

УДК 007.001.362; 681.327.12.001.362

Е. В. ЯКОВЛЕВА

## ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОДГРУПП ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

### Введение

Под нормализацией изображений понимают процедуру компенсирования геометрических искажений, отличающих входные изображения от эталонных. Геометрические искажения могут иметь простой вид, например: неоднородные изменения масштаба по осям, повороты, косые сдвиги, смещения, а также являться комбинацией этих простых преобразований. Для разработки универсального подхода нормализации (так как заранее обычно не известен вид искажений) предположим, что входные изображения были подвергнуты действию полной аффинной группы, от которой центрированием изображения можно перейти к центроаффинным преобразованиям.

Таким образом, необходимо решить задачу нормализации входных изображений, которые отличаются от эталонных геометрическими искажениями центроаффинной группы. В работах [1-3] было предложено решение данной задачи путем совместного использования методов одномерных корреляций и разложений группы центроаффинного преобразования в суперпозицию простых групп преобразований. Но для эффективного применения на практике этого метода нормализации остается много открытых вопросов. Не решено: лучше проводить нормализацию последовательно или параллельно, какие разложения центроаффинной группы обладают преимуществами перед другими, как может зависеть выбор способа разложения от конкретных результатов одномерной нормализации, т. е. самого входного изображения.

Чтобы решить эти и множество других вопросов, необходимо более полно исследовать свойства простых преобразований, входящих в разложения. Особо при этом следует обратить внимание на закономерности изменения параметров прямых, проходящих через начало координатной системы, а именно закономерности изменения положений прямых, т. е. углов наклона, и величин коэффициентов масштаба по этим прямым, так как эти данные могут быть доступны через реализацию одномерных корреляций по соответствующим прямым входного и эталонного изображений. Использование результатов одномерной нормализации в решении двухмерной задачи нормализации изображений представляет большой интерес, о чем более подробно рассказывается в работах [3, 4]. Повышенное же внимание именно к прямым, проходящим через начало координат, объясняется существованием свойства центроаффинного преобразования переводить такие прямые, в общем случае в другие прямые, также проходящие через координаты (0;0). Таким образом, формируется множество прямых, проходящих через (0; 0), инвариантное к центроаффинному преобразованию, будем его обозначать  $S_0$  [5], и любая из прямых этого множества будет содержать информацию об изображении при условии, что оно заранее отцентрировано.

### Преобразование поворота

Начнем исследование свойств простых преобразований с преобразования поворота  $U(\alpha)$  – самого простого в смысле закономерностей изменения параметров прямых из инвариантного множества  $S_0$ . Как известно, преобразование  $U$  имеет вид

$$\begin{aligned}x^* &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y^* &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha,\end{aligned}$$

где  $x, y$  – координаты точек до преобразования  $U$ ;  $x^*, y^*$  – координаты этих точек после преобразования  $U$ ;  $\alpha$  – параметр преобразования  $U$  (угол поворота), а в полярных координатах

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho, \\ \cos \varphi^* &= \cos(\varphi + \alpha), \\ \sin \varphi^* &= \sin(\varphi + \alpha), \\ \operatorname{tg} \varphi^* &= \operatorname{tg}(\varphi + \alpha),\end{aligned}$$

где  $\varphi$  – угол наклона прямой до преобразования  $U$ ;  $\varphi^*$  – угол наклона прямой после преобразования  $U$ ;  $\alpha$  – параметр преобразования  $U$  (угол поворота).

При действии преобразования  $U$  каждая прямая поворачивается на заданный угол  $\alpha$  без изменения масштаба по прямым, т. е. каждая прямая  $l_\varphi$ , проходящая через начало координат под углом  $\varphi$ , переходит в прямую с углом  $(\varphi + \alpha)$ , коэффициент изменения масштаба равен единице. Преобразование поворота не имеет ни одной инвариантной прямой, так как все прямые меняют свое положение. Эти закономерности изменения параметров прямых наглядны и просты и вытекают из самих формул преобразования поворота в полярных координатах.

