УДК 621.396.62

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ В СИСТЕМАХ МОБІЛЬНОГО ЗВ'ЯЗКУ

М.В. МОСКАЛЕЦЬ, К.О. СЕЛІВАНОВ
Харківський національний університет радіоелектроніки

Abstract *– The possibility of using recursive procedures in the space-time access problems as more constructive ones that perform correction of the weight vector of an antenna array in real time scale is considered, which is especially important for communication with mobile users. In order to evaluate the weight vector of the antenna array it has been proposed to use the optimal signal processing method in the space of Kalman-Bucy state variables, which allowed to achieve a stable mode of such processing on the action interval of the mobile stations' call signals without changing the operating modes of the mobile communication network. A method is proposed that takes into account the a priori data about the direction of arrival of signals at the initial stage of the installation of the weight coefficient vector, which provides reduction of the convergence interval for the adaptation process of control algorithms and the required efficiency of the space-time processing of the adaptive antenna array. The influence of initial conditions on the installation of the weight vector on the characteristics of the quality of space-time processing of a linear 4-element adaptive antenna array under the influence of one and two obstacles for the LMSD and MOSN algorithms according to the signal/(interference+noise) is analyzed. It is shown that due to the successful initial selection of the value of the complex weight vector for a linear 4-element adaptive antenna array it has been possible to significantly improve the transient characteristics of the algorithms.*

Анотація *– Запропонована модель для дослідження впливу початкових умов на ефективність просторово-часової обробки сигналів у антенній решітці за рахунок налаштування комплексного вектору вагових коефіцієнтів. Розглядається придатність застосування в задачах просторово-часового доступу рекурсивних процедур Уїдроу-Хоффа та Калмана-Б`юсі як більш конструктивних для здійснення корекції вектору вагових коефіцієнтів у реальному масштабі часу в динамічній сигнально-завадовій обстановці в мобільних системах зв'язку.*

Аннотация *– Предложена модель по исследованию влияния начальных условий на эффективность пространственно-временной обработки сигналов в антенной решетке за счет настройки комплексного вектора весовых коэффициентов. Рассматривается применимость использования в задачах пространственно-временного доступа рекурсивных процедур Уидроу-Хоффа и Калмана-Бьюси как более конструктивных по осуществлению коррекции вектора весовых коэффициентов в реальном масштабе времени в динамичной сигнально-помеховой обстановке в мобильных системах связи.*

Вступ

Одною з найбільш важливих проблемних задач мобільних систем зв'язку є обмеженість можливостей щодо множинного доступу. Проблема доступу до спільного ресурсу базової станції (БС) вирішується зазвичай на основі розділення частотно-часових параметрів сигналів абонентських станцій. Методи просторово-часового доступу абонентської станціїї (АС) до ресурсів БС ґрунтуються на використанні алгоритмів просторово-часової обробки прийнятих сигналів, що реалізуються на основі N-елементних адаптивних антенних решіток. Суть задачі просторово-часового доступу кожної з АС до ресурсів БС у висхідному каналі полягає у груповому використанні приймальної антенної решітки БС, при якому для кожної з АС формується індивідуальний розподіл структури прийнятого поля сигналу за допомогою вибору вектору вагових коефіцієнтів (ВВК) $\vec{W}_i$. Таким чином, одночасно

створюється стільки варіантів розподілів, скільки на даний момент приймається сигналів АС. Кожен із цих розподілів забезпечує максимально вдале співвідношення сигнал/завада+шум для прийому сигналу АС і встановлення нульових рівнів прийому для інших АС.

На відміну від традиційних методів просторово-часового доступу (ПЧД), які базуються на методах синтезу діаграми спрямованості антени та супроводі променем прийнятого сигналу, запропоноване рішення не потребує розгляду діаграми спрямованості (ДС), а знаходить найкраще на поточний час сигнально-завадове співвідношення, що задовольняє критерію оптимальності. Для цього необхідно використовувати ефективні методи обробки сигналів виклику за мінімальний період часу, що не перевищує 6÷8 с, якраз необхідний для досягнення сталого режиму адаптивної процедури ПЧД. Для реалізації запропонованого рішення про вибір адаптивного методу ПЧД у даній роботі запропоновані відповідні методи та алгоритми, які забезпечують можливість надання послуги доступу без зміни ведення режиму мобільного зв'язку.

