УДК 621.385.6

В. И. ХОЛОДОВ, канд. физ.-мат. наук, *Н. А. ХИЖНЯК*, д-р физ.-мат. наук

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ПРОДОЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАННОГО ПОЛЯ

Эффективность преобразования кинетической энергии электронного потока в энергию высокочастотных колебаний в устройствах клистронного типа существенно зависит от группирователя пучка. Аналогичная задача возникает и в теории линейных ускорителей. Группирователь пучка определяет эффективность захвата частиц в процессе ускорения.

В физике СВЧ и ускорительной физике обычно используется однозазорный группирователь клистронного типа. Более высокие результаты можно получить, применив однозазорные группирователи с модулирующим напряжением, содержащим кроме основной частоты ряд ее гармоник. Поэтому исследуем модуляцию электронного пучка системой модулирующих зазоров, через которые проходит электронный пучок. С учетом сил объемного заряда в самосогласованной постановке рассмотрим группирующие свойства цепочки резонаторов, запитываемых СВЧ-сигналом постоянной частоты, но разнесенных на определенное расстояние с заданным фазовым сдвигом между полями.

Поле цепочки резонаторов представим как

$$\psi(t,\ z) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v_\text{ф}} z + \varphi_0\right),$$

где ω — частота модулирующего напряжения; $U_\text{ф}$ — фазовая скорость волны; φ_0 — начальная фаза модулирующего напряжения. Тогда уравнение движения частиц в лагранжевых переменных с учетом действия сил объемного заряда в безразмерных переменных примет вид [1]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon \cos(\nu\tau - x + \Phi_0). \tag{1}$$

Здесь ε — параметр взаимодействия, $\varepsilon = eE_0/(m\omega v_\text{ф})$; ν — безразмерная частота модулирующей силы, $\nu = 1 - v_0/v_\text{ф}$; Φ_0 — начальная фаза внешней силы, $\Phi_0 = \varphi_0 + (v_0/v_\text{ф})\,\tau$; τ_0 — начальное безразмерное время, $\tau_0 = \omega t_0$; v_0 — скорость невозмущенного потока частиц; ω_0 — параметр пространственного заряда, $\omega_0 = \omega_\text{р}/\omega$. Для реальных величин, входящих в выражение параметра взаимодействия, $\varepsilon < 0{,}1$, если ускоряющее поле $E_0 < 643$ кВ/м, замедление электромагнитной волны $v_\text{ср}/c = 0{,}2$ и $\lambda = 10$ см. Величина x связана с функцией деформации частиц пучка по закону

$$x = \frac{v_0}{v_\text{ф}}\tilde{\zeta} = \frac{v_0}{v_\text{ф}}\left[\int_{\tau_0}^{\tau} v(\tau,\ \tau_0)\,d\tau - (\tau - \tau_0)\right], \tag{2}$$

где $v(\tau, \tau_0)$ — безразмерная полная лагранжева скорость частиц пучка, влетающих в пространство дрейфа в момент $\tau = \tau_0$.

Уравнение (1) следует проинтегрировать при начальных условиях

$$x = 0; \ \frac{dx}{d\tau} = \tilde{V}_1(\tau_0), \ \tau = \tau_0. \tag{3}$$

Аналогичная задача решалась для случая, когда пространственный заряд мал [2]. Уравнение движения в указанной работе совпадает с уравнением (1), когда $\omega_0 = 0$. В этом случае уравнение движения аналогично уравнению математического маятника и удается аналитическими методами исследовать движение частиц. Если пространственный заряд не мал, данный метод не применим для изучения уравнения движения (1).

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением второго порядка с малой нелинейностью, поэтому оно решается методом усреднения [3]. Используя известный из теории чисел факт, что значение $(p/q)\,\nu$ при соответствующем выборе чисел p, q достаточно близко к ω_0, полагаем, что

$\omega_0^2 = \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 - \varepsilon\Delta$, где $\varepsilon\Delta$ — расстройка между квадратом собственной и внешней частот. Тогда исходное уравнение (1) запишется так:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left(\frac{p}{q}\nu\right)^2 x = \varepsilon\left\{\cos\left[\nu\tau - x + \Phi_0\right] + \Delta x\right\}, \tag{4}$$

