УДК 519.85

С. В. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ О ПОКРЫТИИ

Одна из основных задач дискретной геометрии состоит в определении взаимного расположения дискретной системы геометрических объектов на плоскости или в пространстве. Предметом рассмотрения настоящей статьи является задача покрытия заданной области S_0 набором компактных геометрических объектов S_i, $i = \overline{1, n}$. При этом требуется минимизировать число покрывающих объектов или их площадь. По своей неформальной постановке данные задачи сводятся к определению такого расположения объектов $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$, $k \leqslant n$, $i_l \neq i_t \; \forall \, l \neq t$, при котором каждая точка области S_0 принадлежит хотя бы одному из объектов S_{i_j}, $j = \overline{1, k}$. Другими словами, требуется определить параметры размещения [1] объектов, обеспечивающие искомое покрытие. В дальнейшем будем говорить о покрытии S_0 транслянтами [2] объектов S_i, $i = \overline{1, n}$ и полагать, что область допустимых параметров размещения состоит из конечного числа точек P_j, $j = \overline{1, m}$.

Обозначим через $S_i(P_j)$ результат трансляции объекта S_i на вектор P_j. Пусть $\boldsymbol{K}$ — кольцо множеств [3], порождаемое множествами S_0, $S_i(P_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Сформулируем систему множеств $\boldsymbol{T} = \{T_k\}$, $k = \overline{1, l}$, $l = |\boldsymbol{T}|$, такую что

$$\bigcup_{k=1}^{l} T_k = S_0,$$

причем множества из $\boldsymbol{K}$ не являются собственными подмножествами множеств из $\boldsymbol{T}$.

Введем булевые переменные

$$\omega_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если объект } S_i \text{ транслирован на вектор } P_j; \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } T_k \subset S_i(P_j); \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

$$i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ m},\ k = \overline{1,\ l}.$$

Тогда задача области S_0 наименьшим числом объектов из набора S_i, $i = \overline{1,\ n}$ может быть формализована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j+1}^{m} \omega_{ij} \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i+1}^{n} \sum_{j+1}^{m} a_{ijk} \omega_{ij} \geqslant 1,\ k = \overline{1,\ l}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} \leqslant 1,\ i = \overline{1,\ n}, \tag{3}$$

$$\omega_{ij} = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,\ n},\ j = \overline{1,\ m}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что задача (1) — (4) относится к известному классу задач булевого покрытия [4, 5]. Ограничение (2) указывает, что каждый элемент $T_k \in \boldsymbol{T}$ должен быть покрыт хотя бы одним из объектов S_i, $i = \overline{1,\ n}$. Ограничение (3) означает, что каждый объект S_i не может быть установлен одновременно в нескольких точках.

Минимизируя суммарную площадь покрывающих S_0 объектов, получим взвешенную задачу о покрытии

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij} \to \min$$

при ограничениях (2) — (4). Здесь μ_i — площадь объекта S_i.

Рассмотрим частный случай задачи (1) — (4), соответствующий тому, что объекты S_i, $i = \overline{1,\ n}$ конгруэнтны. Получим следующую булеву задачу покрытия:

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \to \min \tag{5}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} b_{jk} \gamma_j \geqslant 1,\ k = \overline{1,\ l}, \tag{6}$$

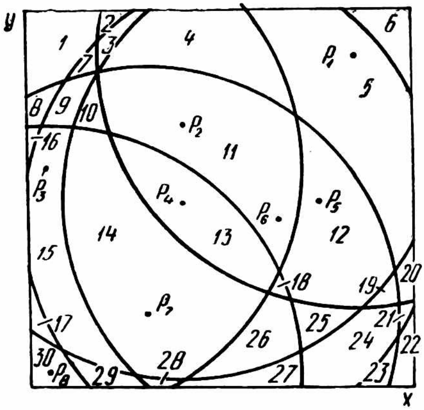
$$\gamma_j = 0 \vee 1,\ \ j = \overline{1,\ m}. \tag{7}$$

Здесь переменная γ_j определяет, устанавливается ли объект на соответствующее место с номером j, а коэффициенты b_{jk} вычисляются аналогично коэффициентам a_{ijk}.