### Преобразование неоднородного масштаба по осям

Преобразование неоднородного изменения масштаба  $D(\lambda, \mu)$ , которое имеет вид

$$x^* = \lambda x,$$

$$y^* = \mu y,$$

где  $x, y$  – координаты точек до преобразования  $D$ ;  $x^*, y^*$  – координаты этих точек после преобразования  $D$ ;  $\lambda$  – параметр преобразования  $D$  (коэффициент изменения масштаба по оси  $X$ );  $\mu$  – параметр преобразования  $D$  (коэффициент изменения масштаба по оси  $Y$ ), не отличается такой простой закономерностью изменения параметров прямых, как в предыдущем случае. Запишем его в полярных координатах

$$\rho^* = \rho \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \mu^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\cos \varphi^* = \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \mu^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1)$$

$$\sin \varphi^* = \frac{\mu \sin \varphi}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \mu^2 \sin^2 \varphi}},$$

где  $\varphi$  – угол наклона прямой до преобразования  $D$ ;  $\varphi^*$  – угол наклона этой же прямой после преобразования  $D$ ;  $\rho$  – длина ограничения изображения на прямую до преобразования  $D$ ;  $\rho^*$  – длина ограничения изображения на эту же прямую после преобразования  $D$ .

Изучим закономерности изменения параметров прямых под действием преобразования  $D$ , обратив внимание на несколько важных свойств этого преобразования, знание которых облегчает нормализацию изображений.

**Свойство 1.** При  $\lambda \neq \mu$ , параметр изменения масштаба  $k$  принимает свои максимальное  $k_{\max}$  и минимальное  $k_{\min}$  значения по прямым, совпадающим с осями  $X$  и  $Y$ , причем значение  $k_{\max}$  соответствует той оси, по которой параметр преобразования  $D$  больше, и равняется ему, а значение  $k_{\min}$  – оси, по которой параметр преобразования  $D$  меньше, и равняется ему.

Для всех прямых  $l_{\varphi_i}$  (где  $\varphi_i$  – угол наклона прямой;  $i$  – номер прямой), кроме осей, параметр  $k$  принимает значения  $k_i$ ,

$$k_i = \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi_i + \mu^2 \sin^2 \varphi_i},$$

лежащие в интервале  $(k_{\min}, k_{\max})$ .

Таким образом,

$$k_{\max} = \max(\lambda, \mu),$$

$$k_{\min} = \min(\lambda, \mu),$$

$$k_{\min} < k_i < k_{\max}.$$

Если  $\lambda = \mu$ , то параметр  $k$  по всем прямым имеет равные значения  $k_i$ :

$$k_i = \lambda = \mu$$

Доказательство данного свойства представлено в различных источниках, в частности в [1].

**Свойство 2.** Если  $\lambda \neq \mu$ , то прямые, совпадающие с осями  $X, Y$ , преобразованием  $D$  переводятся в себя же, т.е. для этих прямых угол изменения положения равен нулю, а угол между ними до и после преобразования составляет  $90^\circ$ .

Все остальные прямые изменяют свое положение на угол  $\alpha$

$$\alpha = |\varphi - \varphi^*|,$$

где  $\varphi$  – угол наклона прямой до преобразования  $D$ ;  $\varphi^*$  – угол наклона прямой после преобразования  $D$ , приближаясь к той оси, по которой параметр масштабирования больше.

В случае  $\lambda = \mu$  все прямые не изменяют своего положения, т.е.  $\varphi = \varphi^*$ .

Доказательство 2-го свойства вытекает из формул (1).

Обратим внимание на то, что для преобразования  $D$ , когда  $\lambda = \mu$ , все прямые множества  $S_0$  инвариантны. Инвариантной прямой относительно преобразования называется такая прямая, которая под действием преобразования переходит в себя же, возможно, с изменением масштаба ограничения изображения на эту прямую [4]. В случае, когда  $\lambda \neq \mu$ , инвариантных прямых только две. Это прямые, совпадающие с осями  $X, Y$ .