т. е. расстройку $\varepsilon\Delta$ из-за малости относим к возмущающейся силе. Приводя уравнение (4) к стандартному виду и проводя усреднение по явно содержащемуся в нем времени τ, получаем дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы функции деформации:

$$\frac{d\bar{U}}{d\tau} = \begin{cases} 0 \quad (p \neq 1); \\ \frac{\varepsilon q}{2\nu}\left[J_{(q+1)}(\bar{U}) + J_{(q-1)}(\bar{U})\right]\cos\left[q\bar{\theta} + \Phi_0\right] \ (p = 1); \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = \begin{cases} \frac{\varepsilon q}{2\nu p}\Delta \ (p \neq 1); \\ \frac{\varepsilon q}{2\nu}\Delta + \frac{\varepsilon q}{2\nu}\frac{1}{\bar{U}}\left[J_{(q+1)}(\bar{U}) - J_{(q-1)}(\bar{U})\right]\sin\left[q\bar{\theta} + \Phi_0\right] \ (p = 1); \end{cases} \tag{6}$$

где $x = \bar{U}\sin(\nu\tau - \bar{\theta})$. Как видно из (5), при $\omega_0 \approx \frac{p}{q}\nu$, $p \neq 1$ из усредненных уравнений первого приближения следует

$$\bar{U} = \bar{U}_0, \ \bar{\theta} = \left(\frac{\varepsilon q}{2\nu p}\Delta\right)\tau + \bar{\theta}_0, \tag{7}$$

т. е. решение, которое получается из (4) с нулевой нелинейной правой частью. Значит, необходимо построить улучшенное первое приближение. Следовательно, когда частота внешней периодической силы кратна какой-либо из гармоник собственной частоты системы ω_0, действие возмущающей силы не сказывается на решении, построенном с учетом лишь членов первого порядка малости по ε.

Если же $\nu = q\omega_0$ и $p = 1$, т. е. рассматриваем резонанс на обертоне собственной частоты, или демультипликационный резонанс, амплитуда и фаза функции деформации определяются системой уравнений

$$\frac{d\overline{U}}{d\tau} = \frac{\varepsilon q^2}{\nu}\frac{1}{\overline{U}} J_q(\overline{U})\cos\overline{\vartheta};$$

$$\frac{d\overline{\vartheta}}{d\tau} = \frac{\varepsilon q^2}{2\nu} - \frac{\varepsilon q^2}{\nu}\frac{1}{\overline{U}}\frac{dJ_q(\overline{U})}{d\overline{U}}\sin\overline{\vartheta}, \tag{8}$$

где $\overline{\vartheta} = q\overline{\theta} + \Phi_0$; $J_q(\overline{U})$ — функция Бесселя q-го порядка. Система уравнений, подобная (8), получена при рассмотрении нелинейной теории параметрического возбуждения волн плотности заряда в промодулированном по плотности и скорости пучке]4]. Рассмотрение ограничивалось случаем бесконечно широкого и однородного по сечению пучка и малой глубины модуляции. Воспользовавшись предложенным в работе [4] методом решения системы (8) с произвольным значением амплитуды $\overline{U}$, получим первый интеграл системы (8):

$$-\frac{\Delta}{4}\overline{U}^2 + J_q(\overline{U}^2)\sin\overline{\vartheta} = \mathrm{const} = -\frac{\Delta}{4}\overline{U}_0^2 + J_q(\overline{U}_0^2)\sin\overline{\vartheta}_0. \tag{9}$$

Здесь $\overline{U}_0$, $\overline{\vartheta}_0$ — амплитуда и фаза функции деформации, определяемые начальными условиями (3).

Находим из (9) $\cos\overline{\vartheta}$, подставляем его значение в первое уравнение (8). Интегрируя по τ, имеем

$$x - x_0 = \int\limits_{\overline{\eta}}^{\overline{\eta}} \frac{d\overline{\eta}}{\sqrt{\Phi(\overline{\eta}, \overline{\eta}_0, \overline{\vartheta}_0)}}, \tag{10}$$

