

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Поліщуку Богдану Адамовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Безкоаліційні ігри з нечіткими виграшами

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель гри з нечіткими виграшами

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Матвієнко О.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 47 с., 2 табл., 3 рис., 1 дод., 10 джерел.

БЕЗКОАЛІЦІЙНА ГРА, МАТРИЦЯ, НАДІЙНІСТЬ, НЕЧІТКИЙ ВИГРАШ, ОПТИМІЗАЦІЯ, РІВНОВАГА, СТРАТЕГІЯ.

Об'єкт дослідження – процеси взаємодії між учасниками безкоаліційних ігор, що характеризуються конфліктом інтересів та умовами невизначеності, де виграші представлені у вигляді нечітких чисел.

Мета роботи – дослідження безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами, розробка математичних моделей і методів аналізу таких ігор, а також визначення оптимальних стратегій учасників з урахуванням умов невизначеності та конфлікту інтересів.

Методи дослідження – це поєднання теорії ігор, нечіткої логіки, математичного моделювання та обчислювальних підходів для аналізу стратегій, визначення рівноваги за Нешем і візуалізації результатів у безкоаліційних іграх із нечіткими виграшами.

У роботі досліджено безкоаліційні ігри з нечіткими виграшами, розроблено математичні моделі, алгоритми аналізу та програмну реалізацію для визначення оптимальних стратегій учасників. Новизна полягає у використанні нечіткої логіки для моделювання невизначеності виграшів, що дозволяє враховувати складність умов гри.

Результати роботи рекомендовано для розв'язання задач розподілу ресурсів, управління проектами та конфліктів у бізнесі й логістиці. Моделі й алгоритми можна інтегрувати в системи підтримки прийняття рішень. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення моделей для багатосторонніх ігор та інтеграцію зі штучним інтелектом.

ABSTRACT

Introductory note: 47 pages, 2 tables, 3 figures, 1 appendix, 10 sources.

EQUILIBRIUM, FUZZY PAYOFF, MATRIX, NON-COOPERATIVE GAME, OPTIMIZATION, RELIABILITY, STRATEGY.

Object of research – is the interaction processes among participants in non-cooperative games characterized by conflicts of interest and conditions of uncertainty, where payoffs are represented as fuzzy numbers.

Purpose of work – is to study non-cooperative games with fuzzy payoffs, develop mathematical models and methods for analyzing such games, and determine optimal strategies for participants, taking into account conditions of uncertainty and conflict of interest..

Methods of research – game theory, fuzzy logic, mathematical modeling, and computational approaches to analyze strategies, determine Nash equilibrium, and visualize results in non-cooperative games with fuzzy payoffs.

This study investigates non-cooperative games with fuzzy payoffs, developing mathematical models, analysis algorithms, and a software implementation to determine optimal strategies for participants. The novelty lies in applying fuzzy logic to model payoff uncertainty, accounting for the complexity of game conditions.

The results are recommended for solving resource allocation problems, project management, and conflict resolution in business and logistics. The models and algorithms can be integrated into decision support systems. Future research should focus on expanding models for multi-party games and integrating them with artificial intelligence.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	7
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Матричні ігри.....	11
1.2 Безкоаліційні ігри	12
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	14
1.4 Постановка задач дослідження	16
2 Вибір та обґрунтування методу розв’язання	17
2.1 Метод рівноваги Неша в біматричних іграх	17
2.2 Метод домінантних стратегій	18
2.3 Графічний метод розв’язання біматричних ігор.....	19
2.4 Метод рівноваги Неша для розв’язання безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами.....	23
2.5 Підхід Белмана-Заде для розв’язання безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами.....	26
Висновки за розділом 2	28
3 Програмна реалізація	30
3.1 Система комп’ютерної алгебри Mathematica 11.1	30
3.2 Алгоритм розв’язання безкоаліційної гри з нечіткими виграшами.....	31
3.3 Опис програми	32
Висновки за розділом 3	33
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	35
4.1 Обчислювальний експеримент для будівництва об’єктів	35
Висновки за розділом 4	40
Висновки	42
Перелік джерел посилання	43
Додаток А Лістинг програми	44

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

ОПР – особа яка приймає рішення;

МІ – Матричні ігри;

БІ – Безкоаліційні ігри;

ВСТУП

Актуальність теми. Дослідження безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами є актуальним напрямом у прикладній математиці, який спрямований на аналіз і моделювання конфліктних ситуацій із врахуванням невизначеності. Такі ігри знаходять широке застосування у багатьох галузях, включаючи економіку, управління ресурсами, комп'ютерні науки та оптимізацію.

Метою даного дослідження є аналіз безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами та розробка методів для визначення оптимальних стратегій у таких іграх. Особливий акцент зроблено на використанні методів теорії ігор та нечіткої логіки для побудови моделей, які враховують специфіку прийняття рішень у умовах конфлікту інтересів.

Завдання дослідження включають аналіз сучасного стану задач у сфері безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами, розробку математичних моделей для їхнього аналізу, а також апробацію цих моделей на практичних прикладах. Отримані результати сприятимуть вдосконаленню існуючих підходів до вирішення багатокритеріальних задач у середовищі з обмеженими ресурсами та невизначеністю.

Актуальність роботи зумовлена тим, що у сферах надзвичайних ситуацій, економіки, переговорів та багатьох інших часто виникають обставини, де результат залежить не від одного, а від декількох учасників з різними цілями. Тому при аналізі таких ситуацій важливо враховувати дії всіх залучених сторін. Такі обставини досліджуються в теорії ігор.

Теорія ігор є математичною теорією моделей прийняття рішень у конфліктних ситуаціях. Конфліктом вважається будь-яке явище, в якому можна визначити учасників, їхні дії, можливі наслідки, а також зацікавленість сторін у цих наслідках. З точки зору теорії ігор, характерною особливістю конфлікту є участь кількох сторін із потенційно несумісними інтересами.

За допомогою теорії ігор можна моделювати конкурентну боротьбу фірм за ринкові сегменти, а кооперативні ігри дозволяють аналізувати процеси

злиття та розділення компаній. Матричні ігри використовуються для опису проблем, пов'язаних з антагоністичними конфліктами між двома чи більше сторонами.

На сьогодні теорія ігор стала обширною та складною наукою. Ми зосередимося на одному з її найбільш загальних класів: іграх у нормальній формі.

Грою в нормальній формі називається така модель: є кілька учасників конфлікту – гравців. Кожен гравець має певний набір своїх можливих дій – стратегій. Кожен гравець знає всі можливі стратегії решти гравців. Кожен гравець робить незалежно від інших гравців один хід, який полягає у виборі однієї з його стратегій. Після того, як хід зроблено кожним гравцем, результат конфлікту стає відомим. У теорії ігор становище, коли кожен із гравців зробив свій хід, називається ситуацією. Зауважимо, що одному й тому ж результату конфлікту можуть відповідати різні ситуації. Кожен гравець має функцію виграшів, яка кожній ситуації співвідносить виграш гравця в цієї ситуації. Функція виграшу кожного гравця також відома всім гравцям. Зазначимо, що для кожного гравця чим більше його виграш, тим краще.

Отже, щоб задати гру в нормальній формі (далі – гру), необхідно вказати всіх гравців, які беруть у ній участь, повні списки їхніх стратегій та функції виграшу для кожного з них.

У теорії ігор вже розроблено широкий спектр понять оптимальності для різних класів ігор, і завдання особи, яка приймає рішення (ОПР), полягає в тому, щоб погодитися чи ні з тим чи іншим із цих понять. Теорія ігор не нав'язує вибір принципу оптимальності; цей вибір повністю лежить у компетенції ОПР. При цьому, здійснюючи свій вибір, ОПР додає до задачі додаткову суб'єктивну інформацію, враховуючи особливості ситуації. Теорія ігор лише вказує, що слід робити, якщо поняття оптимальності вже визначено (звичайно, тільки для вже досліджених понять оптимальності). Такі інструменти можуть значно спростити процес ухвалення рішень.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є дослідження безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами та розробка мето-

дів аналізу таких ігор. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі "безкоаліційні ігри з нечіткими виграшами";
- дослідити основні теоретичні концепції та моделі безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами;
- розробити математичні моделі для аналізу безкоаліційних ігор із застосуванням нечіткої логіки;
- застосувати розроблені методи до реальних прикладів або модельних задач, проаналізувавши їхню ефективність.