**Свойство 3.** Любые две прямые  $l_{\varphi_1}$  и  $l_{\varphi_2}$ , для которых выполняется следующее условие:

$$ctg(\varphi_1)ctg(\varphi_2) < 0 \text{ или } tg(\varphi_1)tg(\varphi_2) < 0, \quad (2)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – угол наклона первой и второй прямой до преобразования  $D$ , могут быть переведены этим преобразованием в прямые, перпендикулярные друг другу, причем параметры преобразования  $D$  будут равны либо

$$\begin{aligned} \lambda = 1, \mu = \pm \sqrt{-ctg(\varphi_1)ctg(\varphi_2)} \\ \text{либо} \\ \lambda = \pm \sqrt{-tg(\varphi_1)tg(\varphi_2)}, \quad \mu = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Смысл условий (2) состоит в том, что прямые  $l_{\varphi_1}$  и  $l_{\varphi_2}$  должны лежать в разных четвертях.

*Доказательство.* Предположим, что существует такое преобразование  $D$ , один из параметров которого равен единице (пусть это будет параметр масштаба по оси абсцисс), переводящее любые две прямые  $l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}$  множества  $S_0$  в перпендикулярные друг другу, т.

е. после преобразования  $D$  для прямых  $l_{\varphi_1}^*, l_{\varphi_2}^*$  должно выполняться равенство:

$$|\varphi_2^* - \varphi_1^*| = \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Необходимо найти, каким для выполнения этого равенства должен быть параметр изменения масштаба по оси ординат –  $\mu$ , и определить, всегда ли возможно существование такого преобразования  $D$ , после действия, которого две прямые могут стать перпендикулярными.

Так как по предположению  $\lambda = 1$ , то вторая формула преобразования угла наклона из формул (1) будет иметь вид

$$\cos \varphi^* = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \mu^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Тогда углы наклона после преобразования для прямых  $l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}$  будут определяться по формуле

$$\varphi_i^* = \arccos \frac{\cos \varphi_i}{\sqrt{\cos^2 \varphi_i + \mu^2 \sin^2 \varphi_i}}, \quad (5)$$

где  $i$  – номер прямой.

Подставим выражения для углов (5) в равенство (4) и получим уравнение относительно  $\mu$ :

$$\left| \arccos \frac{\cos \varphi_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \mu^2 \sin^2 \varphi_2}} - \arccos \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \mu^2 \sin^2 \varphi_1}} \right| = \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Вспользуемся следующим соотношением для обратных тригонометрических функций:

$$\arccos(a) - \arccos(b) = \arccos(ab + \sqrt{1-a}\sqrt{1-b}).$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} a &= \frac{\cos \varphi_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \mu^2 \sin^2 \varphi_2}}, \\ b &= \frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \mu^2 \sin^2 \varphi_1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) будет выглядеть так:

$$\left| \arccos(ab + \sqrt{1-a}\sqrt{1-b}) \right| = \frac{\pi}{2}.$$

Чтобы функция  $\arccos$  принимала значение  $\frac{\pi}{2}$ , выражение под этой функцией должно равняться ну-

лю, т. к.  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Следовательно,

$$ab + \sqrt{1-a}\sqrt{1-b} = 0.$$

Подставив вместо параметров  $a, b$  их значения (7) и проделав некоторые преобразования, получим квадратное уравнение относительно  $\mu$  следующего вида:

$$\frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \mu^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \mu^2 \sin^2 \varphi_1} \sqrt{\cos^2 \varphi_2 + \mu^2 \sin^2 \varphi_2}} = 0,$$

решив которое, получим

$$\mu = \pm \sqrt{-\operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_2}.$$

Такой параметр  $\mu$  существует только в случае, если

$$\operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{ctg} \varphi_2 < 0,$$

т. е. знаки множителей должны быть различны. Чтобы значения функции  $\operatorname{ctg}$  от углов наклона прямых  $l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}$  из множества  $S_0$  до преобразования имели отличные знаки, эти прямые должны находиться в разных четвертях координатной плоскости. Здесь имеется в виду, что если одна прямая пересекает первую и третью четверти, то другая проходит через вторую, четвертую.

Таким образом, если прямые  $l_{\varphi_1}, l_{\varphi_2}$  множества  $S_0$  до преобразования находятся в разных четвертях координатной плоскости, то будет существовать такое преобразование  $D$  с параметрами  $\lambda=1$ ,

$\mu = \pm\sqrt{-\text{ctg}\varphi_1\text{ctg}\varphi_2}$ , которое переводит их в прямые  $l_{\varphi_1}^*$ ,  $l_{\varphi_2}^*$ , перпендикулярные друг другу.

