УДК 62.506.2

Л. М. МАЙСТРОВСКАЯ,
Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ШКАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОРОГОВ

Рассмотрим экспериментальную ситуацию, в которой испытуемому предлагается ответить на вопрос, различает ли он пару стимулов x и y из некоторого множества M или нет. Пусть $p(x, y) = p(y, x)$ — вероятность положительного ответа. Предположим, что физическая природа множества M позволяет ввести на этом множестве структуру R^n. Будем называть произвольное дифференцируемое погружение f пространства R^n в себя *шкалой дифференциальных порогов*, отвечающей семейству вероятностей $p(x, y)$, если существует такая строго возрастающая непрерывная функция $\varepsilon(\delta)$, что

$$\varepsilon(\rho(x, y)) = \| f(y) - f(x) \|. \tag{1}$$

Вопрос об условиях существования такой шкалы удается разрешить лишь в случае $n = 1$*.

В настоящей работе предлагается некоторая модификация понятия шкалы, при которой интуитивно понимаемое основное свойство шкалы сохраняется при достаточно малых расстояниях между точками x и y, но лишь асимптотически. Будем называть погружение f: $R^n \to R^n$ класса C^1 *асимптотической шкалой дифференциальных порогов*, если существует такая строго возрастающая непрерывная функция $\varepsilon(\delta)$, что в окрестности любой точки x

$$\varepsilon(\rho(x, y)) = \| (f(y) - f(x) \| + 0(\| f(y) - f(x) \|). \tag{2}$$

В настоящей работе вопрос об условиях существования асимптотической шкалы решается в случае $n = 2$. Для более высоких размерностей этот вопрос остается открытым.

Итак, всюду ниже $n = 2$. Для каждого $x \in R^2$ и каждого положительного достаточно малого δ рассмотрим множества $G(x, \delta) = \{y \mid \rho(x, y) = \delta\}$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для того чтобы погружение f было асимптотической шкалой, а $\varepsilon(\delta)$ — соответствующей функцией одного переменного, необходимо и достаточно, чтобы при всех x***:

$$G(x, \delta) = B(x, \delta) + 0(\varepsilon(\delta)), \tag{3}$$

где $B(x, \delta) = x + \varepsilon(\delta)[f'(x)]^{-1} u_0$ (u_0 — единичная окружность).

Доказательство. Заметим, что f — погружение; следовательно, $f'(x)$ — невырожденный оператор. Поэтому для всех y из окрестности точки x

$$\| f(y) - f(x) \| = \| f'(x)(y - x) \| + 0(\| f'(x)(y - x) \|).$$

Следовательно, (2) эквивалентно равенству

$$\varepsilon(\rho(x, y)) = \| f'(x)(y - x) \| + 0(\| f'(x)(y - x) \|),$$

или, что то же самое:

$$\| f'(x)(y - x) \| = \varepsilon(\rho(x, y)) + 0(\varepsilon(\rho(x, y)). \tag{4}$$

Пусть f — асимптотическая шкала. Докажем справедливость (3). Зафиксируем произвольный $y \in G(x, \delta)$ и положим

$$h = f'(x)(y - x). \tag{5}$$

---

* Майстровская Л. М. О шкалах дифференциальных порогов.— В кн.:— Материалы VI Всесоюзного симпозиума по кибернетике. Тбилиси, 1972, с. 95—98.

** Иными словами, $\max\limits_{y \in G(x, \delta)} \rho(y, B(x, \delta)) = 0(\varepsilon(\delta))$, где $\rho(y, B(x, \delta))$ — расстояние от точки y до множества $B(x, \delta)$.

В силу (4)

$$\|h\| = \varepsilon(\delta) + 0(\varepsilon(\delta)). \quad (6)$$

После обращения (5) получаем

$$y = x + \|h\| [f'(x)]^{-1} \frac{h}{\|h\|}.$$

Рассмотрим точку

$$z = x + \varepsilon(\delta) [f'(x)]^{-1} \frac{h}{\|h\|}.$$

Так как $z \in B(x, \delta)$,

$$\rho(y, B(x, \delta)) \leqslant \|y - z\| = [\varepsilon(\delta) - \|h\|] \cdot \left\| f'(x)^{-1} \frac{h}{\|h\|} \right\|.$$

На основании последнего неравенства и выражения (6) заключаем, что $\rho(y, B(x, \delta)) = 0(\varepsilon(\delta))$, откуда вытекает (3).

Пусть, обратно, справедливо (3). Докажем (4). Пусть y — произвольная точка в достаточно малой окрестности точки x. Положим $\delta = p(x, y)$. В силу (3) найдется $u_0 \in U_0$, такое, что

$$y = x + \varepsilon(\delta) [f'(x)]^{-1} u_0 + 0(\varepsilon(\delta)).$$

Тогда

$$f'(x)(y - x) = \varepsilon(\delta) u_0 + 0(\varepsilon(\delta))$$

и, следовательно,

$$\|f'(x)(y - x)\| = \varepsilon(\delta) + 0(\varepsilon(\delta)).$$

Таким образом, справедливо (4), а следовательно, и (2). Лемма доказана.