Об'єктом дослідження є процеси прийняття рішень в умовах конфлікту інтересів між кількома учасниками без можливості коаліцій.

Предметом дослідження є методи та моделі аналізу безкоаліційних ігор із застосуванням нечітких виграшів.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії ігор, зокрема безкоаліційних ігор, а також методи нечіткої логіки та математичного моделювання для аналізу та оптимізації стратегій гравців у нечітких умовах.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Матричні ігри

Матрична гра – це гра між двома гравцями з протилежними інтересами, у якій кожен має кінцеву кількість стратегій.

Прикладом матричної гри є вже згаданий конфлікт між американцями та японцями.

Оскільки інтереси гравців повністю протилежні, жодні переговори чи союзи між ними неможливі. Збільшення виграшу одного гравця неминуче призводить до збільшення програшу іншого, що унеможлиблює будь-які домовленості.

Нехай a_1, a_2, \dots, a_n – всі стратегії першого гравця, а b_1, b_2, \dots, b_n – всі стратегії другого гравця.

Кількості стратегій m та n (для першого та другого гравців відповідно) можуть бути незалежними одна від одної.

Ситуацію, коли перший гравець обирає стратегію a_i , а другий – стратегію b_j , позначатимемо як (i, j) . Виграш першого гравця в цій ситуації позначимо H_{ij} відповідно, виграш другого гравця буде дорівнювати $-H_{ij}$, оскільки інтереси гравців протилежні і виграш одного є програшом іншого.

Всю інформацію про таку гру можна представити у вигляді матриці, що й пояснює назву «матричні ігри» (табл. 1.1).

Як було зазначено раніше, фундаментальною проблемою в теорії ігор є визначення поняття оптимальності. Для матричних ігор пропонується таке формулювання: стратегія гарантує гравцеві виграш c , якщо, застосовуючи цю стратегію, гравець отримує виграш не менший за c незалежно від дій протилежної сторони.

Таблиця 1.1 – Матриця виграшів

	b_1	b_2	...	b_m
a_1	H_{11}	H_{11}	...	H_{1m}
a_2	H_{21}	H_{22}	...	H_{2m}
...
a_n	H_{n1}	H_{n2}	...	H_{nm}

Стратегії a_i та b_j гравців називаються оптимальними, якщо: вони забезпечують гравцям максимальні гарантовані виграші; кожна з них є найкращою відповіддю на стратегію іншого гравця, тобто, якщо другий гравець дізнається, що перший використовує стратегію a_i , то найкращою його відповіддю буде стратегія b_j , і навпаки.

Проте, оптимальні стратегії не завжди присутні серед можливих стратегій гравців.

У джерелі [1] наведено умови існування оптимальних стратегій та методи їхнього пошуку.

1.2 Безкоаліційні ігри

У попередньому пункті 1.1 ми розглянули матричні ігри, де інтереси учасників є повністю антагоністичними. Проте в реальному житті можуть виникати конфлікти з більшою кількістю учасників, що призводить до ситуацій, де інтереси не є повністю протилежними. Навіть у випадку двох гравців їхні інтереси можуть частково збігатися і не бути цілковито антагоністичними.

Існує поділ на ігри, в яких можливі угоди (коаліції) між гравцями – це кооперативні ігри, та ігри, де правилами заборонені будь-які домовленості між учасниками – безкоаліційні ігри. Розглянемо основні поняття теорії таких ігор, необхідні для подальшого аналізу [1].

Система $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множина гравців, $\mu_D(x, y)$ – множина стратегій гравця i (припускається, що вона є кінцевою), H_i – функція виграшу гравця i , визначена на декартовому добутку множин стратегій гравців $X = \prod_{i=1}^n X_i$ (тобто, X – це множина всіх можливих ситуацій у грі) називається безкоаліційною грою n осіб.

У безкоаліційній грі з n гравцями події розгортаються наступним чином. Кожен гравець одночасно та незалежно від інших обирає стратегію x_i зі своєї множини стратегій X_i , де $i = 1, 2, \dots, n$. В результаті формується ситуація $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у грі. Після цього кожен гравець отримує свій виграш $H_i(x)$. На цьому гра завершується.

Розглянемо довільну ситуацію $x = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ у грі Γ . Побудуємо нову ситуацію, яка відрізняється від x лише тим, що гравець i змінює свою стратегію з x_i на іншу стратегію x'_i . Отримаємо ситуацію $(x \parallel x'_i) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Очевидно, що якщо $x_i = x'_i$, то $(x \parallel x'_i) = x$.

Ситуація $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$ називається ситуацією рівноваги за Нешем, якщо для всіх $x_i \in X_i$ $i = 1, 2, \dots, n$ виконується нерівність:

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^* \parallel x_i),$$

Це означає, що жоден гравець не може підвищити свій виграш, односторонньо змінюючи свою стратегію, якщо стратегії інших гравців залишаються незмінними.

Наприклад, у джерелі [1] зазначається, що в антагоністичних іграх рівноважні стратегії гравців збігаються з їхніми оптимальними стратегіями.

У неантагоністичних іграх, навпаки, поняття оптимальної стратегії для окремого гравця часто взагалі не має сенсу. У таких іграх оптимальними є не

стратегії окремих гравців, а їх комбінації (тобто ситуації), які враховують інтереси всіх гравців одночасно.

Тому в загальних безкоаліційних іграх варто розглядати як оптимальну не дію окремого гравця, а сукупність дій всіх гравців, тобто результат гри або ситуацію, що склалася.

Цікавим особливим випадком безкоаліційних ігор є ігри між двома гравцями з кінцевим числом стратегій у кожного. Функції вигравів кожного з гравців можна задати матрицями, тому такі ігри часто називають біматричними. Зауважимо, що біматричну гру з матрицями A і B можна представити як матрицю (A, B) , де кожен елемент є парою (a_{ij}, b_{ij}) , при $i = 1, 2, 3, \dots, m$ та $j = 1, 2, 3, \dots, n$, а m – кількість стратегій першого гравця, n – другого.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо нечіткі безкоаліційні ігри з n гравцями, тобто, безкоаліційні ігри, в яких виграти гравців у будь-яких ситуаціях задаються нечіткими числами. Для таких ігор, використовуючи нечіткі множини, ми введемо поняття нечіткого рішення (за аналогією з матричними іграми, розглянутими в попередньому параграфі).

Необхідні поняття теорії безкоаліційних ігор наведені в пункті 1.1.

Надалі, якщо не зазначено інше, розглядатимемо безкоаліційні ігри з n гравцями, які мають фіксовані скінченні множини стратегій для кожного гравця. При цьому для будь-якого $k \in N$, будь-якого $x \in X$ та будь-якої гри $g \in G$ виграти $H_k^g(x)$ гравця i у ситуації x в грі g лежить у деякому замкнутому інтервалі $[a, b]$.

Нехай G – множина таких ігор. Розглядатимемо G як універсальну множину, на якій задані нечіткі множини, тобто нечіткі безкоаліційні ігри, де виграти гравців є нечіткими і визначаються нечіткими числами. Функцію належ-

ності нечіткої безкоаліційної гри \hat{g} позначимо через $\mu_{\hat{g}}(g)$.

Виграш гравця k у грі g в ситуації x будемо позначати як $H_k^g(x)$.

