УДК 532. 59

А. Ю. ПАНЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ОДНОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ ГАЗОВЫХ СРЕДАХ

При анализе поля отраженного сигнала в слабонеоднородной среде наиболее часто используется метод однократного рассеяния. Суть его состоит в том, что поле акустического давления представляют в виде ряда $p_s = p_{s0} + p_{s1} + p_{s2} + \ldots$, в котором нулевое слагаемое соответствует полю в невозмущенной среде, а последующие описывают его изменения при возмущениях. Для слабых возмущений ограничиваются учетом p_{s1}, считают, что p_{s0} не изменяется, а слагаемые, появившиеся в волновых уравнениях для поля в неоднородной среде, определяют функции источников для p_{s1} [1,2]. Анализ проведем для наиболее простого, но в тоже время практически важного случая распространения волн в температурно-неоднородной газовой среде. Ограничимся линейной задачей. Для нее волновое уравнение приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\rho\omega^2}{\gamma p_0} p_s = 0. \tag{1}$$

где ρ – плотность газа;

p_0 – давление невозмущенного газа;

γ – адиабатическая постоянная.

Метод малых возмущений для p_{s1} дает:

$$\frac{\partial^2 p_{s1}}{\partial x^2} + k^2 p_{s1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p_{s0}}{\partial x}. \tag{2}$$

Однако такой подход не вполне соответствует реальности. Если рассмотреть решение этого уравнения для области, состоящей из двух участков, имеющих постоянные значения ρ_1 и ρ_2 и короткого участка, на котором осуществляется плавный переход от ρ_1 к ρ_2, то полученное решение не совпадает с решением для задачи отражения от резкого перехода, хотя плавный переход как с физической, так и с математической точек зрения можно рассматривать как последовательность ступенчатых изменений. Кроме того волновые уравнения для скорости акустического смещения $\vec{v}_s$ в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + \frac{\rho\omega^2}{\gamma p_0} v_s = 0. \tag{3}$$

Это уравнение в данном подходе вообще не может дать отраженного поля.

Причина несоответствий состоит в следующем. Бездоказательно было принято, что новые слагаемые в волновых уравнениях, возникшие при появлении неоднородности, полностью соответствуют величинам их воздействия на волновой процесс. На самом деле изменили свою величину и те составляющие, которые существовали раньше, так, например, в выражениях (1) и (3) плотность входит в последние слагаемые. Кроме того в выкладках при переходе от исходных волновых уравнений к уравнениям для комплексных амплитуд ограничились рассмотрением только модуля амплитуды, оставив без внимания нелинейную часть изменения фазы. Отчасти это вызвано тем, что используется только одно уравнение – оно позволяет определить только одну переменную или функцию. В среде со слабыми неоднородностями необходимо учитывать изменение фазы первичного поля и источники, создающие поле p_{s1}. Аналогичный подход используется и при анализе электромагнитных полей [3].

Опуская постоянные множители, структуру исходных уравнений для одномерной задачи можно представить как

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}+f(x)\frac{\partial\xi}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0, \qquad (4)$$

где $f(x)$ – функция, описывающая неоднородности.

Пусть $f(x)=\sqrt{f_1(x)}\cdot\sqrt{f_2(x)}$ и положим также, что $f_1(x)=f_2(x)$. Тогда (4) можно представить как

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}+f_1(x)f_2(x)\frac{\partial\xi}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0. \qquad (5)$$

Отсюда видно, что $f_1(x)$ соответствует функции обратной нормированной скорости распространения волн, а $f_2(x)$ – нормированному волновому сопротивлению. Если f_2 взять постоянной, то решение для возмущенной среды будет отличаться зависимостью волнового числа от координаты:

$$k(x)=\omega f_1(x). \qquad (6)$$

Отраженной волны здесь нет, так как это случай согласования волновых сопротивлений.

Если заменить переменную x на x', так что $\frac{\partial x'}{\partial x}=f_1(x)$, то в системе (5) останется только $f_2(x)$, которая при условии непрерывности ξ и ζ определяет соотношение между падающей и отраженной волной в каждой точке. Волновые уравнения для $\xi(x')$ и $\zeta(x')$ будут содержать слагаемое с $\frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}$ со знаком плюс или минус в каждом случае. Сомножитель $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что $f_2=\sqrt{f}$.