Аналогично проводится доказательство, основанное на предположении  $\mu=1$ . Отсюда получаем, что преобразование  $D$ , для которого выполняется равенство (4) и параметры которого равны (3), существует только в случае, если  $\text{tg}\varphi_1\text{tg}\varphi_2 < 0$ , т.е. прообразы прямых  $l_{\varphi_1}^*$ ,  $l_{\varphi_2}^*$  находятся в разных четвертях.

Так как каждое разложение центроаффинной группы включает в себя преобразование  $D$ , то знание свойств этого преобразования помогает разрабатывать различные алгоритмы нормализации, основанные на методе совместного использования результатов одномерной нормализации и разложения центроаффинной группы.

Например, рассмотрим разложение

$$A = U_2 D U_1,$$

где  $A$  – центроаффинное преобразование;  $U_1$  – преобразование поворота на угол  $\alpha_1$ ;  $D$  – преобразование масштаба с параметрами  $\lambda$ ,  $\mu$ ;  $U_2$  – преобразование поворота на угол  $\alpha_2$ . Использование этого разложения подробно описано в работе [1]. Здесь же кратко отметим, что для нормализации изображений с помощью этого разложения методом одномерных корреляций находятся две перпендикулярные прямые, по которым изменения величины масштаба достигают наименьшего  $k_{\min}$  и наибольшего  $k_{\max}$  значений. Первый нормализатор поворота совмещает эти прямые с осями координат  $X$ ,  $Y$ . Нормализатор масштаба с параметрами, равными  $k_{\max}$ ,  $k_{\min}$ , приводит ограничения по всем прямым к эталонному виду, т.е. после его действия коэффициенты изменения масштаба по всем прямым становятся равными единице. Второй нормализатор поворота совмещает прямую, соответствующую эталонной прямой, проходящей по оси абсцисс на эталонном изображении, с осью  $X$  входного изображения. Теоретически этот алгоритм должен работать для любых преобразований, т.к. для его использования нет никаких ограничений. На практике его применение достаточно трудоемко и обладает низкой помехозащищенностью.

В разработке алгоритма, основанного на разложении  $U_2 D U_1$ , были использованы свойства 1, 2. Если же, например, проводить нормализацию на основе разложения

$$A = D(\lambda, \mu) U D(q, 1), \quad (8)$$

где  $A$  – центроаффинное преобразование;  $D(q, 1)$  – преобразование масштаба с параметрами  $\lambda=q$ ,  $\mu=1$ , т.е. преобразование масштаба по оси  $X$ ;  $U$  – преобразование поворота на угол  $\alpha$ ;  $D$  – преобразование масштаба с параметрами  $\lambda$ ,  $\mu$ , то ключевую роль в разработке алгоритма играет свойство 3.

Так как это разложение в предыдущих работах не освещалось, остановимся на нем более подробно. Нормализатор, построенный на разложении (8), должен действовать следующим образом. Частичный нормализатор  $F_{D(q)}$  делает прямые входного изображения, соответствующие прямым  $X$ ,  $Y$  эталона, перпендикулярными друг другу. Частичный нормализатор  $F_U$  совмещает их с осями прямоугольных координат. Тогда нормализатору  $F_{D(\lambda, \mu)}$  остается провести масштабирование по этим прямым, т.е. по осям  $X$ ,  $Y$ .

Зная о существовании свойства 3, перед тем как выбирать для нормализации разложение (8), необходимо по результатам одномерной нормализации проверить выполнение условия (2). Если найденные на входном изображении прямые, соответствующие осям эталона, находятся в пределах одной четверти, то преобразованием  $D(q, 1)$  их сделать перпендикулярными невозможно. Следовательно, применять разложение (8) в этом случае нельзя.

Это разложение с незначительными коррективами алгоритма может работать с прямыми, соответствующими любым перпендикулярным прямым на эталоне, не обязательно осям  $X$ ,  $Y$ .

