УДК 621.396.2.: 621.316.2

В. А. ТИХОНОВ, канд. техн. наук, К. В. НЕТРЕБЕНКО

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение

Актуальным является поиск эффективных спектральных оценок высших порядков, которому посвящены многие работы по статистическому анализу случайных процессов. Основной целью анализа спектров высших порядков является обнаружение дополнительной информации, которая может отсутствовать в спектрах второго порядка. Проводятся исследования по применению спектров высших порядков в таких областях, как океанография, геофизика, пассивная гидролокация, биомедицина, связь, науки о Земле, при исследовании временных рядов в экономике и анализе данных наблюдения солнечных пятен [1].

Для анализа негауссовых процессов предлагалось использовать периодограммы третьего порядка [2]. Они получались произведением трех конечных преобразований Фурье негауссовых случайных процессов. Изучению кумулянтных спектров высших порядков посвящены работы [3, 4]. Фурье-анализ моментных функций временных рядов анализировался и в других работах [5]. Так, Тюки и другие авторы предложили название биспектра для спектра третьего порядка, а спектр четвертого порядка был назван триспектром [2]. Наряду с использованием этих терминов будем называть спектры s – го порядка «моментограммой s – го порядка», если они получены $s-1$ – кратным преобразованием Фурье от соответствующих моментных функций s – го порядка.

Применение параметрической оценки спектров дает во многих случаях преимущества по сравнению с использованием коррелограммного или периодограммного методов оценок СПМ. Обычно параметрические оценки СПМ вычисляются по параметрам моделей линейного предсказания, найденным по корреляционной функции. Однако модели линейного предсказания можно строить и по моментным функциям, описывающим негауссовы свойства процессов [6]. Такие модели называются обобщенными моделями линейного предсказания. На основе обобщенных моделей линейного предсказания также можно находить параметрические оценки спектров высших порядков. Если параметры модели находятся по моментным функциям s – го порядка, то такая модель называется обобщенной моделью s – го ранга.

Задачами статьи является: вывод уравнений для нахождения параметрической оценки спектров четвертого порядка на основе обобщенной модели авторегрессии (ОАР); генерация негауссова процесса авторегрессии с заданным спектром; параметрическая оценка спектра четвертого порядка полученного негауссова процесса; анализ оптимальности построенной модели ОАР четвертого ранга.

Целью статьи является разработка и анализ элементов теории параметрической оценки спектров высших порядков на основе обобщенных моделей линейного предсказания четвертого порядка.

Приведены формулы параметрической оценки спектров четвертого порядка на основе обобщенных моделей авторегрессии (ОАР) четвертого ранга. При их выводе использовались свойства преобразования спектров негауссова белого шума в линейных системах, описываемых моделями авторегрессии. На примере имитационного негауссова процесса авторегрессии четвертого порядка продемонстрированы параметрические оценки спектра четвертого порядка.

Обобщенная модель авторегрессии четвертого ранга

Модели линейного предсказания ОАР могут использоваться для получения параметрических спектральных оценок случайных процессов. Найдем выражения для расчета коэффициентов ОАР четвертого ранга.

Для построения модели ОАР четвертого ранга, описываемой рекуррентным уравнением

$$x[t]=\sum_{i=1}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]x[t-i]+a_4^{l,k}[t], \tag{1}$$

необходимо потребовать, чтобы ошибка предсказания $a_4^{l,k}[t]$ имела нулевую моментную функцию четвертого порядка при некоторых фиксированных l,k. Параметры модели $p_{l,k}$ и $\Phi_4^{l,k}[i]$ определяются моментными функциями негауссова процесса четвертого порядка.

Чтобы получить уравнения, по которым можно было бы вычислять $\Phi_4^{l,k}[i]$, необходимо левую и правую части (1) умножить на $x[t-j]x[t-l]x[t-k]$ и взять математическое ожидание. Тогда уравнение для расчета коэффициентов ОАР четвертого ранга имеет вид

$$m_4[j,j-l,j-k]=\sum_{i=1}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]m_4[j-i,j-l,j-k],\ j>0,\ l\ge 0,\ k\ge 0. \tag{2}$$

Для вычисления коэффициентов ОАР фиксируются l,k, а затем составляется система уравнений $p_{l,k}$ – того порядка. Значение сдвигов l и k выбираются, исходя из решаемой задачи и негауссовых свойств моделируемого процесса.