I. Постановка проблеми

Адаптивна антенна решітка (ААР) дозволяє вирішити задачу поліпшення відношення сигнал/(завада+шум) у лінійній частині приймача [1-3]. У цьому випадку рішення знаходиться шляхом лінійного зважування та складання сигналів у каналах прийому (рис. 1). Визначення ВВК здійснюється залежно від обраного критерію оптимальності. Та чи інша властивість ААР досягається відповідним вибором комплексних вагових коефіцієнтів (ВК) w_i, $i = 1,2,...,N$, включених на виході приймальних антенних елементів (АЕ) та перед загальним суматором. За допомогою адаптивного процесора ВК забезпечують відповідне формування сумарної ДС і поляризаційної діаграми, тобто ВК разом із загальним суматором являють собою діаграмоутворювальну схему [1].

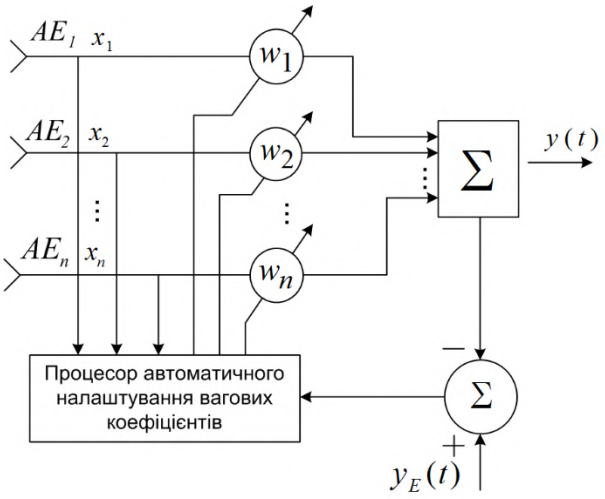


Рис. 1. Включення ВВК в ААР

У той же час призначення ВК можна інтерпретувати як завдання формування таких співвідношень між прийнятими N-реалізаціями корисного сигналу $s_i(t)$, N-антенних елементів, сумою j-вузькосмугових анізотропних завад $\sum_{j=1}^{J} n_j(t)$ і шумом $\nu(t)$. Ці параметри після складання на загальному суматорі дозволяють забезпечити максимум відношення сигнал/(завада+шум), мінімум середнього квадратичного відхилення прийнятого сигналу від заданого чи інший критерій.

При цьому сигнал на виході загального суматора дорівнює

$$y(t)=\sum_{i=1}^{N} w_i x_i(t), \tag{1}$$

де N – число гілок рознесення або число АЕ;

w_i – ваговий коефіцієнт i-го АЕ;

$x_i(t)$ – суміш сигналу, завад і шуму на i-му АЕ:

$$x_i(t)=s(t)+\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(t)+\nu_i(t). \tag{2}$$

За допомогою ВК формуються їхні вектори вагових коефіцієнтів (ВВК):

$$W^T(t)=\left(w_1(t),w_2(t),...,w_N(t)\right). \tag{3}$$

У загальному випадку ВВК $\vec{W}_i$ повинен мати можливість змінювати як амплітуди, так і фази приймальних сигналів, тобто він повинен бути комплексним. Швидкість цих змін повинна бути узгоджена зі швидкістю зміни сигнально-завадової ситуації, а діапазон узгоджується з динамічним діапазоном змін рівнів сигналів і завад, а також фазових співвідношень у різних елементах ААР. Очевидно, ідеальною є ситуація, коли швидкість змін ВВК нескінченно велика, а динамічний діапазон змін амплітудно-фазових характеристик необмежений. Однак на практиці, виходячи з можливостей технічної реалізовності та інших причин доводиться обмежувати ці характеристики, що, загалом, призводить до відповідного зниження ефективності ААР. У цьому сенсі говорять про ААР з обмеженнями [4].

