БИОНИКА ИНТЕЛЛЕКТА. 2007. № 1 (66). С. 98–102

УДК 519.85

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ НА КЛАССАХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ОБРАЗОВ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ

И. В. Гребенник[1], А. В. Баранов[2]

[1] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, stdep@kture.kharkov.ua

[2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, Aleksey.Baranov@gmail.com

Исследуются задачи оптимизации выпуклых и сильно выпуклых функций на классах комбинаторных множеств. Формулируются оценки и достаточные условия минимума функций на множествах перестановок кортежей и композиции перестановок. Обсуждается применение результатов при разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений различного назначения.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ, КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, КОМБИНАТОРНОЕ МНОЖЕСТВО, ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ, ОЦЕНКА МИНИМУМА.

Введение

При разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений различного назначения важную роль играют математические модели объектов, составляющих предметную область, и методы их анализа. Применение математических моделей и методов позволяет повысить эффективность решений, принимаемых с помощью интеллектуальных систем. В настоящее время системы поддержки принятия решений создаются в различных областях, одной из которых является геометрическое проектирование [1].

Многие задачи проектирования, управления, контроля описываются моделями комбинаторной оптимизации [2]. Области допустимых решений этих задач часто представляются классическими комбинаторными множествами [3]. Комбинаторные свойства новых задач таковы, что классические комбинаторные множества не всегда позволяют адекватно описывать соответствующие математические модели задач. Значит, необходимо вводить новые комбинаторные множества как средства построения математических моделей задач указанных классов. Это справедливо, в частности, при решении многих комбинаторных оптимизационных задач геометрического проектирования [1,4].

Для построения математических моделей задач указанного класса в [5] вводится новый класс комбинаторных множеств — композиционные k-образы комбинаторных множеств. В связи с этим актуальной задачей является построение и анализ различных классов оптимизационных моделей на композиционных k-образах комбинаторных множеств.

Целью настоящей работы является исследование свойств задач оптимизации выпуклых функций на классах композиционных k-образов комбинаторных множеств.

1. Определение множеств перестановок кортежей и композиции перестановок [6, 7]

Композиционный образ комбинаторных множеств P_{nk}, $T_1,T_2,\dots,T_n$, порожденный множествами $\{z_1^1,z_2^1,\dots,z_m^1\}$, $\{z_1^2,z_2^2,\dots,z_m^2\}$, …, $\{z_1^n,z_2^n,\dots,z_m^n\}$. Здесь $T_i=\{(z_1^i,z_2^i,\dots,z_m^i)\}$ — кортеж, составленный из элементов множества $\{z_1^i,z_2^i,\dots,z_m^i\}$, $z_j^i\in R$, $i\in J_n=\{1,2,\dots,n\}$, $j\in J_m$. При этом среди n множеств T_i являются различными. Обозначим это множество через $PT_{nk}(T_1,T_2,\dots,T_n)$ или PT_{nk}^m и назовем *множеством перестановок кортежей*. Множество PT_{nk}^m представляет собой множество перестановок кортежей $z^i=(z_1^i,z_2^i,\dots,z_m^i)$, то есть упорядоченных наборов вида $w\in PT_{nk}^m$, $w=(z^{i_1},z^{i_2},\dots,z^{i_n})=$ $=(z_1^{i_1},z_2^{i_1},\dots,z_m^{i_1},z_1^{i_2},z_2^{i_2},\dots,z_m^{i_2},\dots,z_1^{i_n},z_2^{i_n},\dots,z_m^{i_n})$, где $i_s,j_s\in J_n$, $i_s\neq j_s$, $s\in J_n$. Элементы множества PT_{nk}^m отличаются друг от друга только порядком следования кортежей z^i в наборах.

