a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik_i}\}$, $i=\overline{1,m}$, k_i – число элементов в множестве A_i. Чтобы не усложнять задачу, будем пока считать, что все множества A_i конечны. Мы хотим записать формулой произвольно выбранный конечный предикат $P(x_1,x_2,\dots,x_m)$ заданного типа. Для построения формул нам понадобятся базисные предикаты, играющие роль исходных строительных блоков, и базисные операции, обеспечивающие соединение блоков в единую конструкцию, каковой является искомая формула. В роли базисных предикатов используем предикаты 0, 1, а также специальные предикаты, называемые *предикатами узнавания предмета a по переменной* x_i ($i=\overline{1,m}$, $a\in A_i$) и записываемые в виде x_i^a. Предикат x_i^a «узнаёт» произвольно выбранный из множества A_i предмет x_i, сравнивая его с предметом a. Если $x_i=a$, то он отождествляет x_i с предметом a, сигнализируя об этом положительным ответом $x_i^a=a^a=1$. Если же $x_i=b$ ($b\neq a$), то предикат x_i^a отличает предмет b от предмета a, сигнализируя об этом отрицательным ответом $x_i^a=b^a=0$. Мы приходим к следующему определению:

$$x_i^a=\begin{cases}1, \text{ если } x_i=a,\\ 0, \text{ если } x_i\neq a.\end{cases} \tag{1}$$

Символ a, который стоит в показателе записи x_i^a, называется *характеристикой предиката узнавания предмета* x_i^a. Указание предмета a и значения индекса i полностью определяет предикат вида (1). В роли способов соединения выбранных нами строительных блоков (то есть предикатов 0, 1 и предикатов вида x_i^a) используем введенные нами ранее операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания предикатов. В результате получаем так называемую *алгебру предикатов*.

Для предикатов узнавания предмета справедливы:

закон отрицания:

$$\overline{x_i^a}=\bigvee_{\substack{b\in A_i\\ b\neq a}} x_i^b,$$

закон ложности:

$$\text{если } b\neq a, \text{ то } x_i^a x_i^b=0,$$

закон истинности:

$$\bigvee_{b\in A_i} x_i^b=1.$$

Все эти законы справедливы при любых $i=\overline{1,m}$; $x_i\in A_i$; $a,b\in A_i$.

Для примера запишем закон отрицания для предметной переменной x_3, ее области изменения $A_3=\{a_1,a_2,a_3\}$ и предметов a_1 и a_2. Имеем: $\overline{x_3^{a_1}}=x_3^{a_2}\vee x_3^{a_3}$; $\overline{x_3^{a_2}}=x_3^{a_1}\vee x_3^{a_3}$. Как видим, закон отрицания можно использовать для исключения отрицания из формул алгебры предикатов и как средство введения отрицания в формулу, когда это потребуется. Запишем, к примеру, закон ложности для предметной переменной y и предметов a и c. Имеем $y^b y^c=0$, однако по второму закону идемпотентности получаем $y^b y^b = y^b$ и $y^c y^c = y^c$. Это означает, что при $b = c$ закон ложности не выполняется. Закон ложности выражает факт попарной различимости элементов в каждом из множеств $A_1, A_2, ..., A_m$. Наконец, запишем, к примеру, закон истинности для предметных переменных $x, y \in A$ ($A = \{a, b, c\}$). Имеем $x^a \vee x^b \vee x^c = 1$, $y^a \vee y^b \vee y^c = 1$. Закон истинности перечисляет все элементы, содержащиеся в каждом из множеств $A_1, A_2, ..., A_m$.

