УДК 519.713

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ АБСТРАКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ВОСКОБОЙНИК О.Н., ИВАЩЕНКО В.В.

В работе [1] изучался вопрос о характеристических свойствах предикатов n-мерной линейности в конечномерных евклидовых пространствах типа R^n и гильбертовых пространствах типа L_2. В настоящей работе рассматривается общая ситуация, когда областью определения предиката является абстрактное линейное пространство L над произвольным полем P.

Пусть на некотором линейном пространстве L над полем P задан линейный оператор $F: L \to L$, удовлетворяющий свойствам:

1) $F(x_1 + x_2) = Fx_1 + Fx_2$, (1)

2) $F(\lambda x) = \lambda Fx$,

при произвольном выборе векторов $x, x_1, x_2 \in L$ и коэффициента $\lambda \in P$.

Определение 1. Предикат $E(x, y)$, заданный на декартовом квадрате $L \times L$, будем называть линейным, если он имеет следующую структуру:

$$E(x, y) = D_L(F[x], F[y]), \qquad (2)$$

где $F: L \to L$ —линейный оператор; D_L —предикат равенства на L.

Заметим, что понятие линейности предиката отличается от понятия линейности оператора. Однако определенная связь между ними существует. Изучаемые нами предикаты содержат оператор как элемент своей структуры. Как мы выясним ниже, свойства оператора определяют свойства предиката, и наоборот. Поэтому естественным представляется перенос терминологии, характерной для операторов, на предикаты. Этим объясняются следующие два определения, и в целом этого правила мы будем придерживаться в дальнейшем.

Определение 2. Назовем предикат $E(x, y)$ аддитивным, если при произвольном выборе векторов $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ выполнение равенств

$$E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2) = 1$$

влечет за собой выполнение равенства

$$E(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 1.$$

Определение 3. Назовем предикат $E(x, y)$ однородным, если при произвольном выборе векторов $x, y \in L$ и коэффициента $\lambda \in P$ равенство $E(x, y) = 1$ влечет равенство $E(\lambda x, \lambda y) = 1$.

Приведем и докажем теорему, содержащую простейший набор характеристических свойств линейного предиката.

Теорема. *Предикат $E(x, y)$, заданный на декартовом квадрате некоторого линейного пространства L над полем P, является линейным тогда и только тогда, когда обладает свойствами отношения эквивалентности, т.е. рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью, а также свойствами аддитивности и однородности.*

Доказательство. Утверждение теоремы состоит в эквивалентности набора перечисленных свойств и линейности предиката E. Поэтому доказательство должно быть приведено в сторону как необходимости, так и достаточности.

Допустим, предикат $E(x, y)$ линеен, тогда из его структуры вытекают свойства отношения эквивалентности. В свою очередь линейность оператора F позволяет достаточно просто непосредственно проверить выполнение свойств аддитивности и однородности. Таким образом, необходимость выполнения для линейного предиката сформулированных в теореме свойств обоснована.

Остановимся на достаточности. Заметим, что любой предикат, обладающий свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, задает отношение эквивалентности на множестве L следующим образом: $x \sim y$ (~-знак эквивалентности элементов или векторов из L) тогда и только тогда, когда $E(x, y) = 1$ [2]. В этом случае каждый элемент $x \in L$ попадает в какой-либо класс ϖ_x эквивалентных ему элементов, и если построить отображение $G: L \to \Omega$ (W-множество всех классов), ставящее в соответствие произвольному $x \in L$ класс, в котором он лежит, то будет верна следующая формула:

$$E(x, y) = D_\Omega(Gx, Gy), \qquad (3)$$

где D_Ω — предикат равенства на множестве Ω.

Действительно, пусть $E(x, y) = 1$, значит, $x \sim y$ и $Gx = Gy$, т.е. $D_\Omega(Gx, Gy) = 1$. Теперь наоборот, допустим, $D_\Omega(Gx, Gy) = 1$. Отсюда $x \sim y$ и $E(x, y) = 1$. Все это означает справедливость равенства (3).

Теперь на множестве классов Ω естественным образом можно ввести структуру линейного пространства над полем P. Для произвольных классов $\omega_{x_1} + \omega_{x_2} = \omega_{x_1 + x_2}$. Корректность этого определения получим от противного. Допустим, $x_1`, x_1 \in \omega_{x_1}, x_2`x_2 \in \omega_{x_2}$, а $\omega_{x_1+x_2} \neq \omega_{x_1`+x_2`}$. В этом случае $E(x_1, x_1`) = E(x_2, x_2`) = 1$, $E(x_1 + x_2, x_1`+x_2`) = 0$. Данная последовательность равенств противоречит аддитивности предиката $E(x, y)$, следовательно, допущение неверно и определение корректно. Аналогично, положив $\lambda\omega_x = \omega_{\lambda x}$, обосновывается корректность с использованием свойства однородности.