Параметрические спектры четвертого порядка обобщенной модели авторегрессии

Моментограмма четвертого порядка входного процесса типа негауссова белого шума преобразуется в линейной системе, описываемой моделью ОАР, по формуле [5]

$$\begin{aligned}P_4(\omega_1,\omega_2,\omega_3)&=m_{4a}\sum_{n=0}^{\infty}h_n e^{-j\omega_1 n}\sum_{r=0}^{\infty}h_r e^{-j\omega_2 r}\sum_{u=0}^{\infty}h_u e^{-j\omega_3 u}\sum_{v=0}^{\infty}h_v e^{-j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)v}=\\&=m_{4a}H(\omega_1)H(\omega_2)H(\omega_3)H(-\omega_1-\omega_2-\omega_3).\end{aligned} \tag{3}$$

Линейная система, описываемая выражением (1), имеет рациональную передаточную функцию

$$H(z)=\frac{1}{\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]z^{-i}}, \tag{4}$$

где $\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]z^{-i}$ – оператор авторегрессии. Чтобы получить частотную характеристику системы, сделаем замену $z\to e^{j\omega T}$ в (4)

$$H(z)=\frac{1}{\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]e^{-j\omega Ti}}. \tag{5}$$

Выражение для спектральной плотности мощности четвертого порядка (3) модели ОАР четвертого ранга с учетом (5) имеет вид

$$P_4(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]e^{-j\omega_1 Ti}\sum_{u=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[u]e^{-j\omega_2 Tu}\sum_{v=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[v]e^{-j\omega Tv}\sum_{r=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[r]e^{j(\omega_1+\omega_2+\omega_3)Tr}}. \quad (6)$$

Как видно из полученного соотношения (6), параметрическая спектральная оценка четвертого порядка комплексная. Таким образом, в отличие от СПМ второго порядка, спектры высших порядков характеризуются не только абсолютной величиной, но и фазой, что важно при решении ряда задач.

Для анализа спектральной плотности мощности четвертого порядка можно также применять одномерные спектры. В таком случае достаточно воспользоваться выражением, которое можно получить из (6) при условии $\omega_1=\omega_2=0$,

$$P_4(\omega)=\frac{m_{4a}K_4}{\left|\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]e^{-j\omega Ti}\right|^2},\ K_4=\frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{p_{l,k}}\Phi_4^{l,k}[i]\right)^2}. \quad (7)$$

Хотя многомерные спектры высших порядков сложнее анализировать чем СПМ второго порядка, использование их параметрического представления дает значительное преимущество. Только p параметров модели содержат исчерпывающую информацию как о самом спектре высшего порядка, так и о системе, моделирующей передаточную функцию соответствующего формирующего линейного фильтра. Многомерный спектр высших порядков содержит существенно избыточную информацию. Существенно меньшей избыточностью обладают коэффициенты ОАР. Применение параметрических спектров высших порядков оправдано тем, что сложные реальные нелинейные системы, формирующие негауссовы процессы, могут аппроксимироваться набором линейных моделей предсказания разных рангов. Например, анализируя модели ОАР для различных фиксированных сдвигов, получают характеристики системы, с помощью которой мог быть получен данный спектр высшего порядка.

Оценки СПМ модели ОАР четвертого ранга имитационного случайного процесса

Рассмотрим пример параметрической спектральной оценки четвертого порядка негауссова процесса. Выборка процесса была получена с помощью авторегрессионного формирующего фильтра четвертого порядка. В качестве порождающего процесса использовался негауссов белый шум с одномерным гамма – распределением и парамерами формы и масштаба $c=4$, $b=1$ соответственно. Длина реализации равнялась 200 отсчетам. Значения относительных частот спектральных пиков и соответствующие им полосы частот выбирались равными $f_1=0$, $\Delta f_1=0{,}08$, $f_2=0{,}4$, $\Delta f_2=40$. Коэффициенты АР расчитывались согласно [8] и составляли $\Phi[1]=0{,}129$, $\Phi[2]=0{,}837$, $\Phi[3]=0{,}347$, $\Phi[4]=-0{,}47$. Параметрический спектр второго порядка, рассчитанный по этим коэффициентам, представлен на рис. 1.

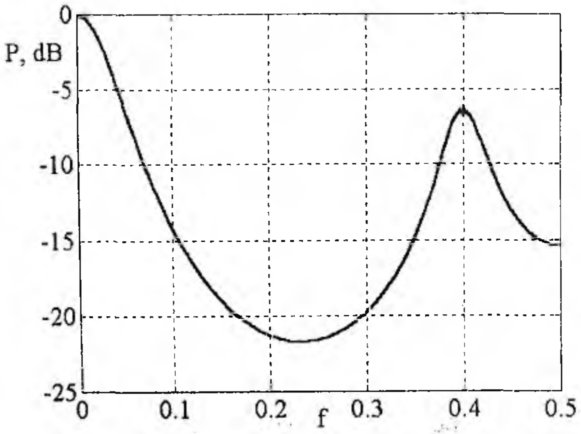

Рис. 1

Так как негауссов процесс является процессом авторегрессии, полученным с помощью линейного формирующего филь-тра, то его оценки спектра высших порядков будут иметь вид соответствующий спектру второго порядка. Оценки коэффициентов ОАР модели четвертого ранга можно получать для разных сдвигов l и k, используя (2). На рис. 2 представлены графики праметрических оценок спектра четвертого порядка в зависимости от порядка модели, расчитанные по (7). Коэффициенты ОАР были рассчитаны для модели с $l=1, k=1$. Как видно из графиков, они довольно точно соответствуют моделируемому спектру (рис. 1) при значениях порядка ОАР, равных $p = 4 \div 7$.