На языке формул алгебры предикатов можно очень просто записать любое отношение. Отдельный факт, представленный набором $(a_1, a_2, ..., a_m)$ состояний $a_1, a_2, ..., a_m$ мест $x_1, x_2, ..., x_m$, можно выразить высказыванием «$x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$ и ... и $x_m = a_m$», что на языке алгебры предикатов запишется формулой $x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, ..., x_m^{a_m}$. Выражения такого вида называются *конституэнтами единицы предиката*. Произвольное знание о факте можно представить отношением $\{(a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}),\ (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}), ..., (a_{1r}, a_{2r}, ..., a_{mr})\}$, где r — число наборов в отношении. Это знание выражается высказыванием «($x_1 = a_{11}$ и $x_2 = a_{21}$ и ... и $x_m = a_{m1}$) или ($x_1 = a_{12}$ и $x_2 = a_{22}$ и ... и $x_m = a_{m2}$) или... или ($x_1 = a_{1r}$ и $x_2 = a_{2r}$ и ... и $x_m = a_{mr}$)». На языке алгебры предикатов это же знание запишется формулой

$$x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \ldots x_m^{a_{m1}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} \ldots x_m^{a_{m2}} \vee \ldots \vee x_1^{a_{1r}} x_2^{a_{2r}} \ldots x_m^{a_{mr}},$$

называемой *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *СДНФ*) *предиката*. Пустое отношение записывается формулой 0, выражающей тождественно ложный предикат. СДНФ, состоящая из всех конституэнт единицы, выражает полное отношение, которое еще иначе можно записать в виде формулы 1, обозначающей тождественно истинный предикат.

Как видим, операции $\vee, \wedge$ и $\neg$ в сочетании с предикатами 0, 1 и всевозможными предикатами узнавания предмета образуют достаточный ассортимент выразительных средств (даже с избытком, поскольку мы обошлись без операции отрицания и без предиката 1) для формульной записи любого предиката произвольного типа, а значит – и любого соответствующего ему отношения. Учитывая, что отношения – это универсальное средство описания любых объектов, мы можем заключить, что на язык формул алгебры предикатов можно перевести любые зависимости, известные в науке. Например на языке формул алгебры предикатов, в принципе, можно записать любое интегральное уравнение. Язык интегрального исчисления – это специализированный язык, язык же алгебры предикатов – универсальный. На специализированном языке формулы получаются всегда проще, чем на универсальном при выражении одного и того же содержания. В этом язык алгебры предикатов уступает конкурирующим с ним специализированным языкам. Но зато на универсальном языке (а именно таким языком является алгебра предикатов) можно записать любой закон природы, любую программу для ЭВМ, любое математическое соотношение, вообще – любую мысль. Очень важно то, что нашелся такой «всеядный» язык, на котором выражается абсолютно все, что только можно наблюдать вокруг и внутри нас. Важно и то, что сам механизм интеллекта невозможно полноценно описать, не прибегая к языку алгебры предикатов. Интеллект – средство универсальное, и он может быть охвачен только универсальным языком. Язык алгебры предикатов предельно прост и естествен, он известен уже более четверти века, но конкурентоспособный заменитель ему пока не найден. Вряд ли найдется когда-либо другой язык, равный ему по степени универсальности и превосходящий его по простоте.

Рассмотрим пример формульной записи предиката $P(x, y)$, заданного табл. 10.

Таблица 10

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	1	0
3	1	0	0	0

$Q(x, y)$

Чтобы получить СДНФ предиката P, надо обойти все ячейки таблицы с единичными значениями и в соответствие каждой из них поставить конституэнту единицы с показателями при x и y, совпадающими с координатами этой ячейки, а затем все полученные таким путем конституэнты единицы соединить знаками дизъюнкции:

$$P(x, y) = x^0 y^3 \vee x^1 y^2 \vee x^2 y^1 \vee x^2 y^2 \vee x^3 y^0.$$

По полученной формуле можно вычислить значения предиката $P(x, y)$ при любых значениях его аргументов x и y. Например пусть $x = 0$, $y = 2$. Тогда

$$P(0,2) = 0^0 \cdot 2^3 \vee 0^1 \cdot 2^2 \vee 0^2 \cdot 2^1 \vee 0^2 \cdot 2^2 \vee 0^3 \cdot 2^0 =$$

$$= 1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0 = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0.$$