Розглянемо нечітку безкоаліційну гру \hat{g} . Позначимо через $\hat{D}_x^{\hat{g},k}$ нечітке число, яке є виграшем гравця k у грі \hat{g} у ситуації:

$$x = (x_1, x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функцію належності цього нечіткого числа будемо позначати як

$$\mu_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{\hat{g},k} = \mu_x^{\hat{g},k}.$$

Припустимо, що деяким значенням нечіткої гри \hat{g} є звичайна («чітка») гра $g \in G$. У цьому випадку виграш гравця k у ситуації x позначимо як

$$\hat{D}_x^{\hat{g},k}(g), \quad \text{, , тоді } \hat{D}_x^{\hat{g},k}(g) = H_k^g(x).$$

Будемо вважати, що для будь-якого $k \in N$ і будь-якого $x \in X$:

$$\hat{D}_x^{\hat{g},k}(g) = \langle c_x^{\hat{g},k}, d_x^{\hat{g},k}, f_x^{\hat{g},k} \rangle,$$

при цьому

$$\mu_x^{\hat{g},k}(c_x^{\hat{g},k}) = \mu_x^{\hat{g},k}(f_x^{\hat{g},k}) = 0 \quad \mu_x^{\hat{g},k}(d_x^{\hat{g},k}) = 1,$$

$$\mu_x^{\hat{g},k} = \begin{cases} p_x^{\hat{g},k}(v), & \text{якщо } c_x^{\hat{g},k} \leq v \leq d_x^{\hat{g},k}; \\ r_x^{\hat{g},k}, & \text{якщо } d_x^{\hat{g},k} \leq v \leq f_x^{\hat{g},k}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

У формулах функції $p_x^{\hat{g},k}$ передбачаються строго зростаючими, а їхні обернені функції – строго спадними для будь-якої гри, будь-якого гравця та будь-якої ситуації.

Зауважимо, що рівняння $p_x^{\hat{g},k} = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, окрім випадку $\alpha = 1$, має два розв'язки – один більший за $d_x^{\hat{g},k}$, інший менший за $d_x^{\hat{g},k}$.

1.4 Постановка задач дослідження

Після аналізу поставленої задачі та її детального розгляду необхідно визначити конкретні цілі, які потрібно буде досягти протягом усього дослідження. До основних завдань належать:

- розробити математичну модель безкоаліційної гри з нечіткими виграшами, що враховує специфіку нечіткої логіки для опису виграшів гравців;
- створити таблицю всіх можливих стратегій і виграшів гравців у даній моделі, де виграші представлені нечіткими значеннями, а також визначити критерії для вибору оптимальних стратегій;
- застосувати методи теорії нечіткої логіки для аналізу стратегій і виявлення оптимальних рішень у безкоаліційній грі; провести розрахунки та оцінити ефективність стратегій у різних сценаріях;
- розробити програмний продукт для автоматичного обчислення виграшів і рівноважних стратегій у безкоаліційній грі з нечіткими виграшами, а також для візуалізації результатів у зручному форматі;
- проаналізувати отримані результати для мінімізації ризиків і визначення оптимальних стратегій гравців з урахуванням нечіткості виграшів та можливих обмежень;
- зробити висновки щодо застосування розробленої моделі та методів для аналізу безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами у реальних умовах, а також оцінити потенційні напрямки розвитку дослідження.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод рівноваги Неша в біматричних іграх

Біматричною називається кінцева безкоаліційна гра двох осіб. Біматрична гра описується матрицями вигравів кожної зі сторін. Нехай у гравця A є m стратегій, а у гравця B – n стратегій. Виграші гравців задаються матрицями:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & \dots & B_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \end{matrix}.$$

Тут A – це матриця вигравів гравця A , а B – матриця вигравів гравця B . Розміри матриць A та B обов'язково збігаються. Нехай, наприклад, гравець A застосовує свою стратегію A_i , а гравець B – стратегію B_j . Тоді виграші гравців у даній ситуації будуть відповідати елементам платіжних матриць на перетині i -го рядка і j -го стовпця: виграш сторони A становить a_{ij} , а виграш сторони B – b_{ij} . Елементи матриць, що мають знак «мінус», позначають величину програшу гравця в конкретній ситуації.

Будемо вважати повний набір ймовірностей застосування гравцем A своїх чистих стратегій $x^T = (x_1, \dots, x_m)$ змішаною стратегією гравця A ; відповідно $y^T = (y_1, \dots, y_n)$ – змішана стратегія гравця B . Змішані стратегії гравців повинні задовольняти такі очевидні умови:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i &= 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n y_j &= 1, \quad y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

З допомогою змішаних стратегій обчислюють середні виграші H_A , H_B гравців A і B відповідно:

$$H_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = x^T A y,$$

$$H_B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j = x^T B y.$$

Теорема Неша (основна теорема біматричних ігор). Кожна біматрична гра має хоча б одну ситуацію рівноваги, можливо, в змішаних стратегіях.

Ситуація рівноваги для біматричної гри представляє собою пару векторів змішаних стратегій x^* , y^* , які задовольняють нерівності:

$$\begin{cases} A y^* \leq (x^{*T} A y^*) (1)_{m \times 1} = H_A (1)_{m \times 1}; \\ B^T x^* \leq (x^{*T} B y^*) (1)_{n \times 1} = H_B (1)_{n \times 1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $(1)_{m \times 1}$, $(1)_{n \times 1}$ – вектори розмірностей $(m \times 1)$, $(n \times 1)$, відповідно, що складаються з одиниць.

Для визначення ситуації рівноваги необхідно розв'язати систему нерівностей (2.2) відносно $x^T = (x_1, \dots, x_m)$, $y^T = (y_1, \dots, y_n)$ при умовах нормування (2.1).

2.2 Метод домінантних стратегій

Перш ніж перейти до визначення ситуації рівноваги в біматричній ігровій задачі, необхідно спочатку спробувати, якщо це, звісно, можливо, скоротити розмірність задачі шляхом видалення завідомо не вигідних стратегій за допомогою застосування відношення домінування.

Відношення домінування в біматричній грі відрізняються від відношень домінування в антагоністичній грі та базуються на вихідних даних задачі (які матриці пропонуються для розв'язання – виграшів чи програшів) і на критеріях задачі.

Виділимо найбільш поширені критерії задачі.

Задані матриці виграшів сторін A і B . Застосовують відношення домінування, якщо:

- а) сторона A хоче максимізувати свій виграш і мінімізувати виграш сторони B ;
- б) сторона B хоче максимізувати свій виграш і мінімізувати виграш сторони A ;
- в) кожна зі сторін хоче максимізувати свій виграш;
- г) кожна зі сторін хоче мінімізувати виграш противника.

Задані матриці програшів сторін A і B . Застосовують відношення домінування, якщо:

- а) сторона A хоче мінімізувати свій програш і максимізувати програш сторони B ;
- б) сторона A хоче мінімізувати свій програш і максимізувати програш сторони A ;
- в) кожна зі сторін хоче мінімізувати свій програш;
- г) кожна зі сторін хоче максимізувати програш противника.

Ці критерії застосовують для спрощення деяких ігрових задач із конкретними правилами.

2.3 Графічний метод розв'язання біматричних ігор

Припустимо, що завідомо невігідні стратегії були видалені з матриць гри, отже, можна перейти до визначення ситуації рівноваги.