Композиционный образ комбинаторных множеств P_{nk}, $P_{m_1k_1}$, $P_{m_2k_2},\dots,P_{m_nk_n}$ порожденный множествами $\{a_1^1,a_2^1,\dots,a_{m_1}^1\}$, $\{a_1^2,a_2^2,\dots,a_{m_2}^2\}$, …, $\{a_1^n,a_2^n,\dots,a_{m_n}^n\}$. Здесь P_{nk} — множество перестановок из n элементов, из которых различными являются $a_i^j\in R^1$, $i\in J_{m_i}$, $j\in J_n$. Такое множество назовем *композицией перестановок* и обозначим PW_N. Множество PW_N состоит из элементов вида $(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$, где $(i_1,i_2,\dots,i_n)\in L_n$, $e_i=(a_{s_1}^i,a_{s_2}^i,\dots,a_{s_{m_i}}^i)$, $i\in J_n$. В наборе $(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})$ k элементов являются различными, среди элементов $a_{s_1}^j,a_{s_2}^j,\dots,a_{s_{m_j}}^j$ ровно k_j различных. Последовательность индексов $(s_1,s_2,\dots,s_{m_j})\in L_{m_j}$, где через L_k обозначим множество всевозможных перестановок элементов индексного множества J_k.

2. Постановка задачи

Пусть X — композиционный образ комбинаторных множеств [5], $X\in\{PT_{nk}^m, PW_N\}$. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\Phi(h)\to\min,\ h\in X, \tag{1}$$

где $\Phi: X\to R^1$ — некоторый функционал.

В результате погружения f множества X в R^N [1, 4] сформулируем задачу оптимизации функции $\varphi(x)$, эквивалентную (1):

$$\varphi(x) \to \min,\ x \in E, \qquad (2)$$

где $\varphi: E \to R^1$ — функция N переменных, определенная на множестве $E \subset R^N$, $E = f(X)$ — образ множества X в пространстве R^N, $\varphi(x) = \Phi(h)$ при $x = f(h)$, $\forall h \in H$.

После погружения координаты точек множества $ET^m_{nk} = f(PT^m_{nk})$ принимают значения всевозможных перестановок кортежей $z^i = (z^i_1, z^i_2, ..., z^i_m)$, $i \in J_n$. Множество $EW_N = f(PW_N)$ представляет собой множество векторов в R^N, координаты которых принимают значения всевозможных перестановок векторов $e_i = (e^i_1, e^i_2, ..., e^i_m) = (a^i_{s_1}, a^i_{s_2}, ..., a^i_{s_{m_i}})$, где $(a^i_{s_1}, a^i_{s_2}, ..., a^i_{s_{m_i}}) \in E_{m_i k_i}$, а множество перестановок $E_{m_i k_i} = f(P_{m_i k_i})$ порождено элементами $a^i_1 \le a^i_2 \le ... \le a^i_{m_i}$ [4].

В дальнейших построениях будем считать, что для множеств PT^m_{nk}, PW_N справедливо равенство $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$.

Исследуем случай, когда в задаче (2) $\varphi(x)$ — выпуклая (сильно выпуклая с параметром $\rho > 0$) на выпуклом множестве $V \supset conv\, E$ функция, а в качестве множества E выступают образы множеств перестановок кортежей PT^m_{nk}, композиции перестановок PW_N в пространстве R^N — соответственно, множества ET^m_{nk} и EW_N.

Вопросы исследования и решения задач оптимизации выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах рассматривались во многих публикациях. Так, работы [8–12] посвящены описанию теории и конструктивных методов построения выпуклых и сильно выпуклых дифференцируемых продолжений для классов функций, заданных на различных комбинаторных множествах. В работах [4, 8, 13–17] исследуются декомпозиционные методы, использующие оценки минимума выпуклых целевых функций на евклидовых комбинаторных множествах и их подмножествах.

Распространим некоторые результаты, приведенные в этих работах, на множества ET^m_{nk} и EW_N.