В случае малых возмущений ($|f(x)-1|<<1$) задача упрощается тем, что амплитуду падающей волны при переходе от точки к точке можно считать постоянной. Тогда отраженная волна определяется как интеграл по области от каждого элементарного участка. Вторичным отражением этой волны, по логике метода однократного рассеяния, пренебрегают. При этом надо учитывать, что слагаемые второго порядка малости будут потеряны.

При поиске решений для гармонических волн можно использовать менее громоздкий подход, основанный на уравнениях Гельмгольца. Представим амплитуду и фазу решения для основной волны, распространяющейся в положительном направлении, в виде сумм значений для невозмущенной области и малых добавок:

$$p_s=(p_{s0}+\Delta p_s(x))\exp(-ik_0x-i\varphi(x)). \qquad (7)$$

Опуская экспоненту, для производных получим:

$$\frac{\partial p_s}{\partial x}=\frac{\partial\Delta p_s}{\partial x}-i(p_{s0}+\Delta p_s)\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \Delta p_s}{\partial x^2}-2i\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x}\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\left[i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right](p_{s0}+\Delta p_s). \tag{9}$$

Подстановка в (1) даст два уравнения для действительной и мнимой составляющих:

$$(p_{s0}+\Delta p_s)\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\frac{\rho\omega^2}{\gamma p_0}(p_{s0}+\Delta p_s)=0, \tag{10}$$

$$2\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x}\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(p_{s0}+\Delta p_s)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}(p_{s0}+\Delta p_s)\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0. \tag{11}$$

Слагаемые второго порядка малости здесь опущены. Выражение (10) дает соотношение для волнового числа и его малых изменений:

$$\left|k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|=\omega\sqrt{\frac{\rho}{\gamma p_0}}, \tag{12}$$

откуда с учетом направления движения волны

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\omega\sqrt{\frac{\rho}{\gamma p_0}}-k_0. \tag{13}$$

Подставляя это выражение в (11), для изменения амплитуды получим:

$$\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x}-\frac{1}{4\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\Delta p_s=\frac{1}{4\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}p_{s0}. \tag{14}$$

Последовательность преобразований, аналогичная вышеизложенной, с использованием уравнения (3) для амплитуды скорости звукового смещения Δv_s приводит к

$$\frac{\partial \Delta v_s}{\partial x}-\frac{1}{4\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\Delta v_s=-\frac{1}{4\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}v_{s0}. \tag{15}$$

Здесь неоднородность ρ приводит к изменению амплитуды через изменение волнового числа $k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Сомножитель $\frac{1}{2}$ появится вследствие (6) и далее (13). Вторые слагаемые в правых частях этих уравнений имеют второй порядок малости, далее ими можно пренебречь.

Аналогичная ситуация возникает при анализе отраженного поля в газе со слабыми ветровыми неоднородностями [4]. В этом случае подстановка (7) даст для действительной и мнимой частей:

$$\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\left(1+\frac{1}{k_0c_0}\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\omega^2}{c_0^2}+2\frac{\omega v}{c_0^2}\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{v^2}{c_0^2}\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2=0, \tag{16}$$

$$\left[2\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x}\left(k_0+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(p_{s0}+\Delta p_s)\right]\left(1+\frac{1}{k_0c_0}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\omega v}{c_0^2}\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x}=0. \tag{17}$$

С учетом направления движения волны в первом приближении получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=k_0\frac{v}{c_0} \tag{18}$$

и

$$\frac{\partial \Delta p_s}{\partial x} = -\frac{p_{s0}}{2c_0}\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (19)$$

Можно заметить, что для обоих типов неоднородностей сохраняется связь между изменением скорости распространения волн и изменением амплитуды прошедшей волны. Учитывая, что $\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\Delta c}{c_0} = -\frac{\Delta \rho}{2\rho_0}$, а для ветровых неоднородностей скорость распространения волн включает скорость движения среды или $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\Delta c = \Delta v$, получим, что относительное изменение амплитуды пропорционально половине относительного изменения скорости с обратным знаком.

Необходимо отметить, что выводы, сделанные на основании (16) – (19), имеют ограниченное физическое значение. Уравнение (3) получено при соблюдении условий относительно источников первичного поля, обозначенных в [5]. В общем случае нужно учесть, что при $\Delta v \neq 0$ должны либо существовать источники вещества для основного потока, либо его дивергенция, а соответственно и производная $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, не равные нулю. Кроме того для источников вторичного поля в движущемся потоке необходимо учитывать более тонкие механизмы. Поэтому уравнение (19) можно рассматривать только как элемент во всей совокупности определяющих факторов.