Как вытекает из леммы, для существования шкалы необходимо, чтобы существовало семейство положительно определенных симметричных операторов $\{A(x)\}$ такое, что

$$G(x, \delta) = x + \varepsilon(\delta) [A(x)]^{-1} u_0 + 0(\varepsilon(\delta)), \quad (7)$$

причем это семейство определено однозначно.

Действительно, оператор $A(x)$ должен удовлетворять операторному уравнению

$$[f'(x)]^{-1} u_0 = [A(x)]^{-1} u_0,$$

которое равносильно соотношению

$$f'(x) = S(x) A(x), \quad (8)$$

где $S(x)$ — ортогональное отображение. Но каков бы ни был невырожденный оператор $f'(x)$, существует единственное ортогональное отображение $S(x)$ такое, что оператор $A(x)$, определяемый равенством (8), будет симметричным и положительно определенным: $S(x) = f'(x) [(f'(x)^*) f(x)]^{1/2}$. При этом $A(x) = [f'(x)^* f'(x)]^{1/2}$.

Элементы $\{a_{ij}(x)\}_{i, j=1}^2$ матрицы $A(x)$ являются величинами, доступными наблюдению, во всяком случае потенциально. Поэтому окончательный результат можно сформулировать в терминах $a_{ij}(x)$. При этом будем предполагать, что $a_{ij}(x) \in C^1(R^2)$.

Теорема. *Для того чтобы семейство вероятностей* $p(x, y)$ *допускало асимптотическую шкалу дифференциальных порогов, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство* (7) *и векторное поле*

$$g(x) = \frac{1}{a_{11}(x)\,a_{22}(x) - a_{12}^2(x)} \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{12}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_{11}(x)}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial a_{12}(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_{12}(x)}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial a_{22}(x)}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

было потенциальным.

Отметим, что при более жестких требованиях к гладкости, а именно $a_{ij} \in C^2(R^2)$, векторное поле $g(x)$ является, очевидно, непрерывно дифференцируемым, и в этом случае условие его потенциальности заключается в самосопряженности оператора $y'(x)$ при любом $x \in R^2$, или в координатах:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2},$$

где

$$g_1 = \frac{a_{11}\left(\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right) + a_{12}\left(\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2};$$

$$g_2 = \frac{a_{12}\left(\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right) + a_{22}\left(\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_{22}}{\partial x_1}\right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно выяснить, каким условиям должно удовлетворять семейство $\{A(x)\}$ для того чтобы для него нашлось такое семейство $S(x)$, чтобы система Пфаффа (8) была вполне интегрируемой. Перепишем (8) в координатах:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = ca_{11} + sa_{12}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = ca_{12} + sa_{22};$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -sa_{11} + ca_{21}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -sa_{12} + ca_{22}.$$

Здесь $f = (f_1, f_2)$; $S(x) = \begin{pmatrix} c(x) & s(x) \\ -s(x) & c(x) \end{pmatrix}$.

Условия полной интегрируемости системы (8) имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_2}(ca_{11} + sa_{12}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(ca_{12} + sa_{22}); \\ &\frac{\partial}{\partial x_2}(-sa_{11} + ca_{12}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-sa_{12} + ca_{22}). \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть $\Theta(x)$ — угол поворота, реализуемый матрицей $S(x)$, т. е.

$$\sin\Theta(x) = s(x); \quad \cos\Theta(x) = c(x).$$

Положим

$$T_1 = \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}; \quad T_2 = \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}.$$

Производя дифференцирования в (9), получаем

$$-(-sa_{12} + ca_{22})\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + (-sa_{11} + ca_{21})\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = cT_1 + sT_2;$$

$$-(ca_{12} + sa_{22})\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + (ca_{11} + sa_{21})\frac{\partial\theta}{\partial x_2} = -sT_1 + cT_2.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}, \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) = g(x), \tag{10}$$

где $g(x)$ — векторное поле, фигурирующее в формулировке теоремы. Отсюда непосредственно усматривается, что полная интегрируемость системы (8) эквивалентна потенциальности поля $g(x)$.

Теорема доказана.

Замечание. Поскольку семейство операторов $\{A(x)\}$ определено однозначно, однозначно определено и поле $g(x)$. Тогда, как видно из (10), функция $\Theta(x)$ определена с точностью до аддитивной константы. Таким образом, из (8) следует, что любые две шкалы f_1 и f_2, отвечающие данному семейству $p(x, y)$, связаны равенством

$$f_2'(x) = Sf_1'(x),$$

где S — постоянная ортогональная матрица. Интегрируя последнее равенство, получаем, что

$$f_2(x) = Sf_1(x) + a, \tag{11}$$

где $a = \text{const}$. Очевидно и обратное: если f_1 — любая шкала, S — произвольная ортогональная матрица и a — произвольный вектор, то отображение $f_2(x)$, определяемое равенством (11), также является шкалой.

УДК 62.506.2

Л. М. МАЙСТРОВСКАЯ

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОРОГОВОЙ ШКАЛЫ

Настоящее сообщение является продолжением работ [1, 2]. Предположим, что испытуемому предлагают ответить на вопрос, различает ли он пару стимулов x и y из некоторого множества, физическая природа которого позволяет отождествить это множество с отрезком $[a, b]$ вещественной оси. Пусть $p(x, y) = p(y, x)$ —