3. Оценки минимума выпуклых функций на множествах ET^m_{nk}, EW_N

В работах [4, 8, 9, 13–17] излагается общий подход к построению оценок минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на евклидовых комбинаторных множествах. В рамках этого подхода получены оценки минимума выпуклых и сильно выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах перестановок, размещений, сочетаний и других. Эти результаты используются при реализации декомпозиционных методов решения задач оптимизации на указанных классах комбинаторных множеств. Применяя данный подход, построим оценки и достаточные условия минимума выпуклых и сильно выпуклых функций на множествах перестановок кортежей и композиции перестановок. При этом будем опираться на утверждения, доказанные в [17].

Лемма 1 [17]. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$. Тогда для любого $x \in V$:

$$\min_{y \in E} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} y_i. \qquad (3)$$

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset ET^m_{nk}$, где множество $ET^m_{nk} \subset R^N$, $N = mn$ порождено множествами $T_i = \{(z^i_1, z^i_2, ..., z^i_m)\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$:

$$\min_{y \in ET^m_{nk}} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{j=1}^{w} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} y^*_j, \qquad (4)$$

где

$$y^* = (y^*_1, y^*_2, ..., y^*_N) \in ET^m_{nk}, \qquad (5)$$

здесь $y^*_{(j-1)m+t} = z^{i_j}_t$, $i_j \ne i_s$ при $s \ne j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, а последовательность $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ такова, что

$$z^{i_1} \underset{c}{\prec} z^{i_2} \underset{c}{\prec} ... \underset{c}{\prec} z^{i_n} \qquad (6)$$

при $c = \nabla\varphi(x)$.

Доказательство. Оценку (4) получим из соотношения (3) при $E = ET^m_{nk}$, $N = mn$. Тогда задача оптимизации в правой части неравенства (3) может быть решена с помощью утверждения, доказанного в [6], на основе предложенного отношения линейного порядка $\underset{c}{\prec}$:

$$((z^{i_j}_1, z^{i_j}_2, ..., z^{i_j}_m) \underset{c}{\prec} (z^{i_k}_1, z^{i_k}_2, ..., z^{i_k}_m)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sum_{t=1}^{m} (c_{(j-1)m+t} - c_{(k-1)m+t})(z^{i_j}_t - z^{i_k}_t) \le 0).$$

При этом минимизируемая функция является линейной с коэффициентами $c_i = \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}$, $i \in J_N$. Упорядочивая кортежи z^{i_j}, $j \in J_N$ в соответствии с соотношением (6) при $c = \nabla\varphi(x)$, приходим к справедливости утверждения теоремы.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset EW_N$, где множество $EW_N \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $\{a^i_1, a^i_2, ..., a^i_m\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$:

$$\min_{y \in EW_N} \varphi(y) \ge \varphi(x) - (\nabla\varphi(x), x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} y^*_j, \qquad (7)$$

где

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_N^*) \in EW_N. \quad (8)$$

$y^*_{(j-1)m+r_t} = e^{i_j}_{s_t}$, $t \in J_m$, $j \in J_n$, $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \ge c_{(j-1)m+s_2} \ge \ldots \ge c_{(j-1)m+s_m}$ и $e^{i_j}_{r_1} \le e^{i_j}_{r_2} \le \ldots \le e^{i_j}_{r_m}$, а последовательность $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ удовлетворяет условию

$$e_{i_1} \underset{c}{\prec} e_{i_2} \underset{c}{\prec} \ldots \underset{c}{\prec} e_{i_n} \quad (9)$$

при $c = \nabla\varphi(x)$.