Нехай кожен гравець має по дві стратегії. У цьому випадку матриці A та

B будуть такими:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Змішані стратегії гравців у грі 2×2 мають вигляд:

$$x^T = (x1-x), y^T = (y1-y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Середні виграші гравців обчислюються наступним чином:

$$\begin{aligned} H_A &= x^T A y = (x1-x) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} H_B &= x^T B y = (x1-x) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \\ &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Запишемо умови рівноваги для даної задачі:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} &\leq H_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} &\leq H_B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Перепишемо умови рівноваги у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \leq H_A; \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \leq H_A, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} b_{11}y + b_{12}(1-y) \leq H_B; \\ b_{21}y + b_{22}(1-y) \leq H_B. \end{cases}$$

Підставляючи ціну гри H_A із співвідношення (2.3) в умову (2.5), отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1-x)y + (a_{12} - a_{22})(1-x) \leq 0; \\ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x \leq 0. \end{cases}$$

Виконаємо заміну змінних:

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = a_1; \\ a_{22} - a_{12} = a_2. \end{cases}$$

Тоді система (2.4) прийме вигляд

$$\begin{cases} a_1(1-x)y - a_2(1-x) \leq 0; \\ a_1xy - a_2x \geq 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким чином, множина всіх прийнятних стратегій для гравця A задовольняє умовам (2.6). Щоб знайти x , розглянемо три випадки.

Випадок 1. Якщо $x = 0$, то друге рівняння системи (2.6) виконується для всіх y , перше набуває вигляду: $a_1y - a_2 \leq 0$.

Випадок 2. Якщо $x = 1$, то перше рівняння (2.6) виконується для всіх y , а друге рівняння набуває вигляду: $a_1y - a_2 \geq 0$.

Випадок 3. Якщо $0 < x < 1$, поділимо праву та ліву частини першого рівняння (2.6) на $(1-x)$, а праву і ліву частини другого рівняння (2.6) на x , в результаті отримаємо:

$$\begin{cases} a_1 y - a_2 \leq 0 \\ a_1 y - a_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 y - a_2 = 0.$$

У результаті множина розв'язків системи, яка містить умови (2.6) – позначимо її як K – буде складатися з усіх ситуацій вигляду:

- $(0, y)$, якщо $a_1 y - a_2 \leq 0$; $0 \leq y \leq 1$;
- (x, y) , якщо $a_1 y - a_2 = 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 < x < 1$;
- $(1, y)$, якщо $a_1 y - a_2 \geq 0$; $0 \leq y \leq 1$.

Графічна інтерпретація множини рішень K гравця A показана на рис. 2.1

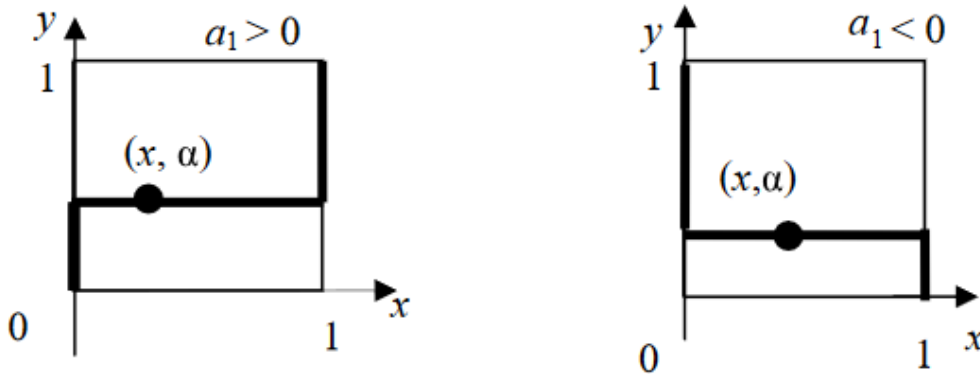


Рисунок 2.1 – Множина рішень гравця A

Аналогічно можемо отримати графічну інтерпретацію для гравця B (рис. 2.2).

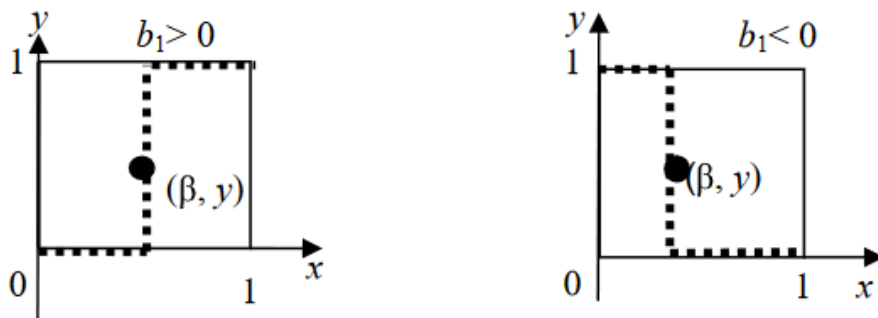


Рисунок 2.2 – Множина рішень гравця B

Рішенням гри є перетин множин K і L , тобто ті значення x і y , які є спільними для цих множин. Графічна інтерпретація розв'язку біматричної гри представлена на рис. 2.3.

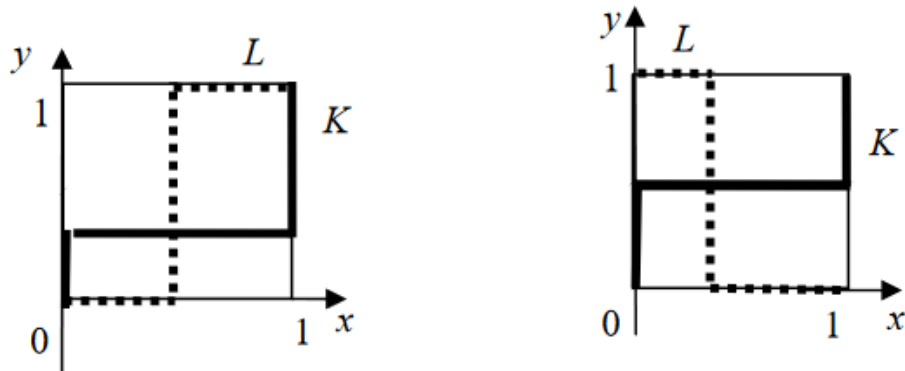


Рисунок 2.3 – Рішення гри

При цьому зигзаги K і L можуть бути як протилежного напрямку так і однакового напрямку. У першому випадку зигзаги мають три точки перетину, а в другому – одну. Середні виграші при цьому визначаються за формулами, якщо в них підставити отримані значення x і y . Очевидно, що x входить у змішану стратегію гравця B , хоча залежить тільки від виграшів гравця A ; y входить у змішану стратегію гравця A , хоча залежить тільки від виграшів гравця B .

2.4 Метод рівноваги Неша для розв'язання безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами

Відштовхуючись від поняття "ситуація рівноваги по Нешу", під рішенням ігри розумітимемо ситуацію, яка з максимальною надійністю є ситуацією рівноваги по Нешу.

Розглянемо нечітку гру \hat{g} та її функцію приналежності $\mu_{\hat{g}}(g)$. Спираючись на формулу (1.4), виходитимемо з того, що

$$\mu_{\hat{g}}(g) = \min_{\substack{1 \leq k \leq n \\ x \in X}} \mu_x^{\hat{g}, k} (H_k^g(x)).$$

Через g_x будемо позначати гру («чітку»), у якій ситуація x є ситуацією рівноваги по Нешу. Через g_x^{\max} позначимо гру g_x , для якої надійність того, що ситуація x є рівноважною за Нешем, максимальна:

$$\mu_{\hat{g}}(g_x^{\max}) = \max_{g_x \in G} \mu_{\hat{g}}(g_x). \quad (2.7)$$

Нехай $\mu_{\hat{g}}(g_x^{\max}) = u_x$. Величина u_x – це максимальне значення ступеня надійності того, що ситуація x у нечіткій грі, що розглядається, є ситуацією рівноваги по Нешу. Формула (2.7) впливає з визначення диз'юнкції у нечіткій логіці.