где $\Phi(\overline{\eta}, \overline{\eta}_0, \overline{\vartheta}_0) = J_q^2(\sqrt{\overline{\eta}}) - \left\{\frac{\Delta}{4}(\overline{\eta} - \overline{\eta}_0) + J_q(\sqrt{\overline{\eta}_0})\sin\overline{\vartheta}_0\right\}^2$; $x = \frac{2\varepsilon q^2}{\nu}\tau$, $\overline{\eta} = \overline{U}^2$, $\overline{\eta}_0 = \overline{U}_0^2$. Из (10) видно, что $\overline{\eta}$ является периодической функцией, изменяющейся в интервале между значениями $\overline{\eta}_{мин}$ и $\overline{\eta}_{макс}$ ($\overline{\eta}_{мин}$, $\overline{\eta}_{макс}$ — два наименьших корня уравнения $\Phi(\overline{\eta}, \overline{\eta}_0, \overline{\vartheta}_0) = 0$, между которым $\Phi > 0$).

Как следует из рис. 1, не для всякого q и $\overline{\eta}_0$ существует решение уравнения (10). Чем больше q, тем большее значение должна иметь начальная амплитуда $\overline{\eta}_0$, чтобы возбуждались колебания на частоте $\nu \approx q\omega_0$.

Рассмотрим главный резонанс $\nu \approx \omega_0$ ($q = 1$). Из рис. 1 видно, что $\overline{\eta}_{мин} < \overline{\eta}_0$, поэтому если $\overline{\eta}_0 \ll 1$, из упрощенного уравнения можно определить $J_1(\sqrt{\overline{\eta}_{макс}}) = \left|\frac{\Delta}{4}\right|\overline{\eta}_{макс}$. Как видно из рис. 2, чем меньше $\frac{\Delta}{4}$, тем больше $\overline{\eta}_{макс}$, что определяет зону неустойчивости. Здесь

$1 - J_q(\sqrt{\bar\eta})$, $2 - J_1(\sqrt{\bar\eta})$, $3 - \left\{\frac{\Delta}{4}(\bar\eta - \bar\eta_0) + J_1(\sqrt{\bar\eta_0})\sin\bar\vartheta_0\right\}^2$. Следовательно, так как $\omega_0^2 = \nu^2 - \varepsilon\Delta$, то чем меньше Δ, тем точнее выполняется равенство $\omega_0 = \nu$. Поэтому, чем меньше плотность пучка ω_0, тем более точно должно выполняться равенство между скоростью пучка v_0 и фазовой скоростью $v_ф$ медленной электромагнитной волны для возникновения неустойчивости в системе электронный пучок — медленная электромагнитная волна $(v_0/v_ф = 1 - \omega_0)$.

Если $\Delta > 1$, амплитуда $\bar\eta_{макс}$ остается малой для любого значения времени τ и в выражении для $\Phi(\bar\eta, \bar\eta_0, \bar\vartheta_0)$ функция Бесселя раскладывается в ряд

$$J_1(x) \approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \cdots.$$

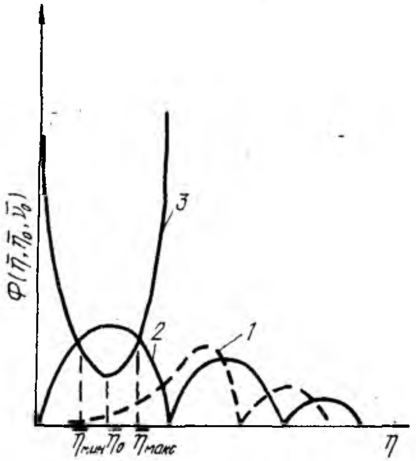

Рис. 1

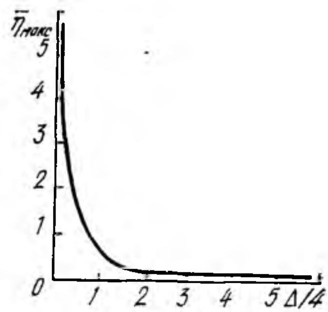

Рис. 2

Тогда (12) примет вид

$$x - x_0 = \frac{1}{\Delta}\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{B - y^2}} = \frac{1}{\Delta}\left\{\arcsin\frac{y}{2\sqrt{1 - 4\gamma\Delta - 4\gamma^2}} - \arcsin \times \right.$$

$$\left. \times \frac{y_0}{2\sqrt{1 - 4\gamma\Delta - 4\gamma^2}}\right\},$$

где $y = (1 + \Delta^2)\bar\eta - 2(1 - 2\gamma\Delta)$; $\gamma = \bar\eta_0 - \frac{4J_1(\sqrt{\bar\eta_0})\sin\bar\vartheta}{\Delta}$.