Доказательство. Оценку (7) получим из соотношения (3) при $E = EW_N$, $N = mn$. Задача оптимизации в правой части неравенства (3) может быть решена с помощью теоремы о минимуме $EW_N \subset R^N$ [18] на основе предложенного отношения линейного порядка $\underset{c}{\prec}$, поскольку функция цели является линейной с коэффициентами

$$c_i = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}, \; i \in J_N.$$

Здесь

$$e_{i_j} \underset{c}{\prec} e_{i_k} \Leftrightarrow (e_1^{i_j}, e_2^{i_j}, \ldots, e_m^{i_j}) \underset{c}{\prec} (e_1^{i_k}, e_2^{i_k}, \ldots, e_m^{i_k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\sum_{t=1}^{m} c_{(j-1)m+s_t} e^{i_j}_{p_t} + \sum_{t=1}^{m} c_{(k-1)m+r_t} e^{i_k}_{q_t} -$$

$$-\sum_{t=1}^{m} c_{(j-1)m+\alpha_t} e^{i_k}_{\gamma_t} - \sum_{t=1}^{m} c_{(k-1)m+\beta_t} e^{i_j}_{\delta_t}) \le 0), \quad (10)$$

где $i \in J_n$, а последовательность индексов удовлетворяет условиям:

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}: \; c_{(j-1)m+s_1} \ge c_{(j-1)m+s_2} \ge \ldots \ge c_{(j-1)m+s_m},$$

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}: \; e^{i_j}_{p_1} \le e^{i_j}_{p_2} \le \ldots \le e^{i_j}_{p_m},$$

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}: \; e^{i_k}_{q_1} \le e^{i_k}_{q_2} \le \ldots \le e^{i_k}_{q_m},$$

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}: \; c_{(k-1)m+r_1} \ge c_{(k-1)m+r_2} \ge \ldots \ge c_{(k-1)m+r_m},$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}: \; c_{(j-1)m+\alpha_1} \ge c_{(j-1)m+\alpha_2} \ge \ldots \ge c_{(j-1)m+\alpha_m},$$

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}: \; e^{i_j}_{\gamma_1} \le e^{i_j}_{\gamma_2} \le \ldots \le e^{i_j}_{\gamma_m},$$

$$\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}: \; e^{i_k}_{\delta_1} \le e^{i_k}_{\delta_2} \le \ldots \le e^{i_k}_{\delta_m},$$

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}: \; c_{(k-1)m+\beta_1} \ge c_{(k-1)m+\beta_2} \ge \ldots \ge c_{(k-1)m+\beta_m}.$$

Лемма 2 [17]. Для того, чтобы точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*) \in E$ была точкой минимума на множестве E выпуклой дифференцируемой на выпуклом множестве V функции $\varphi(x)$, где $E \subset V \subset R^N$, достаточно, чтобы

$$\min_{y \in E} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0. \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset ET^m_{nk}$, где множество $ET^m_{nk} \subset R^N$, $N = mn$ порождено множествами $T_i = \{(z_1^i, z_2^i, \ldots, z_m^i)\}$, $i \in J_n$. Для того, чтобы точка $x^* \in ET^m_{nk}$ была точкой минимума $\varphi(x)$ на ET^m_{nk}, достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i^* - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0, \quad (12)$$

где $y^* \in ET^m_{nk}$ определяется соотношениями (5).

Доказательство достаточного условия получим на основании леммы 2 при $E = ET^m_{nk}$, $N = nm$. Задача минимизации в левой части равенства (11) может быть решена на основе теоремы о минимуме линейной функции на множестве ET^m_{nk} [6] с помощью подхода, аналогичного примененному при доказательстве теоремы 1. В результате приходим к справедливости равенства (12) и утверждения теоремы.

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(x)$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset EW_N$, где множество $EW_N \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $\{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_m^i\}$, $i \in J_n$. Для того, чтобы точка $x^* \in EI^m_{nk}$ была точкой минимума $\varphi(x)$ на EW_N, достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i} y_i^* - (\nabla\varphi(x^*), x^*) = 0, \quad (13)$$

где $y^* \in EW_N$ определяется соотношениями (8).