Рішенням розглянутої нечіткої гри \hat{g} вважатимемо ситуацію x_0 , для якої максимум ступеня надійності того, що вона є ситуацією рівноваги за Нешем, максимальний серед усіх ситуацій, тобто x_0 – це така ситуація, що

$$\mu_{\hat{g}}(g_{x_0}^{\max}) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{g}}(g_x^{\max}).$$

Зауважимо, що відповідно до запропонованого підходу будь-яка гра має рішення у чистих стратегіях, чого не можна сказати про класичний підхід. Слід зазначити, що якщо дана гра з чіткими виграшами, яка має ситуацію рівноваги по Нешу, то розглядаючи її як гру з нечіткими виграшами, носіями яких є моди, як рішення отримаємо цю ситуацію рівноваги.

Завдання щодо пошуку зазначеного рішення гри зводиться до завдань математичного програмування (у разі трикутних нечітких чисел – до завдань лінійного програмування [1]), по одному завданню для кожної ситуації.

Розглянемо нечітку гру \hat{g} та ситуацію x^0 . Нехай максимум ступеня надійності того, що ситуація x^0 у грі, що розглядається, є ситуацією рівноваги по Нешу, дорівнює u_0 .

В силу зроблених раніше позначень гра, на якій реалізується цей максимум, є гра $g_{x_0}^{\max}$:

$$\mu_{\hat{g}}(g_{x_0}^{\max}) = u_0.$$

Щоб ситуація x^0 була ситуацією рівноваги по Нешу, в грі $g \in G$ повинні виконуватися нерівності:

$$H_k^g(x^0) \geq H_k^g(x^0 \| x'_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad x'_k \in X_k.$$

Для того щоб ситуація x була ситуацією рівноваги по Нешу з надійністю u у грі з множиною функцій виграшів, що задаються нечіткими числами $\hat{D}_x^{\hat{g}k}$, повинна знайтися така «чітка» гра g з функціями виграшів $H_1^g, H_2^g, \dots, H_n^g$, що для неї виконуються такі нерівності:

$$H_k^g(x) \geq H_k^g(x \| :_k) \quad \text{для всіх } x'_k \in X_k \text{ та } k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u \leq \mu_x^{\hat{g},k}(H_k^g(x)), \quad \text{для всіх } x \in X \text{ та } k = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді вимога про те, щоб надійність u_0 того, що ситуація x_0 є ситуацією рівноваги по Нешу, була б максимальною, еквівалентна вимозі про те, що якщо $u_0 \neq 0$, то u_0 є розв'язком задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \max; \\ u \leq p_{(x_0 \| x'_k)}^{\hat{g}, k} (H_k((x_0 \| x'_k))), x'_k \in X_k, (x_0 \| x'_k); \\ p_{(x_0 \| x'_k)}^{\hat{g}, k} (H_k((x_0 \| x'_k))) \leq 1, x'_k \in X_k, (x_0 \| x'_k) \neq x_0, k = 1, 2, \dots, n; \\ u \leq r_{x_0}^{\hat{g}, k} (H_k(x_0)), k = 1, 2, \dots, n; \\ r_{x_0}^{\hat{g}, k} (H_k(x_0)) \leq 1, k = 1, 2, \dots, n; \\ H_k(x_0) \geq H_k((x_0 \| x'_k)), x'_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n; \\ c_x^{\hat{g}, k} \leq H_k(x) \leq f_x^{\hat{g}, k}, x = (x_0 \| x'_k), x'_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n; \\ H_k(x) = d_x^{\hat{g}, k}, k = 1, 2, \dots, n, x \in X, x \neq x_0, x \neq (x_0 \| x'_k) \text{ при } x'_k \in X_k. \end{array} \right.$$

Тут $H_k(x)$, $x \in X$, $k = 1, 2, \dots, n$ – невідомі, які є виграшами в шуканій точній грі g (яка є чітким значенням гри \hat{g} , тобто такий, що $(g, \mu_{\hat{g}}(g)) \in \hat{g}$).

2.5 Підхід Белмана-Заде для розв'язання безкоаліційних ігор з нечіткими виграшами

Обговоримо ще один підхід до визначення рішення нечіткої безкоаліційної гри, що базується на ідеях Заде-Беллмана. Розглянемо нечітке завдання математичного програмування з нечіткою множиною допустимих планів \hat{X} і нечіткою метою, що задається нечіткою множиною $\hat{\Phi}$. Нечіткі множини \hat{X} і $\hat{\Phi}$ визначені на універсальній множині X (множині ситуацій у розглянутій нечіткій грі) і мають функції приналежності $\mu_{\hat{X}}$ та $\mu_{\hat{\Phi}}$ відповідно:

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \max_{g \in G_x} \mu_{\hat{g}}(g),$$

де G_x – множина ігор з G , в яких ситуація x є ситуацією, рівноважною по Нешу.

Нехай g_x – гра, для якої

$$\mu_{\hat{X}}(x) = \mu_{\hat{g}}(g_x).$$

Покладемо

$$\mu_{\hat{\Phi}}(x) = f(g_x),$$

де $f(g)$ – ступінь впевненості в тому, що рівноважна по Нешу ситуація в грі g є ефективною, тобто виграші гравців у ситуації, рівноважній по Нешу, у грі g у сукупності «досить близькі» до їх виграшів ситуації рівноваги, можливо у мішаних стратегіях, у грі g^* , в якій виграші дорівнюють $d_x^{\hat{g},k}$.

Як нечітке рішення пропонується розглядати нечітку множину \hat{Sol} на універсальній множині X з функцією приналежності $\mu_{\hat{Sol}}$:

$$\mu_{\hat{Sol}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{\Phi}}(x)\}.$$

Нехай y_0 – така ситуація рівноваги в деякій грі g_0 , що

$$\mu_{\hat{Sol}}(y_0) = \max_{x \in X} \mu_{\hat{Sol}}(x).$$

Як рішення розглянутої нечіткої гри \hat{g} з урахуванням ідей Заде-Беллмана пропонується розглядати ситуацію y_0 .

Для знаходження ситуації y_0 для кожної $x' \in X$ розв'яжемо наступну задачу математичного програмування:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \max; \\ u \leq p_x^{\hat{g},k} (H_k(x'|x_k)), x_k \in X_k, (x'|x_k) \neq x_0, k = 1, 2, \dots, n; \\ p_x^{\hat{g},k} (H_k(x'|x_k)) \leq 1, x_k \in X_k, (x'|x_k) \neq x_0, k = 1, 2, \dots, n; \\ u \leq r_{x'}^{\hat{g},k} (H_k(x')), k = 1, 2, \dots, n; \\ r_{x'}^{\hat{g},k} (H_k(x')) \leq 1, k = 1, 2, \dots, n; \\ u \leq f(g_{x'}); \\ f(g_{x'}) \leq 1; \\ H_k(x') \geq H_k(x'|x_k), x_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n; \\ c_x^k(\hat{g}) \leq H_k(x) \leq f_{\hat{g}}^k(\hat{g}), x_k \in X_k, k = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Тут $H_k(x)$, $x \in X$, $k = 1, 2, \dots, n$ – виграші у певній чіткій грі.

Розв'язавши задачу (2.8) для кожної $x' \in X$, як шуканий y_0 візьмемо таку ситуацію x' , для якої оптимальне значення цільової функції задачі (2.8) максимально.

Висновки за розділом 2

Під час дослідження в рамках розділу було розглянуто та обґрунтовано методи розв'язання задач у безкоаліційних іграх. Доведено, що кожна біматрична гра має хоча б одну ситуацію рівноваги (можливо, в змішаних стратегіях), а також підкреслено важливість використання системи нерівностей для знаходження рівноваги. Було представлено алгоритм скорочення розмірності задачі шляхом виключення завідомо невігідних стратегій і запропоновано критерії для застосування відношень домінування залежно від типу гри та завдань сторін.

Розглянуто спрощений випадок ігор, де рішення визначається як перетин множин прийнятних стратегій, і графічно проілюстровано процес пошуку рівноваги для двох гравців. У межах аналізу нечітких ігор введено поняття рівно-

ваги з максимальною надійністю та визначено умови, за яких нечітка гра має рішення, а також запропоновано зведення задачі до математичного програмування.