Кінцевим результатом розв'язуваних завдань інших проблем антенної техніки при різних обмеженнях на конструкцію, габарити, спектральний склад сигналів і завад та інші параметри є синтез ДС. В сенсі проблематики ПЧД кінцева мета використання ААР полягає в тому, щоб забезпечити (максимізувати) необхідні якісні характеристики корисних сигналів на виході антени, тобто отримати вихідне співвідношення

$$y(t)=y(w_t,t)=\left(w(t),x^*(t)\right)=W^T(t)x^*(t)=w_1(t)x_1(t)+w_2(t)x_2(t)+...+w_N(t)x_N(t), \tag{4}$$

де вираз у дужках позначає скалярний добуток векторів, що задовольняє заздалегідь обраному критерію. При цьому сама сумарна ДС ААР може взагалі не розглядатися,

хоча як проміжна характеристика, безумовно, представляє інтерес. Так, ДС ААР може бути отримана за допомогою скалярного добутку ВВК $\vec{W}(t)$ на вектор $f(\theta)$:

$$F(\theta) = (W^T(t), f^*(\theta)), \quad (5)$$

де $f^T(\theta) = \left(f_1(\theta), f_2(\theta)e^{i\varphi_1\theta_1}, ..., f_N(\theta)e^{i\varphi_N\theta_1}\right)$;

$f_i(\theta)$ – ненормовані ДС приймальних елементів ААР;

$\varphi_i\theta_1$ – фази огинаючої хвилі одиничної амплітуди, що відраховувані від фази сигналу з виходу 1-го елемента (при $\varphi_i\theta_1$), зафіксовані на виходах приймальних елементів за рахунок просторових відмінностей [4-7].

Важливою властивістю ААР є інваріантність деяких критеріїв функціонування по відношенню до сумарної ДС. Це має велике практичне значення, пов'язане з можливістю довільного, в тому числі й випадкового, розташування антенних елементів. При цьому відпадає необхідність застосування жорстких кріплень, скорочується час розгортання і т.д. У ААР кількість антенних елементів N може бути мінімальною (наприклад, $N \geq 2$) і вибирається, виходячи з очікуваної кількості наявних завад. Значення в N ААР розглядається як число ступенів свободи, оскільки саме воно визначає кількість незалежно сформованих ДС, тобто кількість завад, яка здатна заглушити ААР з одним виходом, становить $J \leq N-1$. Разом із тим, АЕ можуть бути багаторазово використані, й на кожному з них може бути мінімізовано $N-1$ завад. Слід, однак, вказати на те, що при цьому кратно падає рівень прийнятого сигналу та відношення сигнал/шум.

Задачу заглушення завад в ААР можна вирішувати по-різному. Так, використовуючи принцип поділу [1, 8], можна спочатку оцінити напрямок приходу цих завад θ_j, $(j = 1, J)$ та їх поляризацію, а потім розв'язати задачу управління ВВК ААР і знаходження її ДС і просторової диаграми (ПД) з нулями, орієнтованими в напрямку приходу завад. Однак розв'язання цієї задачі досить складне, пов'язане з перетворенням матриць, і це рішення [8] вдається знайти далеко не для кожної ситуації. На практиці застосовується більш конструктивне рішення, що ґрунтується не на декомпозиції, а на безпосередньому перебуванні оцінки $\hat{W}(t)$ ВВК. У даний час відомо кілька рішень, що розрізняються як вибраними критеріями ефективності, так і передбачуваними обмеженнями. До найбільш поширених критеріїв належать:

– максимум відношення рівнів корисного сигналу до суми завад (МВСЗ) на виході ААР;

– мінімум середнього квадрата відхилення (МСКВ) прийнятого сигналу від заданого еталонного $y_E(t)$ на виході ААР;

– мінімум потужності завад на виході ААР (МВП);

– максимум правдоподібності (МП);

– різні інші модифікації критеріїв.

