УДК 519.87

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Рєзнік Ю.С.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(095) 246-17-99, email: yurii.rieznik@nure.ua

The paper considers the application of the structural method of R-functions to the solution of the problem of mathematical modeling of stationary processes of heat conduction in piecewise homogeneous media. An approach to build such a solution structure of the problem is described, which would accurately take into account both the conditions on the outer boundary of the body and the conjugation condition on the boundary of the medium-environment contact.

Процеси теплопередачі є важливими як у природі, так і у сучасних науці, техніці, промисловості. Дослідження цих процесів показало, що теплопередача є складним явищем. Окремим його випадком є теплопровідність – молекулярне перенесення тепла (або внутрішньої енергії) між тілами, що безпосередньо контактують, або частинками одного тіла з різною температурою, при якому відбувається обмін енергією руху структурних частинок (молекул, атомів, вільних електронів тощо). У чистому вигляді явище теплопровідності спостерігається, наприклад, у твердих тілах, нерухомих газах і рідинах за умови неможливості виникнення в них конвективних струмів. За останні десятиліття інтерес до математичного моделювання складних фізичних процесів, зокрема, процесів теплопровідності, та необхідність у ньому помітно зросли. Цьому значною мірою сприяє прогрес у розвитку комп’ютерної техніки, чисельних методів розв’язання всіх типів задач математичної фізики і реалізованих на цій основі математичних моделей. Серед чисельних методів, що застосовуються при моделюванні фізико-механічних полів, найбільш поширеними є метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. Ці методи реалізовані у потужних програмних комплексах, але мають суттєвий недолік через те, що не завжди точно враховують на аналітичному рівні всю геометричну інформацію, яка міститься у постановці задачі. Зокрема, це відноситься до задач математичного моделювання процесів теплопровідності у кусково-однорідних середовищах, коли постановка задачі доповнюється ще додатковими умовами (так звані умови спряження) на межі контакту середовищ з різними теплофізичними характеристиками. Точно урахувати всю апріорну інформацію як геометричну, так і аналітичну, що міститься у постановці задачі, дозволяє структурний метод (метод R-функцій), запропонований академіком НАН України В.Л. Рвачовим [1]. Суть методу полягає у побудові так званих структур розв’язку – жмутків функцій, які залежать від невизначених компонент і незалежно від їх вибору точно задовольняють всім крайовим умовам задачі.

Нехай тіло Ω складається з двох (рис. 1) частин з різними теплофізичними характеристиками, причому на зовнішній межі $\partial\Omega$ тіла Ω підтримується задана температура φ_0. Математичною моделлю стаціонарного процесу теплопровідності у такому середовищі є наступна крайова задача:

$$-\operatorname{div}(k(\mathbf{x})\operatorname{grad}u) = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_0,$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega_{12}} = u_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\ k_1\frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n}_1}\bigg|_{\partial\Omega_{12}} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n}_2}\bigg|_{\partial\Omega_{12}}.$$

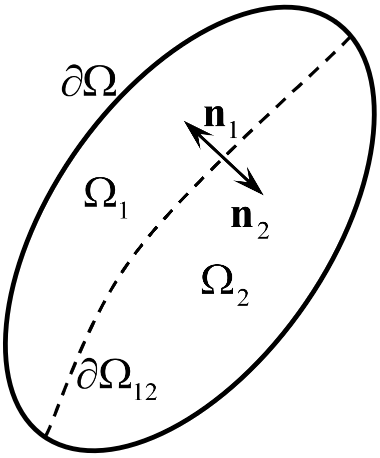

Рисунок 1

Тут $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $k(\mathbf{x})=\begin{cases}k_1, & \mathbf{x}\in\Omega_1,\\ k_2, & \mathbf{x}\in\Omega_2,\end{cases}$ – коефіцієнт теплопровідності, $f(\mathbf{x})$ – густина джерел тепла, $u(\mathbf{x})=\begin{cases}u_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega_1,\\ u_2(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega_2,\end{cases}$ – шуканий розподіл температур у тілі Ω.

Перша з умов спряження означає неперервність температури, а друга – неперервність теплового потоку на межі розділу середовищ.

Нехай $\omega(\mathbf{x})=0$ – побудоване за допомогою конструктивного апарату теорії R-функцій нормалізоване рівняння зовнішньої межі $\partial\Omega$, а $\varphi = EC\varphi_0$ – продовження функції φ_0 у область Ω. Тоді структура розв'язку, яка задовольняє умові на зовнішній межі тіла, має вигляд $u = \varphi + \omega\Phi$, де Φ – невизначена компонента структури.

Для того, щоб задовольнити тепер умови спряження замінимо у цій структурі координати x_1 і x_2 на $x_1+\omega^2(x_1,x_2)\alpha(x_1,x_2)$, $x_2+\omega^2(x_1,x_2)\beta(x_1,x_2)$ відповідно, де $\alpha=\gamma\dfrac{\omega^2|\omega_{12}|}{\omega^2+\omega_{12}^2}\dfrac{\partial\omega_{12}}{\partial x_1}$, $\beta=\gamma\dfrac{\omega^2|\omega_{12}|}{\omega^2+\omega_{12}^2}\dfrac{\partial\omega_{12}}{\partial x_2}$, $\gamma=\dfrac{k_2-k_1}{k_2+k_1}$, $|\omega_{12}|=0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{12}$. Невизначену компоненту можна апроксимувати, наприклад, методом Рітца.

Обчислювальний експеримент було проведено для випадку, коли Ω – прямокутник $(0,l_1)\times(0,l_2)$, а Ω_1 і Ω_2 – прямокутники $(0,x_0)\times(0,l_2)$ і $(x_0,l_1)\times(0,l_2)$ відповідно. Отриманий чисельний розв'язок було порівняно з точним, отриманим методом Фур'є.

Список використаних джерел:

1. Рвачев, В. Л. (1982). *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Наукова думка.