УДК 517.958:517.988.8

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА ДО ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА У $\mathbb{R}^2$

Чернишов Б.С.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(066)-859-62-85, email: bohdan.chernyshov@nure.ua

The paper considers the application of the Green-Rvachev quasi-functions method to the construction of the method of two-sided approximations for the numerical analysis of the first boundary value problem for the semilinear elliptic equation with the Laplace operator on the plane. The work of the proposed method was tested on a model problem arising in population genetics.

Задачі математичного моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у нелінійних середовищах, задачі хімічної кінетики, задачі фізики плазми, теорії горіння, біології, екології тощо приводять до необхідності знаходження додатного розв’язку наступної крайової задачі:

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де Ω – область у $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = (x_2, x_2)$, $f(\mathbf{x}, u)$ неперервна і додатна для всіх $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $u > 0$ функція.

Точні розв’язки задач вигляду (1), (2) майже не відомі, а серед чисельних методів аналізу цієї задачі перш за все слід виокремити метод двобічних наближень. У своєму класичному варіанті він заснований на переході від диференціальної задачі до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, ядром якого є функція Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа [1]. Отримане інтегральне рівняння є основою для побудови двох послідовностей функцій, які знизу та зверху наближають шуканий розв’язок. Обмеженість практичної реалізації такого підходу пов’язана з тим, що, незважаючи на існування функції Гріна для доволі широкого класу областей, її фактичне знаходження може біти здійснено лише у поодиноких випадках. Отже, актуальною є розробка нових методів двобічних наближень, які б мали ширші конструктивні можливості.

Це може бути зроблено на основі переході до еквівалентного задачі (1), (2) інтегрального рівняння Урисона, використовуючи квазіфункцію Гріна-Рвачова замість функції Гріна [1].

Нехай область Ω обмежена скінченною кількістю кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, де $\sigma_i(\mathbf{x})$ – елементарна функція, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді за допомогою конструктивного апарату теорії R-функцій [2] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω; б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$; в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Квазіфункцією Гріна-Рвачова першої крайової задачі для оператора Лапласа у $\mathbb{R}^2$ назвемо функцію $Q_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1+\dfrac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}$, де $\mathbf{x} = (x_2, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_2, s_2)$, $r = |\mathbf{x}-\mathbf{s}| = \sqrt{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}$.

Реалізовуючи описаний у [2] підхід, отримаємо, що задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню:

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega P(\mathbf{x},\mathbf{s},u(\mathbf{s}))d\mathbf{s}, \tag{3}$$

де

$$P(\mathbf{x},\mathbf{s},u(\mathbf{s})) = K_2(\mathbf{x},\mathbf{s})u(\mathbf{s}) + Q_2(\mathbf{x},\mathbf{s})f(\mathbf{s},u(\mathbf{s})),$$

$$K_2(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial s_1^2}(\mathbf{x},\mathbf{s}) + \frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial s_2^2}(\mathbf{x},\mathbf{s})\right),\ \ \tilde{g}(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \ln\frac{1}{\sqrt{r^2+4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}.$$

Рівняння (3) розглядатимемо у банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$ неперервних у $\overline{\Omega}$ функцій як рівняння з гетеротонним оператором. При цьому простір $C(\overline{\Omega})$ вважатимемо напівупорядкованим за допомогою конуса невід'ємних функцій. Якщо цей гетеротонний оператор має сильно інваріантний конусний відрізок, то, взявши за початкові наближення кінці цього відрізка, можна побудувати двобічний ітераційний процес знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2). Обчислювальний експеримент було проведено для $f(\mathbf{x},u) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4}u^{\frac{3}{4}}$, яка виникає, зокрема, при вивченні селекційної міграційної моделі у популяційній генетиці [3]. Отриманий з двобічною оцінкою похибки чисельний розв'язок було порівняно з розв'язком, отриманим методом скінченних різниць у [3].

Описаний підхід до побудови методу двобічних наближень може бути розповсюджений на напівлінійні еліптичні рівняння з операторами більш загального вигляду, а також на задачі, що розглядаються у $\mathbb{R}^m$, $m > 2$.

Список використаних джерел:

1. Сидоров, М.В. (2017). Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна-Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*, 2, 250-259.

2. Рвачев, В. Л. (1982). *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Наукова думка.

3. Matinfar M., & Nemati K. (2008). A numerical extension on a convex nonlinear. *International Mathematical Forum*, 3 (17), 811-816.