### Преобразования косо́го сдвига вдоль осей

Преобразования косо́го сдвига вдоль осей  $X$  и  $Y$  (обозначаются  $X(h_x)$  и  $Y(h_y)$  соответственно) обладают меньшей наглядностью в смысле изменения параметров прямых из  $S_0$ , чем другие простые преобразования. Но эти преобразования очень важны – они вместе или одно из них содержатся во всех разложениях, кроме  $U(\alpha_2) D(\lambda, \mu) U(\alpha_1)$ ,  $D(\lambda, \mu) U D(q)$ , поэтому их изучение представляет особый интерес для разработки алгоритмов нормализации, основанных на одномерных корреляциях.

Остановимся вначале на изучении свойств преобразования  $X(h_x)$ , которое имеет вид

$$\begin{aligned}x^* &= x + h_x y, \\y^* &= y,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $x, y$  – координаты точек до преобразования;  $x^*, y^*$  – координаты этих точек после преобразования;  $h_x$  – параметр преобразования  $X$ .

Запишем преобразование  $X$  в полярных координатах

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho \sqrt{1 + h_x^2 \sin^2 \varphi + h_x \sin 2\varphi}, \\ \operatorname{tg} \varphi^* &= \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + h_x \sin \varphi}, \\ \cos \varphi^* &= \frac{\cos \varphi + h_x \sin \varphi}{\sqrt{1 + h_x^2 \sin^2 \varphi + h_x \sin 2\varphi}}, \\ \sin \varphi^* &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + h_x^2 \sin^2 \varphi + h_x \sin 2\varphi}},\end{aligned}\tag{10}$$

где  $\varphi$  – угол наклона прямой до преобразования  $X$ ;  $\varphi^*$  – угол наклона этой же прямой после преобразования  $X$ ;  $\rho$  – длина ограничения изображения на прямую до преобразования  $X$ ;  $\rho^*$  – длина ограничения изображения на эту же прямую после преобразования  $X$ .

Одним из самых наглядных свойств данного преобразования, является следующее.

**Свойство 1.** Все лучи, исходящие из центра координатной системы и лежащие в той части плоскости, где координаты  $y > 0$ , под действием преобразования  $X$  не выходят за ее пределы, но меняют положение, поворачиваясь на угол  $\alpha$

$$\alpha = (\varphi^* - \varphi),$$

где  $\varphi$  и  $\varphi^*$  – углы наклона прямой до и после преобразования  $X$  соответственно. Знак угла  $\alpha$  противоположен знаку параметра  $h_x$ . Аналогично все лучи из другой части плоскости, где  $y < 0$ , после преобразования остаются там же, поворачиваясь на угол  $\alpha$ , знак которого меняется на противоположный по сравнению со знаком угла поворота в положительной полуплоскости. Причем, прямая  $y = 0$ , разделяющая плоскость на две полуплоскости, не изменяет своего положения и угол  $\alpha$  для нее равен нулю.

Доказательство этого свойства вытекает из формул самого преобразования (9), свойства аффинного преобразования переводить прямые в другие прямые и свойства центроаффинного преобразования сохранять центр тяжести отцентрированных изображений в начале координат. Из формул (9) видно, что координаты каждой точки по оси ординат до и после преобразования  $X$  совпадают, а, следовательно, и сохраняют знак, т. е. точка остается в той полуплоскости, которой принадлежала до преобразования  $X$ , перемещаясь вправо или влево по прямой, параллельной оси абсцисс. Направление перемещения зависит от знака параметра  $h_x$  и знака координаты по оси  $Y$ , т.е. от положительности или отрицательности величины  $h_x * y$ . Так как преобразование косоугольного сдвига является подгруппой аффинной группы преобразований, то все прямые множества  $S_0$  переходят в прямые, также принадлежащие этому множеству, с одним и тем же центром. Следовательно, перемещение каждой точки прямой вдоль оси абсцисс на величину  $h_x * y$  приводит к повороту этой прямой по или против часовой стрелки, в зависимости от знака  $h_x * y$ , на величину  $\alpha$ .