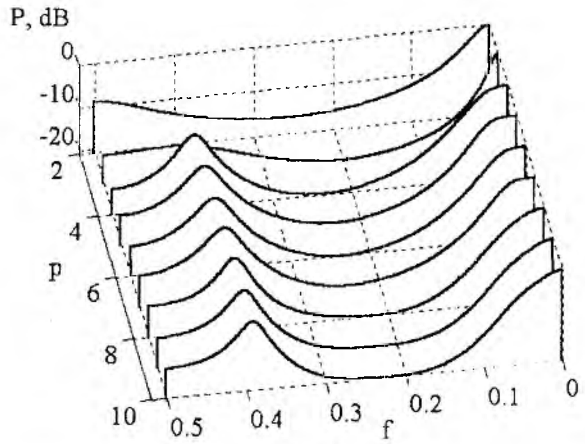

Рис. 2

На рис. 3 показана зависимость значений моментной функции четвертого порядка ошибки предсказания от порядка модели. Значения моментных функций взяты в точках 1 – $m_{4a}[1,1,-1]$, 2 – $m_{4a}[1,1,-2]$, 3 – $m_{4a}[1,1,-3]$. Как следует из графиков, минимальное значение, как правило, наблюдается уже при четвертом порядке модели. Это доказывает, что ошибки предсказания модели ОАР четвертого порядка практически статистически независимы.

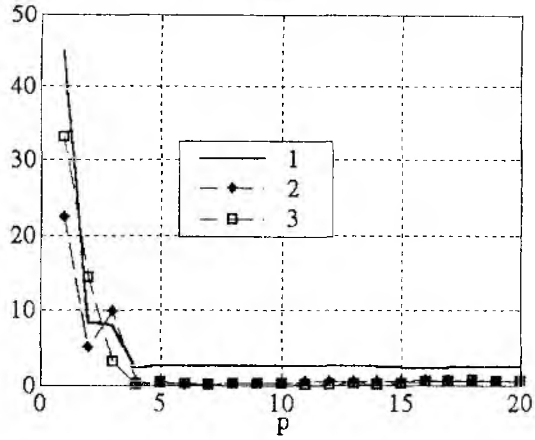

Рис. 3

На рис. 4 показаны графики сечений оценок спектра, полученных преобразованием Фурье от моментных функций четвертого порядка. Спектры соответствуют наборам сечений при значениях сдвигов $l=k=0$; $l=1$, $k=0$; $l=k=1$ Представленные на рис. 4 оценки получены с применением процедуры взвешивания моментных функций окном Блэкмана-Хэрриса длиной $N=51$. Сравнение оценок представленных на рис. 2 для порядков $p = 4 \div 7$ и на рис. 4 показывает их достаточное сходство. В то же время параметрические спектральные оценки не искажаются боковиками и процедурой сглаживания при использовании оконной обработки.

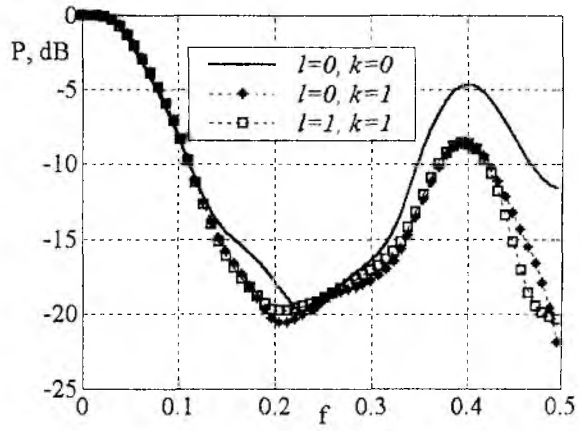

Рис. 4

Выводы

На основании принципа статистической независимости ошибок предсказания получены уравнения модели ОАР четвертого ранга негауссовых процессов. Из уравнений преобразования спектров высших порядков линейной системой, описываемой моделью ОАР, найдены выражения для расчета параметрической оценки спектров четвертого порядка. Найденные выражения были использованы для получения параметрической оценки спектра негауссова имитационного процесса. Проведенные исследования показали, что параметры полученных моделей довольно точно отражают спектр имитационного процесса.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что впервые получены соотношения, позволяющие получать параметрические оценки спектров высших порядков по обобщенной модели АР. Предложенный способ оценки спектров высших порядков расширяет возможности применения моделей линейного предсказания для исследования негауссовых процессов, что имеет практическое значение при моделировании линейных систем и случайных процессов.

Список литературы: 1. *Журбенко И.Г.* Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 240 с. 2. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 3. *Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятности и ее применение. 1960. №№ 5, 3. С. 293 – 313. 4. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 124 с. 5. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с. 6. *Тихонов В.А.* Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2003. № 132. С. 78 – 82. 7. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 8. *Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.Е.* Генерация узкополосных имитационных случайных процессов // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4. С. 83 – 85.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 29.01.2004