Окончательно получаем следующие выражения для амплитуды и фазы функции деформации:

$$\bar U_1 = \bar U_0\left\{1 - \frac{2}{\Delta}\frac{J_1(\bar U_0)}{\bar U_0^2}\sin(\bar\vartheta_0 + \Phi_0) - \frac{1}{\Delta\bar U} \times \right.$$

$$\times \sqrt{1 - \left[\frac{2J_1(\bar U_0)}{\bar U_0}\sin(\bar\theta_0 + \Phi_0)\right]^2}\sin\left[\frac{2\varepsilon\Delta}{\nu}(\tau - \tau_0)\right] +$$

$$\left. + \frac{2}{\Delta}\frac{J_1(\bar U_0)}{\bar U_0^2}\sin(\bar\theta_0 + \Phi_0)\cos\left[\frac{2\varepsilon\Delta}{\nu}(\tau - \tau_0)\right]\right\}; \quad (11)$$

$$\bar{\theta} = \arcsin \left\{ \frac{\frac{1}{2}\bar{U}_0 \sqrt{1-\left[\frac{2J_1(\bar{U}_0)}{\bar{U}_0}\sin(\bar{\theta}_0+\Phi_0)\right]^2} \sin\left[\frac{2\varepsilon\Delta}{\nu}(\tau-\tau_0)\right] + J_1(\bar{U}_0)\sin(\bar{\theta}_0+\Phi_0)\cos\left[\frac{2\varepsilon\Delta}{\nu}(\tau+\tau_0)\right]}{J_1(\bar{U})} \right\} - \Phi_0.$$

Исследования показали, что в системе электронный пучок — электромагнитная волна при модуляции цепочкой резонаторов, запитываемых одной частотой, но разнесенных на определенное расстояние, соотношения между плотностью пучка ω_0, параметром несинхронности $\nu = 1 - v_0/v_\Phi$ — и начальными значениями амплитуды и фазы функции деформации $\bar{U}_0$, $\bar{\nu}_0$ определяют характер движения частиц в пучке. Первый случай (кривые на рис. 1 не пересекаются) соответствует режиму, когда $\Phi(\bar{\eta}, \bar{\eta}_0, \bar{\vartheta}_0) < 0$. Амплитуда и фаза функции $\tilde{\zeta}$, определяющей смещение частиц пучка от их равновесного положения, имеют постоянные значения. Следовательно, скорость не изменяет знак, поэтому электроны монотонно сдвигаются по фазе относительно электромагнитной волны и не захватываются ею. Второй случай соответствует режиму, когда $\Phi(\bar{\eta}, \bar{\eta}_0, \bar{\vartheta}_0) > 0$. Тогда происходит модуляция амплитуды функции $\zeta(\tau, \zeta)$ с частотой, равной разности квадратов собственной частоты системы ω_0 и частоты внешней модулирующей силы ν. Само движение частиц пучка определяется формулой

$$\tilde{\zeta} = \frac{v_\Phi}{v_0} x = \frac{v_\Phi}{v_0} \bar{U} \sin\left(\frac{\nu}{q}\omega t - \bar{\theta}\right). \qquad (12)$$

Таким образом, переменная скорость $\frac{d\tilde{\zeta}}{d\tau}$ изменяет знак, что соответствует режиму, когда частицы захватываются волной.

Список литературы: 1. *Щербинин Г. П., Хижняк Н. А.* О нелинейной стадии развития колебаний в волноводе медленных волн в присутствии электронного пучка // Вопр. атом. науки и техники. Сер.физики высоких энергий и атомного ядра.— 1978.— Вып. 1(13).— С. 70—72. 2. *Ваврив Д. Н.* Анализ движения электронов в резонансной ЛОВ // Радиотехника и электроника.— 1982.— 27, № 8.— 1576 — 1581. 3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1963.— 410 с. 4. *Шапиро В. Д.* К нелинейной теории волн плотности заряда в пучках с переменными параметрами // Изв. вузов. Радиофизика.— 1964.— Т. 7.— С. 736—746.

Поступила в редколлегию 23.09.86.