Для задач диагностики газовых сред основным искомым параметром является отраженная волна. Отраженную волну решения (14) и (19) сами по себе не дают. В первом приближении выражения (14) и (15) для неподвижной среды соответствуют друг другу и решению задачи отражения от резкого перехода. Однако слагаемое второго порядка для Δp_s в решении задачи резкого перехода имеет вид $-\left(\frac{1}{4\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 p_{s0}$. Выражения (14), (15) такого слагаемого не дают. Поэтому при их использовании не соблюдается баланс мощностей, так как отраженная мощность в данном случае является величиной второго порядка малости. Строгое решение (14) или (15) дает малую добавку обратного знака, разбиение на малые участки с последовательным решением для каждого из них дает добавку вдвое меньше необходимой. Поэтому учет слагаемых второго порядка, наличие которых, возможно, приводит к отклонениям, требует строгого решения исходной системы. Аналогичные замечания можно сделать и для выражения (19). Таким образом, для определения отраженного сигнала необходим иной подход.

Наиболее распространенным приемом решения волновых задач для областей с различными условиями распространения волн является сшивка на границе, которая основана на неразрывности параметров. Неоднородность является границей, и для удобства решения ее часто представляют эквивалентным источником. В данном случае источник формирует две волны: одна распространяется в том же направлении, что и падающая, вторая – в обратном. Добавка к прямой волне должна соответствовать решению, полученному для волновых уравнений. Вторая волна создает отраженное поле. Представим последовательные выкладки для случая неподвижной среды, а для подвижной среды преобразования будут аналогичными. Обычная последовательность определения источника ориентирована на поиск параметров излучателя бесконечно малой протяженности. Запишем волновое уравнение, в правой части которого стоит пока еще неопределенная функция:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u = \phi . \quad (20)$$

Будем считать, что функция в правой части равна нулю везде кроме малой области между $\xi - \varepsilon$ и $\xi + \varepsilon$, но интеграл от нее равен значению функции источников в этой точке:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u\right)dx = f(\xi)\ . \tag{21}$$

Тогда функция u представляет собой две волны, распространяющиеся вправо и влево от точки ξ:

$$u(x) = \begin{cases} u_0 \exp(ikx + i\ \ {}_{+}) \text{ при } x < \xi\ , \\ u_0 \exp(-ikx + i\ \ {}_{-}) \text{ при } x > \xi\ . \end{cases} \tag{22}$$

Производная от $u(x)$ определяется из условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = f(\xi). \tag{23}$$

С учетом непрерывности $u(x)$ получим:

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{if(\xi)}{2k}\exp(ik(x-\xi)) \text{ при } x < \xi\ , \\ \dfrac{if(\xi)}{2k}\exp(ik(\xi-x)) \text{ при } x > \xi\ , \end{cases} \tag{24}$$

Функция источников определяется по изменению амплитуды прошедшей волны. Для температурно-неоднородной среды это даст:

$$u_0 = \frac{\partial \Delta p_s(\xi)}{\partial x}dx = \frac{p_{s0}}{4\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x}dx\ . \tag{25}$$

Для среды с ветровыми неоднородностями в соответствии с (19) получим:

$$u_0 = -\frac{p_{s0}}{2c_0}\frac{\partial v}{\partial x}dx\ . \tag{26}$$

Фаза источников в обоих случаях совпадает с фазой падающей волны.

Нахождение параметров эквивалентного источника может являться этапом при определении отраженного поля. Аналогичные рассуждения можно использовать и при анализе электромагнитных полей.

Список литературы: 1. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука. 1967. 548 с. 2. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука. 1981. 208 с. 3. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т.1. М.: Мир. 1978. 548 с. 4. *Панченко А.Ю.* Инвариантный подход к составлению уравнений акустики неоднородной движущейся среды // Радиотехника: Всеукр. .межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 122. С. 111 – 115. 5. *Панченко А.Ю.* К оценке интенсивности вторичных источников поля при акустическом зондировании турбулентных движущихся сред // Радиотехника: Всеукр. .межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 119. С. 226 – 228.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 28.10.2002