Введенные таким образом операции задают структуру линейного пространства Ω над полем P (в дальнейшем, если задано линейное пространство L над некоторым полем P, будем обозначать это символом $<L,P>$), а оператор $G:<L,P>\to<\Omega,P>$ является гомоморфизмом [2]. С другой стороны, любое линейное пространство, гомоморфно отображающееся на другое, имеет линейное подпространство, изоморфное образу отображения. В нашем случае это означает, что существует изоморфизм $\phi:<\Omega,P>\to<L\grave{},P>$, где $L\grave{}\subset L$ — подпространство. Теперь, если положить в качестве оператора F суперпозицию ϕG, то нетрудно убедиться в линейности оператора $F:<L,P>\to<L,P>$ и справедливости равенства (2). На этом завершается доказательство сформулированной теоремы.

Сделаем несколько замечаний, раскрывающих сущность полученного нами результата.

Линейный предикат E, заданный на $<L,P>$ и непосредственно связанный с линейным оператором F, осуществляет разбиение линейного пространства на классы, причем, как видно из хода приведенного выше доказательства, эти классы фактически являются линиями уровня оператора F, т.е. если в $ImF=L\grave{}$ зафиксировать элемент $u\in L\grave{}\subset L$, то в L ему будет соответствовать линейное многообразие $M_u\subset L$, на котором оператор F постоянен, т.е. $F(M_u)=u$, а предикат E на любой паре элементов из M_u равен 1. Следовательно, линейность предиката T означает, что он осуществляет разбиение своей области определения L, однако не какое-то, а вполне определенное, имеющее следующую структуру. Элементами этого разбиения являются линейные многообразия пространства L, параллельные некоторому подпространству, а именно $KerF$ — ядру оператора F. Понимать это надо так, что любой класс эквивалентных элементов M_u может быть получен в виде

$$M_u=u+KerF\ , \qquad (4)$$

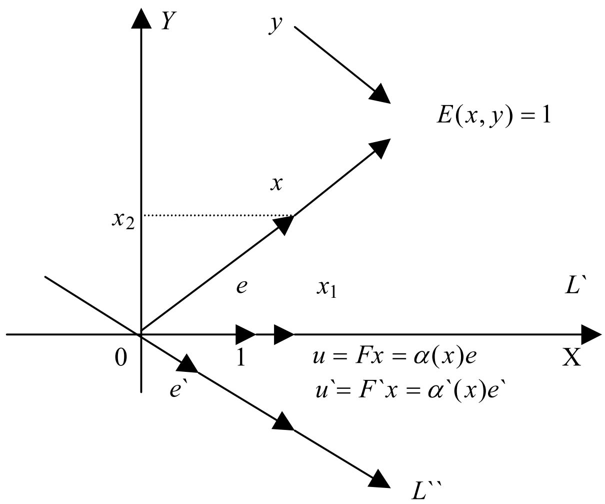
где u — произвольный фиксированный элемент из ImF= $L\grave{}$. Таким образом, линейный предикат E осуществляет “склеивание” точек вдоль многообразия M_{u} в точку u (это делает оператор F). При этом сам оператор F практически проектирует M_{u} в u, а для линейного предиката, кроме свойств, перечисленных в теореме, имеет место еще одно свойство: для любого элемента $x\in L$ в $L^{``}$ найдется единственный элемент u, для которого $E(x,\text{u})=1$.

Связь между x и u выражается равенством $Fx=\text{u}$. В дальнейшем мы покажем, что компараторная идентификация дает возможность для любого x находить u из равенства $E(x,\text{u})=1$ и тем самым восстанавливать неизвестный оператор F.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Если $ImF=L^{``}$ допускает конечный или счетный базис $e_1,e_2,...,e_n,...\in L$, то любой элемент u может быть разложен в конечную сумму или в ряд по этому базису $u=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$.Тогда u характеризуется набором или последовательностью коэффициентов разложения, а само действие оператора F на элементе x — последовательностью коэффициентов

$$\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_n(x),...,\ \text{где u} = Fx = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\ .$$

При такой интерпретации фиксированный $\alpha_k(x)$ есть линейный функционал $\alpha_k:<L,P>\to P$, а сам оператор осуществляет отображение в общем случае бесконечного числа сомножителей в поле P.



