своей величине электромагнитных полей. При этом составляющие смеси подвергаются перемешиванию. Компоненты смеси, представляющие собой ионизированные массы, несут определённые заряды. В этом случае возникает сложная картина взаимодействия магнитных и гидродинамических явлений [2], которая должна рассматриваться на основе совместной системы уравнений поля и уравнений движения жидкости. Эти рассмотрения позволяют выявить лишь качественную картину взаимодействия указанных полей с жидкой средой.

В жидкой смеси на всех этапах её приготовления, как правило, возникают турбулентные движения. Они чаще всего сопровождаются возникновением в смеси магнитных полей, которые могут наблюдаться даже в слабопроводящей жидкости. Дальнейшее поведение полей – будут ли они в результате турбулентного движения в среднем заметно усиливаться или затухать – зависит от свойств самой жидкости. Как правило, имеет место затухание этих полей и тогда приходится сталкиваться с чисто гидродинамической турбулентностью, создающей фон, на котором развиваются малые магнитные возмущения.

Представляет интерес задача об ускорении процесса разделения смеси на отдельные фракции. Один из способов такого ускорения состоит в том, чтобы коэффициенты p_{j1} системы (1) претерпевали быстрые изменения во времени. Эти изменения следует подобрать так, чтобы инфинитезимальная матрица $\Lambda(t)$, отвечающая стохастической матрице $\left\| p_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\ \ (j_1,j_2,\dots,j_n)} \right\|$, претерпевала быстрые осцилляции. Каждая такая осцилляция, действующая на промежутке $s_{k-1} \le t \le s_k$, должна быть такой, чтобы момент s_k был точкой σ-фокусировки для процесса с матрицей $\Lambda(t)$. Возможность такого подхода обоснована в [3].

Если каждая осцилляция приводит к тому, что процесс с матрицей $\Lambda(t)$ фокусирует на одно и то же распределение, то, повторив их определённое число раз, в результате получим, что вероятности $p^{\bullet}_{k_i}$ из (2) будут мало отличаться от компонент распределения, на которые фокусируют указанные вариации. Этого можно добиться при соответствующем выборе возмущений матрицы:

$$\left\| p_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\ \ (j_1,j_2,\dots,j_n)} \right\| .$$

Реализация описанной схемы связана с постановкой многих лабораторных опытов.

Литература: *1. Случайные* процессы (краткий курс). Ю.А. Розанов. М.: Наука, 1971. 288 с. 2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учебное пособие в 10 т., VI. Гидродинамика. М. : Наука, 1988. 320с. *3. Дикарев В.А.* Фокусировка распределений марковских процессов // Доповіді НАН України. 1999. №11. С.100-103.

Поступила в редколлегию 25.07.2002

Рецензент:

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы и их приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-36.

Мирошниченко Анна Викторовна, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес:Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-36.

УДК 519.21

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ЭРГОДИЧНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛУМАРКОВСКИХ СИСТЕМ

ГЕРАСИН С.Н.

Описываются понятия сильной и слабой эргодичности, которые распространяются на случай неоднородных полумарковских систем. Находятся условия существования предельных вероятностей состояний.

Использование модели неоднородного марковского процесса с непрерывным временем связано с предположением, что время пребывания системы в каждом из состояний распределено по закону, имеющему показательный характер. Так, вероятность того, что система, будучи в момент времени *s* в состоянии i, будет находиться в нем еще, по крайней мере, в течение промежутка времени *t*, равна

$$P\{X(s+\tau)\equiv i, \tau \ge t \mid X(s)=i\} = e^{\int\limits_s^{s+t} \lambda_{ii}(u)du} .$$

Для многих систем предположение о показательном характере распределения времени пребывания в каждом из состояний является оправданным, но также часто приходится иметь дело с системами, для которых это время имеет распределение, отличное от показательного, для всех или хотя бы некоторых состояний (в том числе и одного). Кроме того, во многих приложениях, при сохранении независимости вероятности перехода в какое-либо из состояний от предыстории процесса, нарушается требование о независимости времени пребывания системы в каждом из состояний от того, в какое состояние система перейдет по истечении этого времени (независимость от будущего). Необходимость адекватного математического описания таких систем, поведение которых отличается (хотя и незначительно) от марковского, привела к введению понятия *полумарковский процесс.*

Определение 1. Марковский случайный процесс с вероятностями перехода из одного состояния в другое p_{ij} становится полумарковским, если распределение вероятностей времени пребывания в каждом состоянии определяется функцией распределения $F_i(t)$.