Крім того, було запропоновано використання підходу Белмана-Заде для визначення рішень у нечітких безкоаліційних іграх, розглянуто застосування нечітких множин та функцій приналежності для оцінки ефективності рівноваги. У результаті проведеного аналізу було сформовано чіткий підхід до визначення рівноваги в різних типах ігор, що є основою для розв'язання задач з нечіткими виграшами. Отримані результати можуть бути використані для оптимізації рішень у багатокритеріальних ігрових ситуаціях із конфліктом інтересів.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1

Система комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1 є потужним програмним забезпеченням, яке надає широкі можливості для виконання складних математичних обчислень, символної математики, чисельного моделювання, аналізу даних і створення візуалізацій. Розроблена компанією Wolfram Research, ця система вважається однією з найкращих у своєму класі для вирішення задач з різних галузей науки, техніки та освіти.

Серед основних можливостей Mathematica 11.1 варто відзначити символні обчислення, які дозволяють виконувати точні математичні обчислення з використанням символів, наприклад, розв'язання рівнянь, спрощення виразів, інтегрування та диференціювання. Система підтримує роботу з великими алгебраїчними структурами, такими як матриці, поліноми та ряди. Чисельні обчислення реалізовані з використанням високоточної арифметики, що дозволяє отримувати точні розв'язки для нелінійних рівнянь, інтегралів та інших задач. Алгоритми Mathematica оптимізовані для забезпечення високої продуктивності.

Система також пропонує розширені інструменти для аналізу даних, включаючи імпорт, обробку та аналіз великих обсягів інформації, статистичний аналіз, кластеризацію, прогнозування та візуалізацію. Завдяки вбудованим засобам графіки Mathematica дозволяє будувати інтерактивні графіки, тривимірні візуалізації, анімації та спеціалізовані діаграми, а також створювати інтерактивні додатки.

Мова програмування Wolfram Language, що використовується у Mathematica, підтримує функціональне, процедурне та символне програмування. Це дозволяє користувачам розробляти власні алгоритми і моделі. Крім того, система пропонує потужні засоби моделювання, включаючи розв'язання задач із диференціальними рівняннями, оптимізацію та аналіз складних систем.

Mathematica 11.1 демонструє високу ефективність у задачах лінійного

програмування. Для розв'язання таких задач у системі використовується функція `LinearProgramming`, яка дозволяє формувати цільові функції та системи обмежень, працювати з великими матрицями коефіцієнтів і знаходити оптимальні рішення. Крім того, `Mathematica` дозволяє аналізувати обмеження, визначати їхній вплив на розв'язок задачі та будувати графічне представлення області допустимих рішень.

Для задач лінійного програмування, пов'язаних із розподілом ресурсів у моделі безкоаліційних ігор, `Mathematica 11.1` забезпечує можливість формувати цільову функцію, яка мінімізує час виконання чи максимізує виграш. Обмеження ресурсів задаються у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей. Система дозволяє аналізувати стратегії кожного гравця, будувати матрицю рішень, розраховувати оптимальні стратегії та візуалізувати область допустимих рішень для кожної комбінації стратегій.

`Mathematica 11.1` є універсальним інструментом для автоматизації розрахунків і розв'язання задач лінійного програмування, що робить її ідеальною для моделювання ігор із конфліктом інтересів. Вона забезпечує гнучкість, точність і наочність, що дозволяє ефективно вирішувати складні математичні задачі.

3.2 Алгоритм розв'язання безкоаліційної гри з нечіткими виграшами

Алгоритм розв'язання безкоаліційної гри з нечіткими виграшами базується на кількох ключових етапах, які дозволяють формалізувати гру, визначити оптимальні стратегії гравців і знайти рівноважну ситуацію. Спочатку виконується формалізація гри, що включає визначення множини гравців і їхніх множин стратегій. Для кожного гравця задаються нечіткі функції виграшу, які обчислюються для кожної можливої комбінації стратегій. Значення виграшів подаються у вигляді трикутних чисел, що включають мінімальне, очікуване та максимальне значення.

Наступним кроком є побудова багатовимірної матриці виграшів, у якій

кожен елемент відповідає конкретній комбінації стратегій гравців і містить нечіткі виграші. На основі цієї матриці здійснюється аналіз виграшів для визначення оптимальних стратегій. Для кожного гравця обираються стратегії, які максимізують його очікуваний виграш, мінімізують ризик або забезпечують баланс між оптимістичністю і ризиком. Для цього використовується функція приналежності, що враховує вагові коефіцієнти для кожного компонента трикутного числа.

Після цього виконується пошук рівноваги за Нешем. Для цього фіксуються стратегії всіх гравців, крім одного, і для цього гравця визначається стратегія, яка максимізує його нечіткий виграш. Перевіряється, чи жоден гравець не може покращити свій виграш, змінюючи лише свою стратегію. Якщо така ситуація існує, її вважають рівновагою за Нешем. У разі, якщо рівновага не знайдена, застосовується ітераційний підхід із корекцією стратегій.

Завершальним етапом є аналіз отриманих результатів. Рівноважна ситуація містить стратегії кожного гравця та відповідні нечіткі виграші. Додатково перевіряється стійкість рівноваги, включаючи вплив змін у стратегіях інших гравців і залежність виграшу від параметрів нечіткості. Для зручності розуміння результатів будується графічне представлення, яке включає область допустимих рішень, рівноважні стратегії для кожного гравця та вплив змін параметрів на рівновагу.

У підсумку алгоритм дозволяє отримати рівноважні стратегії гравців і нечіткі виграші, які відповідають умовам рівноваги за Нешем. Такий підхід забезпечує ефективний аналіз конфліктних ситуацій з невизначеністю та може бути застосований у практичних сценаріях, таких як розподіл ресурсів чи управління системами.

3.3 Опис програми

В додатку А наведений приклад програми для обчислення рівноваги у біматричних іграх. Вона виконує наступні дії:

а) моделювання біматричної гри: програма представляє ситуації у грі як

набір стратегій двох гравців. Кожен гравець має свої можливі дії, які впливають на виграш обох сторін;

б) оптимізація виграшів: для кожної ситуації виконується оптимізація (з використанням функції Maximize). Мета – максимізувати певну метрику u , яка представляє узгоджений виграш у грі за заданих умов;

в) розв'язання систем нерівностей: програма формує системи нерівностей, що описують обмеження для кожної комбінації стратегій. Обмеження включають умови: межі виграшів кожного гравця, взаємозв'язки між стратегіями гравців, граничні значення виграшів для кожного сценарію;

г) розрахунок виграшів: В рамках кожної ситуації програма визначає значення виграшів для кожного гравця, залежно від параметра u . Це дозволяє оцінити, як зміна стратегій впливає на виграш;

д) аналіз рівноваги: Програма шукає можливі ситуації, які відповідають рівновазі. У таких ситуаціях жоден гравець не може покращити свій виграш, змінюючи лише свою стратегію;

е) результати оптимізації: Для кожної ситуації програма генерує набір оптимальних значень виграшів H_{ij} для обох гравців і відповідний оптимальний параметр u . Вона також показує області, в яких досягаються різні значення u .

Висновки за розділом 3

У цьому розділі було розглянуто програмну реалізацію алгоритмів для аналізу та розв'язання безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами, а також описано застосування системи комп'ютерної алгебри Mathematica 11.1 для вирішення таких задач.

Система Mathematica 11.1 продемонструвала високу ефективність у розв'язанні складних математичних задач, зокрема задач лінійного програмування. Вона дозволяє точно моделювати та обчислювати результати за допомогою функцій символічної математики, чисельного моделювання та графічного

представлення даних. Застосування функції `LinearProgramming` дозволяє формулювати цільові функції та системи обмежень, що є ключовими елементами у моделюванні та аналізі стратегій гравців у задачах безкоаліційних ігор. Завдяки широким можливостям `Mathematica` забезпечує точність розрахунків, інтерактивність і зручність роботи з великими масивами даних.