Проиллюстрируем приведенные выше замечания на несложном примере. Допустим, в качестве L выступает обычная евклидова плоскость E_2 с фиксированной в ней декартовой системой координат. Оператор $F:E_2\to E_2$ представляет собой проектирование на ось OX, т.е. $Fx=x_1$, где $x=(x_1,x_2)$. Линейный предикат

$$E(x,y)=D_{L\grave{}}(Fx,Fy)=D_{L\grave{}}(x_1,y_1).$$

В качестве $L\grave{}$ выступает ось OX, $KerF=OY$. На рисунке изображен один класс эквивалентности или линейное многообразие M_{u}, где u = Fx = x_1. Ясно, что в данном случае эти классы являются прямыми параллельными $KerF$, т.е. оси OY. Если на оси OX зафиксировать единичный вектор e, то u = Fx = α(x)e, где $\alpha(x)$ — действительное число. Класс эквивалентности M_{u} характеризуется этим числом, а оператор F, можно считать, действует из E_2 в E_1 — евклидовая прямая или поле действительных чисел, над которыми задано линейное пространство. Из этого примера наглядно видно, что имея информацию о предикате E и не имея ее об операторе F, мы фактически знаем разбиение плоскости, осуществляемое предикатом E в виде семейства параллельных прямых $\{M_u\}_{u \in E_1}$, т.е. знаем $KerF$ неизвестного оператора, но никак не образ. Точнее, зафиксировав вектор e на оси OX, ImF $= L'$ можно получить в виде $L' = \lambda e = OX$. С другой стороны, зафиксировав другой вектор $e' \in E_2$, мы можем найти $u' = \alpha'(x)e'$, для которого $E(x, \alpha'(x)e') = 1$, т.е. образ оператора будет представлять прямую $L'' = \lambda e'$, вообще говоря, не совпадающую с L', но изоморфную ей. Это обстоятельство зафиксировано в ходе доказательства теоремы. При этом оператор изменился, поскольку числа $\alpha(x)$ б и $\alpha'(x)$ не равны. Однако для нового оператора F' осталось равенство $E(x, y) = D_{L'}(F'x, F'y)$. Связь между F и F' осуществляется с помощью некоторого изоморфизма $\varphi : L' \to L''$ и выглядит $F' = \varphi F$. Подобный произвол вполне естественен с точки зрения идентификации компараторным способом и допустим с точки зрения математического моделирования (математическая модель получается с точностью до изоморфизма). Но поскольку выбор вектора e (это видно из примера) неоднозначен, зависит от исследователя и влияет на образ оператора (в данном примере число $\alpha(x)$), то возникает два вопроса: 1) каким образом осуществлять этот выбор? 2) каким образом может быть найдена связь между ImF и ImF' при двух различных выборах? Ответ на первый вопрос можно получить, рассматривая наш пример. Действительно, вектор e в данном случае может быть любым с точностью до одного ограничения: $Fe \neq 0$, т.е. он должен принадлежать $KerF$. Но оператор F нам неизвестен, и при произвольном выборе e наверняка обеспечить это условие невозможно. Однако если выбор e осуществляется наугад, то вероятность события, что $Fe \neq 0$, будет равна 1, поскольку $KerF$ подпространство более низкой размерности, чем L, а следовательно, мера его 0, если считать меру L равной 1. Этот факт наблюдается не только в нашем примере, но и в остальных ситуациях. Поэтому на практике выбор e, а в общем случае базисы $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \in L$ можно осуществлять произвольно. В этом заключается ответ на первый вопрос. Ответ на второй вопрос выходит за рамки данной статьи.

В заключение отметим, что набор свойств теоремы является необходимым и достаточным, другими словами, *характеристическим* для линейного предиката E, заданного на $< L, P >$. Проверка этих свойств в эксперименте позволяет классифицировать произвольный предикат как линейный. В этом смысле центральным результатом данной статьи является теорема существования линейных предикатов и процедура идентификации линейных операторов в произвольном линейном пространстве.

Литература: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Т.3. Харьков: Основа, 1989. 180 с. 2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию 02.11.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Воскобойник Олег Николаевич, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

Иващенко Валерий Владимирович, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

УДК 519.85

ОЦЕНКИ МИНИМУМА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК ЭКСТРЕМУМА НА ЕВКЛИДОВЫХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается задача оптимизации на комбинаторном множестве, отображенном в евклидово пространство. Для выпуклого продолжения целевой функции задачи, имеющего ограниченное множество точек экстремума, строятся оценки минимума на комбинаторном множестве. Приводятся классы целевых функций и комбинаторных множеств, для которых получены в явном виде решения вспомогательных задач.

Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$\overline{\varphi}(x) \to \min, \quad x \in E \subset R^n, \tag{1}$$

где E — евклидово комбинаторное множество [1], отображенное в пространстве R^n. Элементами множества являются векторы, значения координат которых представляют собой упорядоченные наборы из элементов множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_m$. Примерами евклидовых комбинаторных множеств являются множества перестановок, размещений с повторениями и без повторений, сочетаний и др. Элементы евклидовых комбинаторных множеств — это вершины комбинаторных многогранников, исследованию которых посвящены, в частности, работы [2-4].

Предположим, что существует выпуклое продолжение $\varphi(x)$ функции $\overline{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supseteq conv\,E$, где $conv\,E$ — выпуклая оболочка множества E. В ряде случаев оно может быть сделано с сохранением выражения $\overline{\varphi}(x)$. В то же время, для некоторых классов множеств удается