Доказательство утверждения проведем на основании леммы 2 при $E = EW_N$, $N = nm$. Задача минимизации в левой части равенства (11) может быть решена на основе теоремы о минимуме линейной функции на множестве EW_N [18] с помощью подхода, аналогичного примененному при доказательстве теоремы 2. В результате приходим к справедливости равенства (13) и утверждения теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $\varphi(x)$ является сильно выпуклой с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $V \subset R^N$, $E \subset V$. Обозначим

$$y^* = \arg\min_{y \in V} \varphi(y). \quad (14)$$

Лемма 3 [17]. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$. Тогда

$$\min_{x \in E} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) + \rho \cdot \min_{y \in E} \|x - y^*\|^2, \quad (15)$$

где y^* определяется соотношением (14).

Теорема 5. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $V \supset ET^m_{nk}$, где множество $ET^m_{nk} \subset R^N$, $N = nm$

порождено множествами $T_i = \{(z_1^i, z_2^i, \dots, z_m^i)\}$, $i \in J_n$. Тогда

$$\min_{x \in ET_{nk}^m} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) + \rho(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(z_j^i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(y_i^*)^2 +$$

$$+2\sum_{i=1}^{N} c_i^* x_i^0), \qquad (16)$$

где $c_i^* = -y_i^*, i \in J_w$, $x^0 \in ET_{nk}^m$, $x^0_{(j-1)m+t} = z_t^{i_j}$, $i_j \ne i_s$ при $s \ne j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ такова, что

$$z^{i_1} \underset{c^*}{\prec} z^{i_2} \underset{c^*}{\prec} \dots \underset{c^*}{\prec} z^{i_n}. \qquad (17)$$

Доказательство. Оценку (16) получим на основании леммы 3 при $E = ET_{nk}^m$, $N = mn$. Задачу об определении минимума в правой части неравенства (15) решим с помощью соотношения, полученного в [6]. Непосредственная подстановка минимального значения нормы $\|x - y^*\|^2$ на множестве ET_{nk}^m в (15) приведет к справедливости оценки (16).

Теорема 6. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ на выпуклом замкнутом множестве $V \supset EW_N$, где множество $EW_N \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $\{a_1^i, a_2^i, \dots, a_m^i\}$, $i \in J_n$. Тогда

$$\min_{x \in EW_N} \varphi(x) \ge \varphi(y^*) + \rho \cdot (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_j^i)^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^{*2} +$$

$$+2\sum_{i=1}^{N} d_i^* y_i^0), \qquad (18)$$

где $d_i^* = -y_i^*$, $i \in J_N$, а $y^0 \in EW_N$ определяется как $y^0_{(j-1)m+r_t} = e_{s_t}^{i_j}$, $i_j \ne i_s$ при $s \ne j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \ge c_{(j-1)m+s_2} \ge \dots \ge c_{(j-1)m+s_m}$ и $e_{r_1}^{i_j} \le e_{r_2}^{i_j} \le \dots \le e_{r_m}^{i_j}$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению (10) при $c = d^*$, то есть $e_{i_1} \underset{d^*}{\prec} e_{i_2} \underset{d^*}{\prec} \dots \underset{d^*}{\prec} e_{i_n}$.

Доказательство проведем на основании леммы 3 при $E = EW_N$, $N = nm$. Задача оптимизации в правой части неравенства (15) может быть решена с помощью соотношения, полученного в [6]. Непосредственная подстановка минимального значения нормы $\|x - y^*\|^2$ на множестве EW_N в (15) приведет к справедливости оценки (18).

Лемма 4 [17]. Если функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом множестве V, где $E \subset V \subset R^N$, то для любого $x \in V$:

$$\min_{y \in E} \varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 +$$

$$+\rho \min_{y \in E}\left\| y - x + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x)\right\|^2. \qquad (19)$$

Теорема 7. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset ET_{nk}^m$, где множество $ET_{nk}^m \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $T_i = \{(z_1^i, z_2^i, \dots, z_m^i)\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$.

$$\min_{y \in ET_{nk}^m} \varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + \rho(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(z_j^i)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i})^2 + 2\sum_{i=1}^{N} c_i^* x_i^0),$$

где $c_i^* = -x_i + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}$, $i \in J_N$, $x^0 \in ET_{nk}^m$ такова, что $x^0_{(j-1)m+t} = z_t^{i_j}$, $i_j \ne i_s$ при $s \ne j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, а $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет (17).