Сразу обратим внимание, на то, что относительно преобразования  $X$  существуют инвариантные прямые. Ими являются все прямые, параллельные оси абсцисс. Ограничение изображения на любую из этих прямых под действием преобразования  $X$  смещается вдоль нее. Но множество  $S_0$  содержит только одну инвариантную прямую – прямую, совпадающую с осью абсцисс.

**Свойство 2.** Функция изменения параметра масштаба  $k$  по прямой  $l_\varphi$  при преобразовании косоугольного сдвига по оси абсцисс имеет вид

$$k = \sqrt{1 + h_x^2 \sin^2 \varphi + h_x \sin 2\varphi},$$

где  $\varphi$  – угол наклона прямой  $l$  до действия преобразования  $X$ ;  $h_x$  – параметр преобразования  $X$ . Для прямой, совпадающей с осью абсцисс, параметр  $k$  всегда равен единице. Для остальных прямых он либо больше, либо меньше единицы.

Это свойство получено на основании формулы изменения длины отрезка прямой, проходящей через начало координат, из группы формул (10), где, разделив длину отрезка после преобразования  $\rho$  на длину отрезка до преобразования  $\rho^*$ , получили коэффициент изменения масштаба длины отрезка, т.е. коэффициент изменения масштаба  $k$  по прямой  $l_\varphi$ .

Были построены графики функции закономерности изменения параметра  $k$  от угла наклона прямых и величины параметра косоугольного сдвига  $h_x$  рис. 1. Все графики строятся для 180 прямых, начиная с прямой, угол наклона которой равен нулю, заканчивая прямой с углом наклона  $179^\circ$ , т.е. прямые покрывают всю координатную плоскость с шагом в один градус. Величина параметра  $h_x$  на рис. 1,а равна 0,5; на рис. 1,б – (-0,5); на рис. 1,в – 9. На каждом из этих рисунков хорошо видно, что угол между прямой, по которой величина коэффициента в результате преобразования принимает наибольшее значение, и прямой, по которой это значение наименьшее, равняется  $90^\circ$ . В работе [6] доказано, что эти перпендикулярные прямые под действием любого центроаффинного преобразования переходят в прямые, также перпендикулярные друг другу.

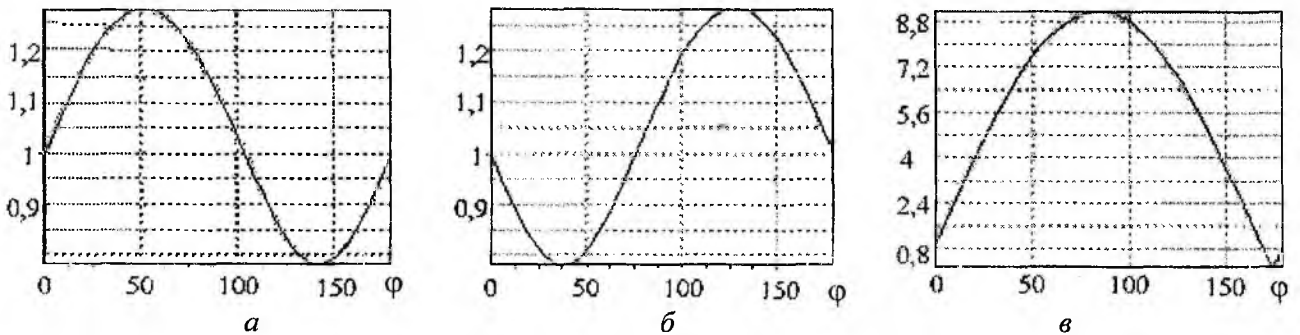


Рис. 1

Таким образом, экспериментально подтверждено для группы преобразования косоугольного сдвига  $X$  как подгруппы центроаффинной группы свойство о существовании пары перпендикулярных друг другу прямых, которые после преобразования остаются также перпендикулярными. Это свойство для преобразования косоугольного сдвига не является наглядным, как для остальных простых подгрупп центроаффинного преобразования. Благодаря этому свойству становится ясно, как преобразование косоугольного сдвига возможно нормализовать разложением  $U(\alpha_2)D(\lambda, \mu)U(\alpha_1)$ , работа с которым описана выше.