Алгоритм розв'язання безкоаліційної гри з нечіткими виграшами побудований на ключових етапах, що включають формалізацію гри, побудову матриці виграшів, аналіз стратегій гравців і визначення рівноваги за Нешем. Основою цього алгоритму є використання трикутних чисел для подання виграшів, що дозволяє враховувати невизначеність у процесі прийняття рішень. Формалізація гри, визначення множин стратегій гравців і побудова багатовимірної матриці виграшів дають змогу чітко структурувати інформацію та забезпечити її зручний аналіз. Рівновага за Нешем визначається через оптимізацію нечітких виграшів для кожного гравця, що гарантує стійкість отриманих стратегій.

Опис програми, наведений у цьому розділі, демонструє практичну реалізацію алгоритму. Програма дозволяє моделювати біматричні ігри, оптимізувати виграші, вирішувати системи нерівностей, аналізувати рівновагу за Нешем і надавати результати оптимізації у вигляді набору виграшів і відповідних стратегій. Цей підхід дає змогу автоматизувати процес розв'язання задач безкоаліційних ігор і аналізувати конфліктні ситуації з великою кількістю змінних.

Результати розділу показують, що запропоновані методи й алгоритми ефективно вирішують задачі безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами. Використання `Mathematica 11.1` та запропонованого алгоритму дозволяє моделювати реальні сценарії та знаходити оптимальні стратегії для гравців, враховуючи невизначеність і конфліктність інтересів. Це підвищує якість прийняття рішень у задачах розподілу ресурсів, управління системами та інших прикладних сферах.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для будівництва об'єктів

Розглянемо приклад.

Будівельна компанія бажає побудувати один із двох об'єктів на території міста. Міські власті можуть дозволити будівництво чи відмовити. Будівельна компанія – гравець А – має дві стратегії: будувати об'єкт 1, будувати об'єкт 2. Місто – гравець В – також має дві стратегії: дозволити будівництво чи відмовити. Місцеві власті значно більше зацікавлені в будівництві заводу з переробки сміття, ніж будівельна компанія. Будівельна компанія більше зацікавлена в будівництві торгівельно-розважального комплексу. Свої дії (стратегії) вони застосовують незалежно один від одного. Треба обрати, який об'єкт будувати. Корисності різних виборів (виграші) є нечіткими, вони задані трикутними нечіткими числами $\langle 0, d_x^k, 1 \rangle$, моди яких d_x^k вказані в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Моди нечітких виграшів

Вибір будівельної компанії	Вибір місцевих властей	
	Завод з переробки сміття, В1	Торгівельно-розважальний комплекс, В2
Завод з переробки сміття, А1	(0,2; 0,9)	(0,3; 0,2)
Торгівельно-розважальний комплекс, А2	(0,3; 0,2)	(0,8; 0,1)

Таким чином, ми отримуємо безкоаліційну гру \hat{g} двох гравців: будівель-

на компанія – перший гравець, місцеві власті – другий.

У грі з виграшами з таблиці 4.1 є ситуація рівноваги по Нешу – ситуація (2,1).

Шукатимемо ситуацію y_0 , для якої максимум ступеня надійності того, що вона є ситуацією рівноваги по Нешу, максимальний серед усіх ситуацій.

Розглянемо ситуацію (1,1).

Розв'яжемо для неї задачу (2.10), яка набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \max; \\ 0,8u + H_{(1,1)}^1 \leq 1; 0,3u - H_{(2,1)}^1 \leq 0; \\ 0,1u + H_{(1,1)}^2 \leq 1; 0,2u - H_{(1,2)}^2 \leq 0; \\ 0 \leq u \leq 1; \\ H_{(1,1)}^1 - H_{(2,1)}^1 \geq 0; H_{(1,1)}^2 - H_{(1,2)}^2 \leq 0; \\ H_{(1,1)}^1 \leq 0,3; H_{(1,1)}^2 \geq 0,2; \\ 0 \leq H_{(1,1)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(1,1)}^2 \leq 1; 0 \leq H_{(2,1)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(1,2)}^2 \leq 1. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Виявляється, що в оптимальному плані задачі (4.1):

$$u = 0,909; H_{(1,1)}^1 = 0,272; H_{(1,1)}^2 = 0,55; H_{(1,2)}^2 = 0,77; H_{(2,1)}^1 = 0,272..$$

Гра $g_{(1,1)}^{\max}$ може мати наступну матрицю виграшів:

$$\left(\begin{array}{cc} 0,272; 0,55 & 0,3; 0,77 \\ 0,272; 0,2 & 0,8; 0,1 \end{array} \right), \mu_{\hat{x}}(1,1) = 0,909.$$

Розглянемо ситуацію (1,2).

Розв'яжемо для неї задачу (2.10), яка набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u \rightarrow \max; \\
 0,7u + H_{(1,2)}^1 \leq 1; 0,8u - H_{(2,2)}^1 \leq 0; \\
 0,8u + H_{(1,2)}^2 \leq 1; 0,9u - H_{(1,1)}^2 \leq 0; \\
 0 \leq u \leq 1; \\
 H_{(1,2)}^1 - H_{(2,2)}^1 \geq 0; H_{(1,2)}^2 - H_{(1,1)}^2 \leq 0; \\
 H_{(1,2)}^1 \leq 0,2; H_{(1,2)}^2 \geq 0,1; \\
 0 \leq H_{(1,2)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(1,2)}^2 \leq 1; 0 \leq H_{(2,2)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(1,1)}^2 \leq 1.
 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Виявляється, що в оптимальному плані задачі (4.2):

$$u = 0,25; H_{(1,2)}^1 = 0,2; H_{(1,2)}^2 = 0,16; H_{(1,1)}^2 = 0,61; H_{(2,2)}^1 = 0,2.$$

Гра $g_{(1,2)}^{\max}$ може мати наступну матрицю виграшів:

$$\left(\begin{array}{cc} 0,2;0,61 & 0,2;0,16 \\ 0,3;0,2 & 0,2;0,1 \end{array} \right), \mu_{\hat{X}}(1,2) = 0,25.$$

Розглянемо ситуацію (2,2).

Розв'яжемо для неї задачу (2.10), яка набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u \rightarrow \max; \\
 0,2u + H_{(2,2)}^1 \leq 1; 0,3u - H_{(1,2)}^1 \leq 0; \\
 0,9u + H_{(2,2)}^2 \leq 1; 0,2u - H_{(2,1)}^2 \leq 0; \\
 0 \leq u \leq 1; \\
 H_{(2,2)}^1 - H_{(1,2)}^1 \geq 0; H_{(2,2)}^2 - H_{(2,1)}^2 \leq 0; \\
 H_{(2,2)}^1 \leq 0,3; H_{(2,2)}^2 \geq 0,2; \\
 0 \leq H_{(2,2)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(2,2)}^2 \leq 1; 0 \leq H_{(1,2)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(2,1)}^2 \leq 1.
 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Виявляється, що в оптимальному плані задачі (4.3):

$$u = 0,88; H_{(1,2)}^1 = 0,275; H_{(2,1)}^2 = 0,6; H_{(2,2)}^2 = 0,2; H_{(2,2)}^1 = 0,283.$$

Гра $g_{(2,2)}^{\max}$ може мати наступну матрицю виграшів:

$$\left(\begin{array}{cc} 0,2;0,9 & 0,275;0,2 \\ 0,3;0,6 & 0,283;0,2 \end{array} \right), \mu_{\hat{X}}(2,2) = 0,88.$$

Розглянемо ситуацію (2,1).