Определение 2. Пусть вероятности переходов системы из текущего состояния i в другие возможные состояния определяются элементами p_{ij} стохастической матрицы $P = \left\| p_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, а время (случайное) пребывания в состоянии i перед переходом в состояние j зависит от элемента q_{ij} неотрицательной матрицы $Q = \left\| q_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$. Такие процессы называют полумарковскими [1].

Из двух приведенных определений полумарковского процесса второе является более общим и, таким образом, охватывает более широкий класс процессов. Также следует отметить, что оба определения описывают процессы, которые можно назвать однородными: как вероятности переходов, так и распределения времени пребывания в конкретных состояниях не зависят от сдвига на временной оси. Из сказанного можно сделать вывод, что для полумарковских процессов неоднородность может проявляться в изменении с течением времени переходных вероятностей, а также в изменении параметров распределения времени пребывания в каждом конкретном состоянии, или же в “совмещении” этих двух видов неоднородности.

Для однородных полумарковских процессов, как и для марковских имеет смысл понятие стационарного распределения . Можно сформулировать условия, при которых будет иметь место сходимость к этому распределению. Более того, и для неоднородных полумарковских процессов возможно ввести понятия, аналогичные понятиям слабой и сильной эргодичности для неоднородных цепей Маркова, и найти условия, при которых полумарковский процесс будет эргодическим в слабом или сильном смысле [2].

Теорема 1. *Пусть вероятности переходов между состояниями для полумарковского процесса X(t) задаются элементами стохастической матрицы* $P = \left\| p_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, *а времена пребывания* t_i *в каждом состоянии i распределены по законам*

$$P\{\tau_i \ge t\} = F_i(t).$$

Тогда, если однородная цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей за единицу времени $P = \left\| p_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ *эргодична и имеет стационарное распределение* $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n): pP = p$, *то данный полумарковский процесс также будет эргодическим со стационарными вероятностями* $q_i, 1 \le i \le n$, *удовлетворяющими системе линейных алгебраических уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \frac{q_i}{m_i} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{m_k} p_{ki}, 1 \le i \le n; \\ \sum_{i=1}^{n} q_i &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$0 < m_i = \int_0^{\infty} F_i(t)dt < \infty, 1 \le i \le n, \qquad (2)$$

где m_i *— среднее время пребывания в состоянии i.*

Доказательство. Рассмотрим достаточно большое число переходов N. За N переходов марковская цепь в среднем $N_i = p_i N$ раз побывает в состоянии $i=1, 2, \ldots, n$. Если среднее время пребывания m_i, определяемое по формуле (2), полумарковского процесса в состоянии i известно, то можно найти среднее время T_i пребывания полумарковского процесса в состоянии i за те же N переходов:

$$T_i = p_i N m_i. \qquad (3)$$

Среднее время, затраченное полумарковским процессом на N переходов, определяется выражением

$$T = \sum_{j=1}^{n} T_j = N \sum_{j=1}^{n} p_j m_j. \qquad (4)$$

Но вероятность q_i есть вероятность застать полумарковский процесс в состоянии $i=1, 2, \ldots, n$. Значит, за время T среднее время пребывания процесса в состоянии i будет равно:

$$T_i = q_i T = q_i N \sum_{j=1}^{n} p_j m_j. \qquad (5)$$

Приравнивая (3) к (5), находим:

$$p_i = \frac{q_i \sum_{j=1}^{n} p_j m_j}{m_i}. \qquad (6)$$

Подставляя выражение p_i в уравнение $p = pP$ для стационарных вероятностей цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей за единицу времени P и сокращая полученный результат на $\sum_{i=1}^{n} p_i m_i \ne 0$ (имея в виду, что $m_i \ne 0, i = 1, 2, \ldots, n$), приходим к системе (1).

Очевидно, что если полумарковский процесс является неоднородным в том смысле, что с течением времени изменяются только вероятности переходов между состояниями, но не распределения времен пребывания в конкретных состояниях, то будет справедлива следующая модификация теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть вероятности переходов между состояниями для полумарковского процесса X(t) на k-м скачке (k = 1, 2, ...) задаются элементами стохастических матриц* $P_k = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{n}$, *а времена пребывания* t_i *в каждом состоянии i распределены по* *законам* $P\{\tau_i \geq t\} = F_i(t)$. *Тогда, если неоднородная цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей за k-ю единицу времени* $P_k = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{n}$ *эргодична в сильном смысле и имеет предельное распределение*

$$p = (p_1, p_2, ..., p_n):$$
$$p \prod_{i=1}^{n} P_{k+i} = p, \forall k > 0, \forall n > N_0, \qquad (7)$$