**Свойство 3.** Преобразование косоугольного сдвига может сделать любые две прямые  $l_{\varphi_1}$  и  $l_{\varphi_2}$ , для которых выполняется условие

$$\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 4 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2, \quad (11)$$

где  $\varphi_1$  – угол наклона первой прямой до преобразования  $X$ ;  $\varphi_2$  – угол наклона второй прямой до преобразования  $X$ , перпендикулярными, причем величина параметра преобразования определяется по формуле

$$h_x = \frac{-\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \pm \sqrt{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) - 4 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2}}{2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2} \quad (12)$$

Принцип доказательства сходен с принципом доказательства свойства 3 преобразования масштаба  $D$ . На рис. 2 отображена функция  $f(\varphi_1, \varphi_2) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) - 4 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2$  для  $\varphi_1 = 1 \dots 180$ ,  $\varphi_2 = 1 \dots 180$ .

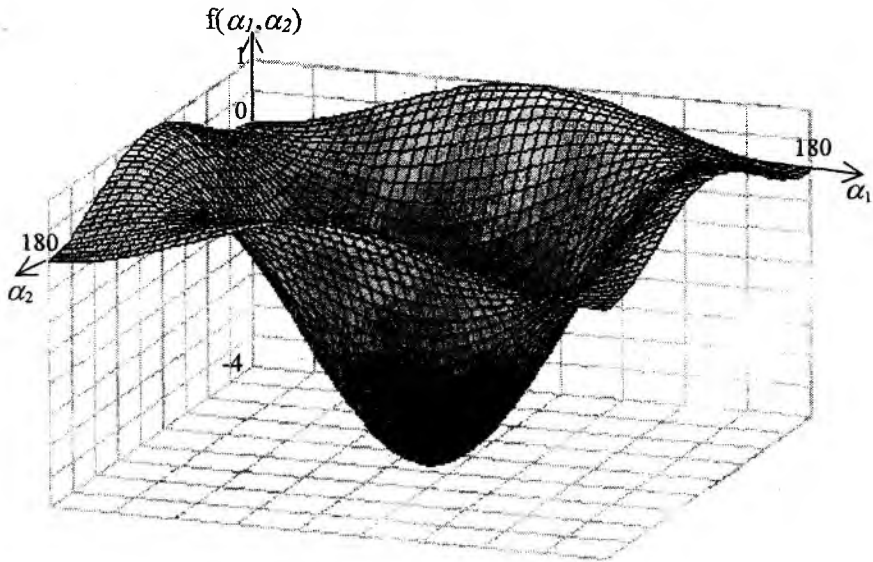


Рис. 2

Перпендикулярными могут стать только те пары прямых, для которых  $f(\varphi_1, \varphi_2) \geq 0$ . На рис. 3 серым цветом выделены те точки  $(\varphi_1, \varphi_2)$  ( $i=1 \dots n, j=1 \dots n, n$  – количество прямых для рассмотрения,  $i$  – номер первой прямой,  $j$  – номер второй прямой), значения функции в которых больше или равны нулю. Функция  $f(\varphi_1, \varphi_2)$  для  $\varphi_1=1 \dots 360, \varphi_2=1 \dots 360$  периодическая (рис. 4). Прямые  $\alpha_1=0, \alpha_1=180, \alpha_2=0, \alpha_2=180$  на этом рисунке, выделенные темно-серым цветом, указывают для каких пар  $(\varphi_1, \varphi_2)$  условие (11) выполняется, но преобразования X с параметром  $h_x$ , найденным по формуле (12), не существует, так как знаменатель этой формулы будет обращаться в ноль.