Розв'яжемо для неї задачу (2.10), яка набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \rightarrow \max; \\ 0,7u + H_{(2,1)}^1 \leq 1; 0,2u - H_{(1,1)}^1 \leq 0; \\ 0,8u + H_{(2,1)}^2 \leq 1; 0,1u - H_{(2,2)}^2 \leq 0; \\ 0 \leq u \leq 1; \\ H_{(2,1)}^1 - H_{(1,1)}^1 \geq 0; H_{(2,1)}^2 - H_{(2,2)}^2 \leq 0; \\ H_{(1,1)}^1 \leq 0,3; H_{(2,2)}^2 \geq 0,2; \\ 0 \leq H_{(2,1)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(2,2)}^2 \leq 1; 0 \leq H_{(1,1)}^1 \leq 1; 0 \leq H_{(2,1)}^2 \leq 1. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Виявляється, що в оптимальному плані задачі (4.4):

$$u = 1; H_{(2,1)}^1 = 0,275; H_{(2,1)}^2 = 0,1; H_{(2,2)}^2 = 0,6; H_{(1,1)}^1 = 0,25.$$

Гра $g_{(2,1)}^{\max}$ може мати наступну матрицю виграшів:

$$\left(\begin{array}{cc} 0,25;0,9 & 0,3;0,2 \\ 0,275;0,1 & 0,8;0,6 \end{array} \right), \mu_{\hat{X}}(2,1) = 1.$$

Отже, з максимальною надійністю, що дорівнює 1, рівноважною по Нешу ситуацією є ситуація (2,1), що було відразу очевидно з аналізу розглянутої гри.

Врахуємо нечітку мету, задану формулою

$$\mu_{\hat{\Phi}}(x) = f(g_x^{\max}) = \begin{cases} \min_{k=1,2} \frac{H_k^{g_x^{\max}}(x)}{w_k^*}, & \text{якщо } H_k^{g_x^{\max}} \leq w_k^*, \\ 1, & \text{якщо } H_k^{g_x^{\max}} \geq w_k^*, \end{cases}$$

де w_k^* – виграш гравця k в ситуації рівноваги в грі g^* .

Отримуємо:

$$\mu_{\hat{\Phi}}(1,1) = 0,989; \mu_{\hat{\Phi}}(1,2) = 0,727; \mu_{\hat{\Phi}}(2,1) = 1; \mu_{\hat{\Phi}}(2,2) = 1.$$

Розглянемо нечітке рішення — нечітку множину з функцією приналежності

$$\mu_{\hat{Sol}}(x) = \min\{\mu_{\hat{X}}(x), \mu_{\hat{\Phi}}(x)\}.$$

Для $g = g_k^{\max}$ отримуємо, що

$$\mu_{\hat{Sol}}(g_k^{\max}) = \min\{\mu_{\hat{X}}(g_k^{\max}), \mu_{\hat{\Phi}}(g_k^{\max})\},$$

$$\mu_{\hat{X}}(1,1) = 0,909,$$

$$\mu_{\hat{X}}(1,2) = 0,25,$$

$$\mu_{\hat{X}}(2,1) = 1,$$

$$\mu_{\hat{X}}(2,2) = 0,88.$$

Оптимальною є ситуація (2,1). Варіант можливої гри збігається з поданим

у таблиці 4.1.

Виявилось, що за вихідних даних з таблиці 4.1 сторони не готові жертвувати своїми інтересами, місцеві власті вважають за краще будувати завод з переробки сміття, будівельна компанія – і торгівельно-розважальний комплекс.

Висновки за розділом 4

У цьому розділі було проведено обчислювальний експеримент для аналізу некоаліційної гри між будівельною компанією та місцевою владою. Гра полягала у виборі об'єкта для будівництва: заводу з переробки сміття або торгівельно-розважального комплексу. Місцеві власті та будівельна компанія діяли незалежно один від одного, а їхні виграші були представлені у вигляді трикутних нечітких чисел, моди яких наведено в таблиці 4.1.

У процесі аналізу були розглянуті всі можливі стратегії гравців, а також відповідні виграші у кожній ситуації. Виконаний розрахунок показав, що гра має рівноважну ситуацію за Нешем, яка відповідає стратегії (2,1), де будівельна компанія обирає будівництво торгівельно-розважального комплексу, а місцеві власті — будівництво заводу з переробки сміття. Ця ситуація була підтверджена як оптимальна з максимальною надійністю, що дорівнює 1.

Дослідження також показало, що нечітка мета та нечітке рішення для гри узгоджуються з цією рівноважною ситуацією. Нечітка множина з функцією приналежності підтвердила, що оптимальною стратегією для обох сторін є стратегія (2,1). Аналіз показав, що сторони не готові жертвувати своїми інтересами. Місцеві власті віддають перевагу будівництву заводу з переробки сміття, тоді як будівельна компанія прагне будувати торгівельно-розважальний комплекс.

Таким чином, експеримент підтвердив ефективність використання моделі некоаліційних ігор із нечіткими виграшами для аналізу конфліктів інтересів між двома сторонами. Використання трикутних нечітких чисел для подання ви-

грашів дозволило врахувати невизначеність у рішеннях та зробити висновок про стійкість рівноважної ситуації. Отримані результати можуть бути застосовані для аналізу подібних конфліктних ситуацій у реальних умовах, що підтверджує практичну цінність запропонованого підходу.

ВИСНОВКИ

У ході виконання роботи було проведено комплексний аналіз безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами, досліджено математичні моделі та алгоритми для визначення рівноважних стратегій учасників. Розглянуто основні теоретичні підходи до вивчення матричних ігор, рівноваги за Нешем, домінантних стратегій, а також методи, що базуються на нечіткій логіці. Особливу увагу приділено використанню трикутних нечітких чисел для моделювання виграшів у ситуаціях із невизначеністю.

Розроблено алгоритм розв'язання безкоаліційних ігор, який включає формалізацію гри, побудову матриць виграшів, визначення оптимальних стратегій та знаходження рівноваги за Нешем. Алгоритм успішно реалізовано у вигляді програмного продукту, який дозволяє автоматизувати розрахунки та візуалізувати результати, що значно полегшує аналіз конфліктних ситуацій.

Обчислювальний експеримент на прикладі вибору будівельної компанії та місцевих властей підтвердив ефективність розроблених моделей та методів. Використання системи Mathematica 11.1 забезпечило точність та швидкість розрахунків, а також надало можливість візуалізації отриманих даних. Оптимальна стратегія, визначена за умовами гри, підтвердила стійкість рівноважної ситуації.

Отримані результати свідчать про значний потенціал застосування безкоаліційних ігор із нечіткими виграшами для вирішення реальних задач із розподілу ресурсів, оптимізації процесів та управління конфліктами. Розроблені моделі й алгоритми можуть бути використані для дослідження багатокритеріальних задач у різних сферах, таких як економіка, управління проектами та соціальні процеси.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Флегонтов А. В., Вилков В. Б., Черных А. К. Моделирование задач принятия решений при нечетких исходных данных. Санкт-Петербург : Лань, 2020. 329 с.
2. Басакер Р. Саати Т. Конечные графы и сети. Москва : Наука, 1974. 368 с.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. Москва : Мир, 1978. 430 с.
4. Захаров А.В. Теория игр в общественных науках. Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2019. 304 с.
5. Вся высшая математика / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Е.В. Шикин [та ін.]. Москва : КомКнига, 2001. Т. 5. 296 с.
6. Писарук Н. Н. Введение в теорию игр. Минск : БГУ, 2015. 256 с.
7. Крушевский А. В. Теория игр. Киев : Вища школа, 1977. 216 с.
8. Bi-Matrix Games with General Intuitionistic Fuzz Payoffs and Application in Corporate Environmental Behavior. URL: <https://www.mdpi.com/2073-8994/14/4/671> (дата звернення: 01.06.2024).
9. Теория игр: Введение. URL: <https://habr.com/ru/articles/163681/> (дата звернення: 01.06.2024).
10. Saddle Point. URL: <https://medium.com/intellectually-yours/saddle-point-9a8428ed5> (дата звернення: 01.06.2024).