где N_0 *— достаточно большое число переходов, обеспечивающее равенство левого собственного вектора, который соответствует единичному собственному значению матрицы*

$$H_{k,N_0} = \left\| h_{ij}^{(k,N_0)} \right\|_{i,j=1}^{n} = \prod_{i=1}^{N_0} P_{k+i},$$

вектору распределения p, то данный полумарковский процесс также будет эргодическим (в сильном смысле) с предельными вероятностями $q_i, 1 \leq i \leq n$, *удовлетворяющими системе линейных алгебраических уравнений*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{q_i}{m_i} = \sum\limits_{l=1}^{n} \dfrac{q_l}{m_l} h_{li}^{(k,m)}, 1 \leq i \leq n; \forall k > 0, \\ \forall m > N_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1, \end{array}\right\} \qquad (1')$$

Доказательство. Доказательство, в основном, повторяет доказательство теоремы 1, с той разницей, что величины $p_i, 1 \leq i \leq n,$ определяются как компоненты вектора предельного распределения неоднородной цепи Маркова (7), а не вектора стационарного распределения однородной цепи.

Случай, когда неоднородность полумарковского процесса связана как с изменением с течением времени переходных вероятностей при скачках, так и с изменением распределений времен пребывания в различных состояниях, является более сложным с точки зрения получения условий "сильной эргодичности" для полумарковского процесса. Однако, если при этом справедливо предположение, что распределения времен пребывания не зависят от состояния, то эта задача значительно упрощается.

Теорема 3. *Пусть вероятности переходов между состояниями для полумарковского процесса X(t) на k-м скачке (k = 1, 2, ...) задаются элементами стохастических матриц* $P_k = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{n}$, *а времена пребывания* $t_i(s)$ *в каждом состоянии i после перехода в него в момент s распределены по законам*

$$P\{\tau_i(s) \geq t\} = F(s,t),$$

где функция $F(s,t)$ *удовлетворяет условию*

$$F(s,u) = F(s,t)F(t,u), s < t < u. \qquad (8)$$

Тогда, если неоднородная цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей за k-ю единицу времени $P_k = \left\| p_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{n}$ *эргодична в сильном смысле и имеет предельное распределение* (7), *то данный полумарковский процесс также будет эргодическим (в сильном смысле) с предельными вероятностями* $q_i, 1 \leq i \leq n$, *равными предельным вероятностям* p_i *соответствующей неоднородной цепи Маркова.*

Доказательство. Рассмотрим достаточно большое число переходов $N>N_0$ после момента s, соответствующего достижению к моменту k распределением "сопутствующей" неоднородной цепи Маркова своего предельного значения:

$$s = arg\left(\max_{\forall t>0} \int_0^t F(0,t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\int_{t_1}^{t} F(t_1,t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(... \times \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(t_{k-1},t_k) \frac{\partial}{\partial t_k} F(t_k,t) dt_k \right) \right) dt_2 dt \right) =$$
$$= arg\left\{ \max_{\forall k>0} \left[\frac{1}{k!} (-ln(F(0,t)))^k F(0,t) \right] \right\}.$$

Время $T_N(s)$, необходимое для этих N переходов, также оценим на основании принципа наибольшего правдоподобия:

$$T_N(s) = arg\left\{ \max_{\forall k>0} \left[\frac{1}{N!} (-ln(F(s,s+t)))^N F(s,s+t) \right] \right\}.$$

Среднее время пребывания после момента $s\,\overline{m}(s)$ для каждого из состояний будет в данном случае равно

$$\overline{m}(s) = \frac{1}{T_N(s)} \int_s^{s+T_N(s)} \left(\int_0^{\infty} F(u,u+t) dt \right) du.$$

В каждом из состояний за время $T_N(s)$ после момента s система в среднем будет находиться в течение времени

$$T_i(s) = p_i N \overline{m}(s). \qquad (9)$$

Таким образом, из (9) для времени, необходимого для N переходов после момента s, получаем выражение

$$T_N(s) = \sum_{j=1}^{n} T_j(s) = N\overline{m}(s) \sum_{j=1}^{n} p_j = N\overline{m}(s). \qquad (10)$$

Вероятность q_i застать полумарковский процесс в состоянии i после момента s находим из (9) и (10) по формуле

$$q_i = \frac{T_i(s)}{T_N(s)} = p_i,$$

что и требовалось доказать.