Проиллюстрируем предложенный способ бинаризации задач покрытия на следующем примере. Для большей наглядности рассмотрим задачу (5) — (7). Пусть квадрат со стороной 3 усл. ед. покрывается кругами, радиусы которых равны 2 усл. ед. Точки

P_j, $j = \overline{1,\ 8}$ отмечены на рисунке, а их координаты x_i, y_i приведены ниже. Квадрат разбивается на систему множеств T (рисунок), которая состоит из 30 элементов. В этом случае матрица $B = \| b_{jk} \|_{8\times 30}$ имеет вид, указанный в таблице.

i	x_i	y_i
1	2,83	2,93
2	1,33	2,33
3	0,17	2,00
4	1,33	1,67
5	2,50	1,67
6	2,17	1,50
7	1,00	0,67
8	0,17	0,17



Формирование системы множеств T

k	j							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	1	0	0
4	1	1	1	1	1	1	0	0
5	1	1	0	1	1	1	0	0
6	1	1	0	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	0	1	1	1	0	0	1	0
9	0	1	1	1	0	1	1	0
10	0	1	1	1	1	1	1	0
11	1	1	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	1	1	1	1	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1
14	0	1	1	1	1	1	1	1
15	0	1	1	1	0	1	1	1
16	0	1	1	1	0	0	1	1
17	0	1	1	1	0	0	1	1
18	1	1	0	1	1	1	1	1
19	1	0	0	1	1	1	1	0
20	1	0	0	1	1	1	0	0
21	0	0	0	1	1	1	0	0
22	0	0	0	0	1	1	0	0
23	0	0	0	0	1	1	1	0
24	0	0	0	1	1	1	1	0
25	0	1	0	1	1	1	1	0
26	0	1	0	1	1	1	1	0
27	0	0	0	1	1	1	1	1
28	0	0	1	1	1	1	1	1
29	0	0	1	1	0	0	1	1
30	0	0	1	1	0	0	1	1

Использование существующих методов решения булевых задач покрытия в большой степени определяется структурой матрицы $A = \| a_{ijk} \|_{n\times m\times l}$ ($B = \| b_{jk} \|_{m\times l}$ — в случае задачи (5) — (7)). Одним из наиболее важных с точки зрения редукции булевых задач покрытия является тот факт, что указанные матрицы содержат большое число минорируемых строк. Если в приведенном выше примере в матрице B исключить такие строки, система неравенств (6) примет вид

$$\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \geqslant 1;$$
$$\gamma_5 + \gamma_6 \geqslant 1; \tag{8}$$
$$\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_7 + \gamma_8 \geqslant 1.$$

Минимум функции (5) в этом случае будет равен 2 и достигается в нескольких точках, в частности при $\gamma^* = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0))$. Если же минимизировать взвешенную сумму

$$\sum_{j=1}^{8} \lambda_j \gamma_j, \tag{9}$$

положив, например, $\lambda_j = j$, $j = \overline{1, 8}$, то минимальное значение функции (9) при ограничениях (8) будет равно 8 и достигаться на единственном векторе $\gamma^* = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$.

Одним из препятствий на пути эффективного использования предлагаемого метода бинаризации геометрических задач покрытия является сложность формирования системы множеств $\boldsymbol{T}$. Действительно, при этом требуется осуществлять различные теоретико-множественные операции над множествами S_0, $S_i(P_j)$, $\overline{i = 1, n}$, $j = \overline{1, m}$, что достаточно трудоемко. Вместе с тем можно предложить приближенный подход к формированию матриц A и B. Зададимся некоторым числом $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-сеть S_ε [3] множества S_0. Условие покрытия множества S_0 набором объектов S_i, $i = \overline{1, n}$ заменим условием покрытия этими объектами точек из S_ε. Ясно, что если $\varepsilon \to 0$, то при покрытии точек ε-сети S_ε мера Лебега [3] непокрытой части области S_0 будет стремиться к нулю.

Возвратимся к рассматриваемому примеру. Если ε задать таким, чтобы хотя бы по одной точке соответствующей ε-сети принадлежало элементам $\boldsymbol{T}$ с номерами 1, 22, 29, то при покрытии точек этой ε-сети имеет место покрытие всего квадрата.

Список литературы: 1. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.— К.: Наук. думка, 1986.— 315 с. 2. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.—416 с. 3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.— 544 с. 4. *Корбит А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование.— М.: Наука, 1969.— 368 с. 5. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.— К.: Наук. думка, 1981.— 287 с.

Поступила в редколлегию 11.05.85.