Если же $x = 2$, $y = 1 = 1$, то

$$P(2,1) = 2^0 \cdot 1^3 \vee 2^1 \cdot 1^2 \vee 2^2 \cdot 1^1 \vee 2^2 \cdot 1^2 \vee 2^3 \cdot 1^0 =$$

$$= 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1.$$

Можно подставить в формулу предиката значения не всех его аргументов. В этом случае получаем не значение предиката при заданных значениях его аргументов, а некий новый предикат с меньшим числом предметных переменных. Пусть, к примеру, $x = 2$, тогда

$$P(2,y)=2^0\cdot y^3\vee 2^1\cdot y^2\vee 2^2\cdot y^1\vee 2^2\cdot y^2\vee 2^3\cdot y^0=$$
$$=0\cdot y^3\vee 0\cdot y^2\vee 1\cdot y^1\vee 1\cdot y^2\vee 0\cdot y^0=$$
$$=0\vee 0\vee y^1\vee y^2\vee 0=y^1\vee y^2.$$

При производстве этих вычислений приходится столкнуться с «сюрпризом»: возникает необходимость выполнять дизъюнкцию и конъюнкцию булева элемента на предикат, например, $0\cdot y^0$, $1\cdot y^1$, $y^1\vee 0$, $0\vee y^2$. Однако такая операция нами не была предусмотрена. При вычислениях мы воспользовались «почти» очевидными правилами для такого рода операций: $0\cdot P=P\cdot 0=0$, $1\cdot P=P\cdot 1=P$, $0\vee P=P\vee 0=P$, $1\vee P=P\vee 1=1$. Эти правила нами не рассматривались. Здесь обнаруживается пробел в наших знаниях, а за ним – глубокая, обширная и важная новая проблема, разработка которой приводит к так называемой *логической алгебре*, напоминающей по своему строению классическую линейную алгебру. В ней булевы элементы 0 и 1 выступают в роли скаляров, а предикаты – в роли векторов. Разработка логической алгебры позволяет проникнуть в чрезвычайно важную иерархическую структуру механизма логики. Оказывается, логика имеет вид «слоеного пирога» с уходящим ввысь бесконечным числом слоев. Возьмем два соседних слоя в произвольном месте «логического пирога». Нижний из них всегда можно рассматривать как скалярную булеву алгебру, а верхний – как векторную. Связывает их друг с другом третья – «боковая», скалярно-векторная булева алгебра. Вводя ранее алгебру предикатов, мы подошли к ней упрощенно – как к однослойной. Однако под алгеброй предикатов четко просматривается еще и нижний слой – алгебра булевых элементов, без которой алгебра предикатов была бы неполноценной. Благодаря только что рассмотренному примеру, при алгебре предикатов обнаружились следы также и третьей (междуэтажной) алгебры, связывающей оба слоя. Разработка логической алгебры – большая и серьезная задача, требующая специального рассмотрения.

Тот же пример наводит и на иные размышления. Когда мы в формулу предиката $P(x,y)=x^0y^3\vee x^1y^2\vee x^2y^1\vee x^2y^2\vee x^3y^0$ подставляем $x=2$, то в результате получаем другой предикат $y^1\vee y^2$. Получается, что подстановка – это операция, преобразующая один предикат в другой. Действует данная операция (обозначим ее символом $x/2$) из множества M всех предикатов, заданных на двумерном пространстве $S=A_1\times A_2$. Но в какое множество она действует? Естественно считать, что в то же самое множество M. В этом случае предикат-значение должен быть взят из того же пространства, что и предикат-аргумент. Обозначим этот предикат символом $Q(x,y)=y^1\vee y^2$. В его формуле переменная x отсутствует. Как говорят математики, она стала фиктивной или несущественной. Ниже приведена табл. 11 предиката $Q(x,y)$.

Таблица 11

x \ y	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0
3	0	1	1	0

$Q(x,y)$

Как видим, в таблице предиката Q переменная x сохранилась. Не менее естественно считать также, что полученный в результате выполнения операции подстановки предикат $y^1\vee y^2$ имеет лишь один аргумент y. Обозначим его через $R(y)=y^1\vee y^2$. При таком понимании операция подстановки действует из M уже в другое множество M', где M' – множество всех предикатов, заданных на одномерном пространстве $S'=A_2$. Ниже приведена табл. 12 предиката $R(y)$, получаемого в результате выполнения этой операции.