Синтезовані при цьому алгоритми функціонування ААР виходять із розв'язання статистичних задач. Серед усього різноманіття рішень можна виділити

два основних напрямки, що історично з'явилися першими. Асимптотичні рішення припускають наявність гіпотези ергодичності сигнально-завадової ситуації [3-5]. Ці рішення здебільшого ґрунтуються на знаходженні оцінки кореляційної матриці (або її обігу), що характеризує сигнально-завадову ситуацію, або інших, наприклад градієнтних, процедурах у вказаних межах. У літературі до цього часу основна увага приділялася розвитку саме цього напряму [8-11].

Інший напрям грунтується на припущенні марківської апроксимації прийнятої реалізації та динаміки змін ВВК. Відмова від ергодичності дозволяє ефективно вирішувати нестаціонарні задачі з використанням добре розробленого апарату рекурентної лінійної або нелінійної фільтрації. З використанням цього підходу одержано ряд результатів щодо просторово-часової та поляризаційно-часової обробки [4, 12, 13].

На даний час все більше зростає інтерес до проблематики впровадження просторово-часового доступу та просторово-часової обробки сигналів у системах мобільного і безпроводового зв'язку. Аналізуючи ряд публікацій за даною тематикою [14-20], зазначимо, що актуальність даних задач не зменшується, оскільки в даний час у системах мобільного зв'язку та безпроводового доступу є дефіцит використання частотного, часового та кодового ресурсів. У багатьох наукових працях, присвячених мобільним системам, здійснювались спроби активного використання просторово-поляризаційних параметрів сигналів і антен для вирішення різних задач, зокрема, і просторово-часових методів доступу. Однак багато з них носять частковий, автономний характер, не пов'язаний з загальносистемними задачами мобільних мереж зв'язку. Так, в роботах [14-20], дослідження функціонування ААР здійснюється на основі використання асимптотичних алгоритмів, які є оптимальними саме для стаціонарної сигнально-завадової обстановки.

Розглянуті результати подальшого розвитку методів аналізу функціонування ААР з урахуванням реалізаційних обмежень [14-20] і наявністю взаємного впливу між антенними елементами при синтезі процедури доступу здійснено при невизначеності початкових даних щодо сигнально-завадової обстановки. Розглянуті в роботах критерії синтезу адаптивних антенних решіток у задачах просторово-часового доступу не враховують динамічну нестаціонарну завадово-сигнальну обстановку за показниками якості та швидкодії, що є досить актуальним для мобільних систем зв'язку. При аналізі процедури просторово-часового доступу у висхідному каналі до ресурсів базової станції багатьма авторами в якості антени базової станції розглядається багатопроменева антенна решітка.

Конструктивним постає метод, заснований на організації індивідуального ПЧД для кожного прийому конкретної АС, при цьому сигнали інших АС слід розглядати як такі, що заважають. Таким чином, для забезпечення ПЧД при азимутальних переміщеннях АС може бути запропонована адаптивна антенна решітка, диаграма спрямованості, якої коригується відповідно до динаміки просторових змін прийнятих сигналів АС. У даному випадку реалізується групова ПЧОС з великим об'ємом обчислень з обмеженням на якість прийому для вирішення

електродинамічної задачі. Результатом такої спроби є можливість отримання не тільки нового позитивного ефекту від запропонованого методу просторово-часового доступу, але і можливості комплексності рішень, яка забезпечить підвищення загальносистемної ефективності та продуктивності мобільної мережі. Це також створюватиме передумови для економії радіочастотного спектру, забезпечення високої завадостійкості, електромагнітної сумісності та, відповідно, можливості надання якісних послуг споживачам інформації.

II. Формулювання мети і задач дослідження

Метою даного дослідження є вибір ефективного методу синтезу адаптивної антенної решітки для його реалізації в задачах просторово-часового доступу у системах мобільного зв'язку.