Доказательство проведем на основании леммы 4 при $E = ET_{nk}^m$, $N = mn$. Задачу об определении минимума в правой части неравенства (19) решим с помощью соотношения о минимуме нормы разности [6] способом, аналогичным примененному при доказательстве теоремы 5.

Теорема 8. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset EW_N$, где множество $EW_N \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $\{a_1^i, a_2^i, \dots, a_m^i\}$, $i \in J_n$. Тогда для любого $x \in V$:

$$\min_{y \in EW_N} \varphi(y) \ge \varphi(x) - \frac{1}{4\rho}\|\nabla\varphi(x)\|^2 + \rho(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_j^i)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i})^2 + 2\sum_{i=1}^{N} c_i^* x_i^0), \qquad (20)$$

где $c_i^* = -x_i + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}$, $i \in J_N$, $x^0 \in EW_N$ такова, что $x^0_{(j-1)m+r_t} = e_{s_t}^{i_j}$, $i_j \ne i_s$ при $s \ne j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ таковы, что $c_{(j-1)m+s_1} \ge c_{(j-1)m+s_2} \ge \dots \ge c_{(j-1)m+s_m}$ и $e_{r_1}^{i_j} \le e_{r_2}^{i_j} \le \dots \le e_{r_m}^{i_j}$, а $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет

$$e_{i_1} \underset{c}{\prec} e_{i_2} \underset{c}{\prec} \dots \underset{c}{\prec} e_{i_n}. \qquad (21)$$

Доказательство проведем на основании леммы 4 при $E = EW_N$, $N = nm$. Задачу об определении минимума в правой части неравенства (33) решим с помощью соотношения о минимуме нормы разности [18] способом, аналогичным примененному при доказательстве теоремы 6.

Лемма 5 [17]. Для того чтобы точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in E$ была точкой минимума на множестве E сильно выпуклой с параметром $\rho > 0$ дифференцируемой на выпуклом множестве V функции $\varphi(x)$, где $E \subset V \subset R^N$, достаточно, чтобы

$$\|\nabla\varphi(x^*)\|^2 = 4\rho^2 \min_{y \in E}\left\| y - x^* + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)\right\|^2. \qquad (22)$$

Теорема 9. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset ET_{nk}^{m}$, где множество $ET_{nk}^{m} \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $T_i = \{(z_1^i, z_2^i, ..., z_m^i)\}$, $i \in J_n$. Для того, чтобы точка $x^* \in ET_{nk}^{m}$ была точкой минимума $\varphi(x)$ на ET_{nk}^{m}, достаточно, чтобы

$$\left\|\nabla\varphi(x^*)\right\|^2 = 4\rho^2(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(z_j^i)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(x_i^* - \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial x_i})^2 + 2\sum_{i=1}^{N}c_i^* x_i^0), \qquad (23)$$

где $c_i^* = -x_i + \dfrac{1}{2\rho}\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}$, $i \in J_N$, $x^0 \in ET_{nk}^{m}$ такова, что $x_{(j-1)m+t}^0 = z_t^{i_j}$, $i_j \neq i_s$ при $s \neq j$, $i_j, i_s \in J_n$, $j \in J_n$, $s \in J_n$, $t \in J_m$, а последовательность $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ удовлетворяет (17).

Доказательство проведем на основании леммы 5 при $E = ET_{nk}^{m}$, $N = mn$. Задача минимизации в правой части равенства (22) может быть решена с помощью формулы, доказанной в [6]. При этом используем подход, аналогичный примененному при доказательстве теоремы 7. В результате приходим к справедливости равенства (23) и теоремы 9.

