ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ОДНІЄЇ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОЇ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Кончаковська О.С.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

Nonlinear boundary value problem that is a mathematical model of simple electrostatic microelectromechanical system is investigated. To construct two-sided successive approximations and for numerical analysis of the problem was used the transition to an equivalent system of nonlinear integral equations based on the Green-Rvachev's quasi-function. Obtained an equivalent system of nonlinear integral equations is analyzed by methods of the theory of semiordered spaces.

При математичному моделюванні електростатичних мікроелектромеханічних систем виникає необхідність дослідження нелінійної крайової задачі вигляду:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} \quad \text{у} \quad \Omega \subset \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

$$0 < u < 1 \quad \text{у} \quad \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $f(\mathbf{x})$ – функція, яка характеризує фізичні властивості розглядуваного процесу, $0 < f(\mathbf{x}) \le 1$, $\lambda > 0$ – числовий параметр, Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Для чисельного аналізу задачі (1), (2) у роботах [1, 2] було запропоновано метод двобічних наближень, заснований на використанні функції Гріна першої крайової задачі для оператора Лапласа. Метод показав свою ефективність при розв'язанні тестових задач, але мав недолік, пов'язаний з тим, що для його практичної реалізації треба знати аналітичний вираз функції Гріна. Це значно звузило практичне застосування метода до розгляду задачі (1), (2) лише у таких областях Ω як коло, квадрат та деякі інші. Одним зі шляхів поширення методу двобічних наближень розв'язання задачі (1), (2) на області довільної геометрії є використання замість функції Гріна відповідної квазіфункції Гріна-Рвачова [3].

Нехай відома функцію $\omega(\mathbf{x})$ така, що:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω; б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$; в) $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \ne 0$ на $\partial\Omega$.

Тоді задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(\mathbf{x}) = \int_\Omega K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_\Omega \frac{Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}{(1 - u(\mathbf{s}))^2}, \tag{3}$$

де $K(\mathbf{x},\mathbf{s}) = -\dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\mathbf{s}}\left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{r^2+4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}\right)$, $Q(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\sqrt{1+\dfrac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}$

– квазіфункція Гріна-Рвачова, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $r = |\mathbf{x}-\mathbf{s}| = \sqrt{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}$.

Рівняння (3) розглядатимемо як нелінійне операторне рівняння у просторі $C(\bar{\Omega})$, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних функцій. Оператор T, який визначається правою частиною рівняння (3), буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v,\,w)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} K^+(\mathbf{x},\mathbf{s})v(\mathbf{s})d\mathbf{s} - \int\limits_{\Omega} K^-(\mathbf{x},\mathbf{s})w(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \lambda\int\limits_{\Omega}\frac{Q(\mathbf{x},\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}}{(1-v(\mathbf{s}))^2},$$

де $K^+(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0,\,K(\mathbf{x},\mathbf{s})\}$, $K^-(\mathbf{x},\mathbf{s}) = \max\{0,\,-K(\mathbf{x},\mathbf{s})\}$.

Умовами $\hat{T}(v^0,w^0) \ge v^0$, $\hat{T}(w^0,v^0) \le w^0$ виділимо у конусі K_+ сильно інваріантний конусний відрізок $< v^0,\, w^0 >$ і сформуємо ітераційний процес

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)},w^{(k)}),\ w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)},v^{(k)}),\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

($v^{(0)} = v^0$, $w^{(0)} = w^0$). Існують границі $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ цих послідовностей і справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \le v^{(1)} \le \ldots \le v^{(k)} \le \ldots \le v^* \le w^* \le \ldots \le w^{(k)} \le \ldots \le w^{(1)} \le w^{(0)} = w^0.$$

Рівність $v^* = w^*$ матиме місце, якщо $\gamma = M_1 + \dfrac{2\lambda\max\limits_{x\in\bar{\Omega}} f(\mathbf{x})}{(1-M_0)^4}M < 1$, де

$M_0 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}} w^0(\mathbf{x})$, $M = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int\limits_{\Omega} Q(\mathbf{x},\mathbf{s})d\mathbf{s}$, $M_1 = \max\limits_{\mathbf{x}\in\bar{\Omega}}\int\limits_{\Omega}[K^+(\mathbf{x},\mathbf{s}) + K^-(\mathbf{x},\mathbf{s})]d\mathbf{s}$.

Отже, справджується теорема.

Теорема. Нехай $< v^0,\, w^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок і $\gamma < 1$. Тоді ітераційний процес (4) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $< v^0, w^0 >$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (1), (2).

Список використаних джерел:

1. Кончаковська О.С., Сидоров М.В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – Вип. 39, 2018. – С. 33 – 41.

2. Кончаковская О.С., Сидоров М.В. Применение методов нелинейного анализа в математическом моделировании микроэлектромеханических систем // Бионика интеллекта. – 2017. – № 1 (88). – С. 60-64.

3. Sidorov M.V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems // Carpathian Mathematical Publications. – 2018. – T. 10. – №. 2. – С. 360-375. DOI:10.15330/cmp.10.2.360-375.