Таблица 12

y: 0	1	2	3
0	1	1	0

$R(y)$

Операция $x/2(P)=Q$, отображающая M в M, заменяет каждую строку исходной таблицы строкой из нее же, помеченной предметом $x=2$; операция же $x/2(P)=R$, отображающая M в M', превращает строку $x=2$ исходной таблицы в отдельную таблицу. Мы видим, что кроме предикатов существуют еще и операции над предикатами, а значит должна существовать и некая *алгебра предикатных операций*, на языке которой можно было бы такие операции записывать в виде формул.

Обратим внимание на то, что только что рассмотренная операция подстановки не может быть получена никакой суперпозицией операций $\vee,\wedge$ и $\neg$. Это означает, что на языке алгебры предикатов нельзя выразить произвольно выбранную операцию вида $F(P)=Q$, которая преобразует любой предикат P в соответствующий ему предикат Q. И, тем не менее, этот факт не вступает в противоречие с провозглашенным нами ранее тезисом о ничем не ограниченной описательной силе алгебры предикатов. Ведь никто не мешает нам посмотреть на запись $F(P)=Q$ не как на операцию (то есть реальное действие получения предиката Q по произвольно взятому предикату P), а просто как на уравнение (то есть как на отношение), связывающее две переменные P и Q. Кроме того, вполне допустимо рассматривать предикатные переменные как предметные. Верно, что значениями переменных P и Q служат предикаты, но также верно и то, что предикаты – это тоже предметы, только предметы специального вида. А раз это так, то для отношения, выраженного равенством $F(P)=Q$, всегда найдется соответствующий ему предикат $\Phi(P,Q)$, который можно будет записать в виде некоторой формулы.

Здесь обнаруживается еще один существенный недостаток алгебры предикатов (наряду с отмеченной ранее большей громоздкостью ее формул по сравнению с формулами специализированных алгебр, описывающих те же объекты): ее описания хоть и универсальны, но лишь связывают переменные, они не предназначены для явного выражения одних переменных через другие. Вся информация об операции $F(P)=Q$ в неявном виде в описании $\Phi(P,Q)$ содержится, но ее нельзя непосредственно использовать для практической реализации этой операции в материальной системе. Формулу же $F(P)=Q$ алгебры предикатных операций можно непосредственно использовать как алгоритм, по которому строится программа для ЭВМ. А формула $\Phi(P,Q)$ алгебры предикатов такой непосредственной возможности не дает. Операцию F из отношения Φ извлечь можно, но для этого придется выполнить дополнительную работу. Таким образом, роли, которые выполняют алгебра предикатов и алгебра предикатных операций, оказываются четко разделенными. Алгебра предикатов описывает знания, она лишь «созерцает» объекты. Она формирует только то, что называется «словом»: высказывания, суждения, предложения. Алгебра же предикатных операций призвана формировать реальные действия, она обслуживает «дело». Язык алгебры предикатов декларативен, язык же алгебры операций над предикатами процедурен. Итак, кроме алгебры предикатов, нужна еще и алгебра предикатных операций, если мы хотим не только познавать уже существующие интеллектуальные системы, но и создавать новые. Машина должна не только иметь свои мысли, но и обладать способностью оперировать с ними, приводить их в движение, получать новые мысли. Иначе говоря, она должна еще и мыслить.

Нам осталось рассмотреть задачу формульного описания бесконечных предикатов, заданных на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, среди которых имеются и бесконечные. СДНФ некоторых из таких предикатов будут иметь бесконечную длину, такие формулы в развернутом виде записать невозможно. Но мы можем сделать так, как в подобных случаях поступают в классической математике: вводят знак многократной суммы, которая распространяется на бесконечную область. В нашем случае используем формулу

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m},$$

означающую, что берется дизъюнкция всех конституэнт единицы с показателями $a_1, a_2, \ldots, a_m$, которые образуются из компонентов векторов. Сами же векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ принадлежат бесконечному отношению $P \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$, соответствующему предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Данная статья является введением в математический аппарат алгебры предикатов, который представляет собой эффективное средство формального описания объектов бионики интеллекта. С помощью описанного математического аппарата получили развитие многие научные направления в области создания искусственного интеллекта.

Поступила в редколлегию 20.11.2004