Предметом дослідження в данній роботі є знаходження придатних для використання у просторово-часовому доступі алгоритмів просторово-часової обробки, що зводяться до синтезу ААР, та умов, що підвищуватимуть продуктивність алгоритмів обробки.

Для досягнення даної мети в роботі були поставлені наступні задачі:

– провести аналіз відомих алгоритмів просторово-часової обробки сигналів за показником швидкості збіжності на предмет їх придатності для систем мобільного зв'язку;

– проаналізувати вплив початкових умов при установці вектора вагових коефіцієнтів на характеристики якості просторово-часової обробки адаптивної антенної решітки за показником відношення сигнал/(завада+шум) для лінійної 4-х елементної ААР при дії однієї та двох завад для алгоритмів МСКВ та МВСЗ.

III. Аналіз ефективності методів синтезу антенної решітки, придатних для систем мобільного зв'язку

Найбільш популярним при рішенні різних задач радіозв'язку, радіолокації та інших є критерій мінімуму середньоквадратичного відхилення, який був запропонований Уідроу [11]. ВВК визначається з рекурентної формули [3, 11]:

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) + 2\mu[y_E(k) - \vec{W}(k)^T \vec{X}(k)]\vec{X}(k), \qquad (6)$$

де k – номер відліку у дискретному часі;

μ – кроковий коефіцієнт;

$y_E(k)$ – опорний сигнал у момент часу k;

$\vec{X}(k)$ – вектор вхідних впливів у момент часу k.

Популярність критерію МСКВ пояснюється тим, що синтезовані на базі МСКВ алгоритми мають досить просту структуру. Отримані при цьому рішення добре вписуються в загальні критерії, за якими функціонують мобільні телекомунікаційні системи.

Особливості роботи в багатопроменевих лініях зв'язку накладають певні обмеження на застосування того чи іншого алгоритму, синтезованого за критерієм МСКВ. Для роботи цього алгоритму необхідно мати інформацію про структуру сигналу, однак така інформація не завжди може бути відома. Таким чином, алгоритм, синтезований за критерієм МСКВ, може бути ефективно використаний у тих випадках, коли структура випромінюваного та прийнятого сигналу однакова та точно відома. Разом з тим, за допомогою цього критерію можуть бути розроблені процедури, що мають рекурентну форму. Це, зокрема, процедури стохастичної апроксимації, лінійної або нелінійної фільтрації, а також процедури Калмана-Б'юсі, методи рекурентного обернення кореляційної матриці.

Алгоритми адаптивних антенних решіток, що використовують апріорну інформацію про направлення приходу корисного сигналу, синтезуються за критерієм максимуму вихідного відношення потужності корисного сигналу до суми потужностей завад і шуму (МВСЗ) [1,4]:

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) - 2\mu[\vec{X}_n^T(k)\vec{W}(k)\vec{X}_n(k) - \vec{V}_c], \qquad (7)$$

де $\vec{V}_C^T = \left[A_{1C}e^{(-j\varphi_1)}, A_{2C}e^{(-j\varphi_2)}, ..., A_{NC}e^{(-j\varphi_N)}\right]$ – вектор хвильового фронту сигналу;

$A_{iC} = \vec{E}_i(\Theta_C, \Phi_C)\vec{\varepsilon}_C$ – векторна характеристика спрямованості i-го АЕ за напруженістю електромагнітного поля;

$\vec{E}_i(\Theta_C, \Phi_C)$ – напруженість електромагнітного поля;

$\vec{\varepsilon}_i$ – одиничний вектор поляризації хвилі, що приходить.

В алгоритмах, синтезованих за критерієм МВСЗ, як інформаційний параметр використовується напрямок приходу сигналу. Однак налаштування ВВК здійснюється за завадами у відсутності випромінювання корисного сигналу, інакше він може бути заглушений. Це обмеження не завжди здійснено або ж вимагає додаткових витрат, що робить небажаним його застосування.