Теорема 10. Пусть функция $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$ и дифференцируема на выпуклом множестве $V \supset EW_N$, где множество $EW_N \subset R^N$, $N = nm$ порождено множествами $\{a_1^i, a_2^i, ..., a_m^i\}$, $i \in J_n$. Для того, чтобы точка $x^* \in EW_N$ была точкой минимума $\varphi(x)$ на EW_N, достаточно, чтобы

$$\left\|\nabla\varphi(x^*)\right\|^2 = 4\rho^2\left\|y^0 - x^* + \frac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)\right\|^2, \qquad (24)$$

где $y^0 \in EW_N$ удовлетворяет соотношению (21) при $c^* = x^* - \dfrac{1}{2\rho}\nabla\varphi(x^*)$.

Доказательство утверждения проведем на основании леммы 5 при $E = EW_N$, $N = nm$. Задача минимизации в левой части равенства (22) может быть решена на основе подхода, примененного при доказательстве теоремы 8. В результате приходим к справедливости равенства (24) и утверждения теоремы.

Выводы

Таким образом, в статье получены новые теоретические результаты, касающиеся экстремальных свойств функций на композиционных образах комбинаторных множеств.

В работе сформулированы новые оценки и достаточные условия минимума выпуклых функций на классах композиционных образов комбинаторных множеств — перестановок кортежей и композиций перестановок.

Полученные результаты могут послужить основой для построения оптимизационного ядра интеллектуальных систем принятия решений, ориентированных на решение оптимизационных задач со сложной комбинаторной структурой в различных областях, чем определяется их научная ценность и практическая значимость.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с изучением экстремальных свойств функций на новых классах композиционных k-образов комбинаторных множеств и с разработкой на основе описанных результатов эффективных методов комбинаторной оптимизации.

Список литературы: 1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с. 2. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — К.: Наук. думка, 1988. — 472 с. 3. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с. 4. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. 5. *Стоян Ю.Г., Гребенник И.В.* Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства // Пробл. машиностроения. — 2005. — Т. 8. — № 3. — С. 56–62. 6. *Гребенник И.В.* Комбинаторное множество перестановок кортежей и его свойства // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. — 2005. — № 1. — С. 92–98. 7. *Гребенник И.В.* Классы композиционных образов комбинаторных множеств в математических моделях задач геометрического проектирования // Радиоэлектроника и информатика. — 2005. — № 3. — С. 69–73. 8. *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах// Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 11. — С. 74–86. 9. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР. — Сер. А. — 1988. — № 5. — С. 68–70. 10. *Яковлев С.В.* Теория выпуклых продолжений функции на вершинах выпуклых многогранников// Журн. вычислит. математ. и матем. физики. — 1994. — Т. 34. — № 7. — С. 1112–1119. 11. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А.. Валуйская О.А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере.// Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 27–36. 12. *Валуйская О.А., Емец О.А., Романова Н.Г.* Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна-Яковлева // Журн. вычислит. математ. и матем. физики. — 2002. — Т. 42, № 4. — С. 591–596. 13. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике// ДАН УССР. — Сер. А. — 1988. — № 3. — С. 238–240. 14. *Емец О.А.* Множество сочетаний с повторениями, отображенное в R^k, и свойства задач оптимизации на нём // ДАН УССР. — Сер А. — 1991. — № 4. — С. 69–72. 15. *Гребенник И.В., Лапко Д.А.* Исследование оценок минимума выпуклых продолжений функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — № 1. — С. 109–113. 16. *Гребенник И.В.* Экстремальные свойства функций на композиционных образах комбинаторных множеств // Радиоэлектроника и информатика. — 2005. — № 2. — С. 36–44. 17. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Гребенник И.В.* Экстремальные задачи на множестве размещений. — Х., 1991. — 35 с. — (Препринт АН УССР/ Ин-т пробл. машиностроения, 347). 18. *Гребенник И.В., Баранов А.В.* Оптимизация линейных функций на множестве композиций перестановок // Компьютерное моделирование и интеллектуальные системы. Сборник научных трудов. — Запорожье. — 2007. — С. 116–121.

Поступила в редколлегию 22.03.07