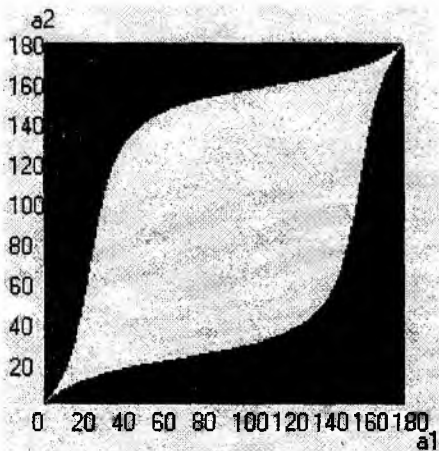


Рис. 3

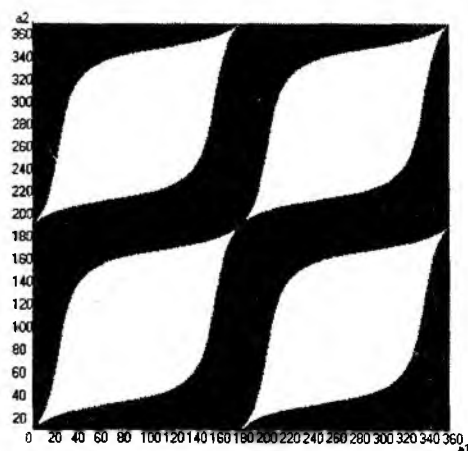


Рис. 4

Свойство 3 позволяет после получения результатов одномерной нормализации выбрать вид разложения центраффинного преобразования для нахождения параметров полной нормализации. При выборе разложения необходимо учитывать, что преобразование косоугольного сдвига, входящее в это разложение, не всегда может сделать желаемые прямые перпендикулярными.

Рассмотрим, например, разложение DUX. Нормализатор  $F_x$  должен сделать перпендикулярными прямые входного изображения, соответствующие прямым X, Y эталонного изображения и найденные в результате одномерной нормализации. В связи с этим, сначала необходимо проверить выполнение условия (11) и только после этого решать вопрос о возможности нормализации разложением DUX.

Свойства преобразования Y сходны со свойствами преобразования X с той лишь разницей, что роль прямой  $y=0$  для преобразования Y играет прямая  $x=0$ . Для преобразования Y также существует свойство делать неперпендикулярные прямые перпендикулярными. Это свойство от такого же свой-

ства для преобразования X незначительно отличается условием для прямых и формулой нахождения параметра  $h_y$ . Так условие выглядит следующим образом:

$$\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 4 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2,$$

где  $\varphi_1$  – угол наклона первой прямой до преобразования Y;  $\varphi_2$  – угол наклона второй прямой до преобразования Y; а величина параметра преобразования определяется по формуле

$$h_x = \frac{-\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \pm \sqrt{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) - 4 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2}}{2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству для преобразования X.

### Выводы

Найденные свойства и особенности подгрупп центроаффинной группы позволяют:

- оценить возможность применения каждого конкретного разложения для полученного входного изображения;
- обоснованно выбрать, по каким прямым необходимо проводить одномерную нормализацию, чтобы получить параметры простых преобразований, входящих в конкретное разложение центроаффинной группы, а следовательно, при параллельной нормализации изображений и саму нормализующую матрицу;
- сделать выводы о преимуществах использования отдельных разложений.

Таким образом, знание свойств и особенностей простых подгрупп центроаффинной группы дает возможность разрабатывать алгоритмы нормализации изображений, основанных на совместном использовании одномерной нормализации и разложений центроаффинного преобразования в суперпозиции простых преобразований.

**Список литературы:** 1. *Путятин Е.П., Яковлева О.В., Луцiv В.В.* Синтез нормалізаторів афінних перетворювань на базі одномірних кореляцій // *Радіоелектроніка та інформатика* 1999. №4. С. 78-83. 2. *Путятин Е.П., Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Разложение матрицы центроаффинного преобразования для нормализации изображений // *Радиоэлектроника и информатика* 1998. №4. С. 91-94. 3. *Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Применение одномерной нормализации и разложения матрицы центроаффинного преобразования для нормализации изображений // “Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке”: Сб. науч. работ по мат. 3-го междунар. молодежного форума 1999. 4. *Путятин Е.П., Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Исследование инвариантных прямых и их применение в алгоритмах нормализации изображений. // *АСУ и приборы автоматки* 1999. Вып. 109. С. 84-95. 5. *Путятин Е.П., Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Применение свойств аффинной группы геометрических преобразований для нормализации изображений // «Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье»: Сс. науч. тр. ХГПУ по мат. 7-ой международной науч.-технич. конф. MicroCAD-99 1999. Вып. 7. часть 1. 6. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 320с.

Поступила в редколлегию 23.05.2001