Полученные результаты являются естественным обобщением результатов, описанных в [3,4] для неоднородных марковских процессов на случай полумарковских процессов.

Литература: 1. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. К.: Либідь, 1993. 135 с. 2. *Герасин С.Н.* Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем. Харьков. Изд-во ХТУРЭ, 1999. 212 с. 3. *Герасин С.Н.* Условия сходимости к предельному распределению в неоднородных цепях Маркова за конечное время // Вісник Харківського національного університету. 2000. №456. С.256-259. 4. *Герасин С.Н., Дикарев В.А., Числин Н.И.* Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками перехода / / Доповіді НАН України. 1998. №7. С.15-19.

Поступила в редколлегию 11.06.2002

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел: (0572)40–93–72 (раб.), (057)772–12–38 (дом.), e–mail: sgerasin@mail.ru.

УДК 62-50

МЕТОД “ЗАМОРАЖИВАНИЯ” В СИНТЕЗЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ

ДУБОВИК С.А.

Рассматривается задача приведения с векторным конечным условием для многомерного объекта при действии возмущений. Предлагается приближённый способ последовательного приведения, основанный на процедуре “замораживания” части коэффициентов регулятора, гарантирующей устойчивость и необходимую терминальную точность замкнутой системы.

Типичной для терминального управления является задача приведения в ноль вектора выхода линейной многомерной системы за конечное время. Известное её решение в форме синтеза имеет в конечный момент t_f особенности в коэффициентах обратной связи [1,2]. Это не позволяет реализовать решение для управления вплоть до t_f включительно – всегда существует интервал (t_1, t_f), где начинают проявляться некоторые ограничения, затрудняющие дальнейшее увеличение коэффициентов терминального регулятора. Эта проблема реализации терминального управления хорошо известна, но она не является единственной, особенно в многомерных задачах. В [1] показано, что в условиях возмущений задача приведения удовлетворительно разрешима только для идеально управляемых систем, что в обозначениях [1] эквивалентно равенству матриц при управлении и шуме: $b = g$. В задачах для многоканальных процессов возникают схемы различной управляемости. Так, при управлении продольным движением летательного аппарата с вертикальной тягой (ЛАВТ), совершающего посадку на палубу качающегося плавсредства, можно выделить два контура приведения – по дальности и по высоте. Вследствие качки канал высоты сильно зашумлен и не идеально управляем. В таких условиях представляется рациональной следующая схема последовательного управления. Сначала ЛАВТ приводится по дальности в заданную окрестность при одновременной стабилизации в канале высоты, а затем решается задача приведения по высоте, т.е. обеспечивается надлежащий контакт ЛАВТ с посадочной площадкой по вертикальным относительным координате и скорости. Успех применения подобной процедуры зависит от возможности перейти в канале дальности от терминального управления к стабилизации, т.е. “заморозить” управление. Эта ситуация является типичной при управлении многомерными марковскими процессами, в состав управляющих параметров которых входит момент остановки. В общей стохастической постановке такие задачи приводят к теории диффузионных процессов, далёкой от практически приемлемых решений. Предлагаемый метод “замораживания” даёт простой способ отделения задачи выбора момента остановки от процедуры синтеза управлений.

Рассмотрим на конечном промежутке $[0, t_f]$ линейную систему для $n-$вектора состояния $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$:

$$dX/dt = AX + bU, \quad X(0) = X_0.$$

Здесь $U-$скалярное управление; A и b – матрица и вектор (соответственно) с постоянными элементами, составляющие управляемую пару. Управление будем выбирать таким образом, чтобы в момент $t = t_f$ обеспечить нулевые значения координаты $x_1(t)$ и k её производных $(k \le n)$. Переходя к каноническим переменным для состояния и управления [1,3], можно конкретизировать указанную задачу:

на движениях системы

$$dx/dt = J_n x + b_n u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

для вектора $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ и выхода (везде далее нулями обозначены нулевые матрицы подходящих размеров)

$$y(t) = Cx(t), \quad y_f = y(t_f), \tag{2}$$
$$C = \left(e_{k1}, e_{k2}, \cdots, e_{kk}, 0, \cdots, 0\right),$$

где $J_n = \left(0, e_{n1}, e_{n2}, \cdots, e_{n(n-1)}\right)$, $b_n = e_n$, e_{ni} – $n-$вектор, i-й элемент которого 1, а остальные – нули, $e_n = e_{nn}$,

минимизировать функционал $(\mu > 0)$