Для алгоритмів ААР, синтезованих за критерієм мінімуму вихідної потужності (МВП) [10], як цільова функція використовується значення потужності вихідного сигналу антенної решітки

$$E\{y^2(t)\} = \vec{W}^T \cdot R_{xx}^{-1}\vec{W}, \qquad (8)$$

де R_{xx} – матриця просторової кореляції вхідної суміші сигналів і завад.

Безпосередня мінімізація (8) може бути виконана різними методами безумовної оптимізації [1].

При цьому ВВК буде визначатися виразом:

$$\vec{W}_{opt} = sR_{xx}^{-1}\vec{V}_y, \qquad (9)$$

де s – нормуючий коефіцієнт;

$\vec{V}_y$ – вектор управління, що задає передбачуваний кут приходу сигналу.

Вираз для визначення ВВК можна записати в рекурентній формі:

$$\vec{W}(k+1) = \vec{W}(k) - 2\mu[\vec{W}^T(k)\vec{X}(k)][\vec{X}(k) - \vec{W}(k)(\vec{W}^T(k)\vec{X}(k))]. \quad (10)$$

Методи, що засновані на оберненні вибіркової коваріаційної матриці прийнятих сигналів, є асимптотичними та пов'язані з великими втратами часу на набір і обробку статистики для оцінки та обігу коваріаційної матриці. Рекурентні методи, що засновані на градієнтних процедурах у стаціонарних умовах та при інших рівних умовах мають однакову ефективність. Разом з тим, перевагою рекурсивних методів є динамічний характер, що дозволяє одержувати оцінку ВВК у реальному масштабі часу, що узгоджується з динамічністю процесу зв'язку у мобільних системах.

При нестаціонарній сигнально-завадовій обстановці (СЗО) відбуваються просторово-часові зміни параметрів сигналу та завади. Ці зміни можуть відбуватися через впливи середовища поширення радіохвиль, переміщення АС, приймача або передавача завади та з інших причин. Для такої динамічної сигнально-завадової обстановки рівняння стану ВВК матиме загальний вигляд [1, 4]:

$$d\vec{W}(t)/dt = F(t)\vec{W}(t) + G(t)\vec{\nu}(t), \quad (11)$$

де $F(t)$ і $G(t)$ є відповідно матрицями стану й інтенсивності змін параметрів сигналів і завад (елементи f_{ij}, $i, j = \mathbf{dim}\,\vec{W}(t)$, які є величинами, зворотними коефіцієнтам взаємної кореляції між i-ю і j-ю компонентами);

$\vec{\nu}(t)$ – вектор, що породжує білий гаусів шум моделі (11) зі спектральною щільністю потужності N_u.

Рекурентні адаптивні алгоритми не вимагають великих витрат на обчислення матриць і обмежені невеликим об'ємом постійної та оперативної пам'яті. У рекурентних процедурах послідовність рішень обчислення оцінки $\vec{W}_{opt}(t)$ знаходиться з етапу пошуку екстремуму градієнта функції, що містить як аргумент величини $W(t)$.

Все це дозволяє проводити аналіз і врахування перехідного режиму ААР, а також нестаціонарності статистики $X(t)$. Рекурентні методи засновані на послідовній ітераційній процедурі знаходження рішення для ВВК у напрямку, протилежному градієнту функції показника якості $\nabla(k)$. У загальному випадку дискретний з кроком градієнтний алгоритм має вигляд

$$W(k) = W(k-1) - \mu\nabla(k), \quad (12)$$

де μ – коефіцієнт (крокова постійна), що враховує швидкість пошуку екстремуму.

Алгоритм (12) показує, що значення ВВК на k-му кроці дорівнює значенню ВВК на попередньому $(k-1)$-му кроці з адаптивною добавкою $\mu\nabla(k)$, яка залежить

від нев'язки різниці $y_E(k)-y(k)$ (рис. 2). Процедура (12) при значенні $\Delta t=(t_{k+1}-t_k)\to 0$ переходить у безперервну, яка може бути представлена у вигляді диференціального рівняння

$$dW(t)/dt=-\mu\nabla(t). \tag{13}$$

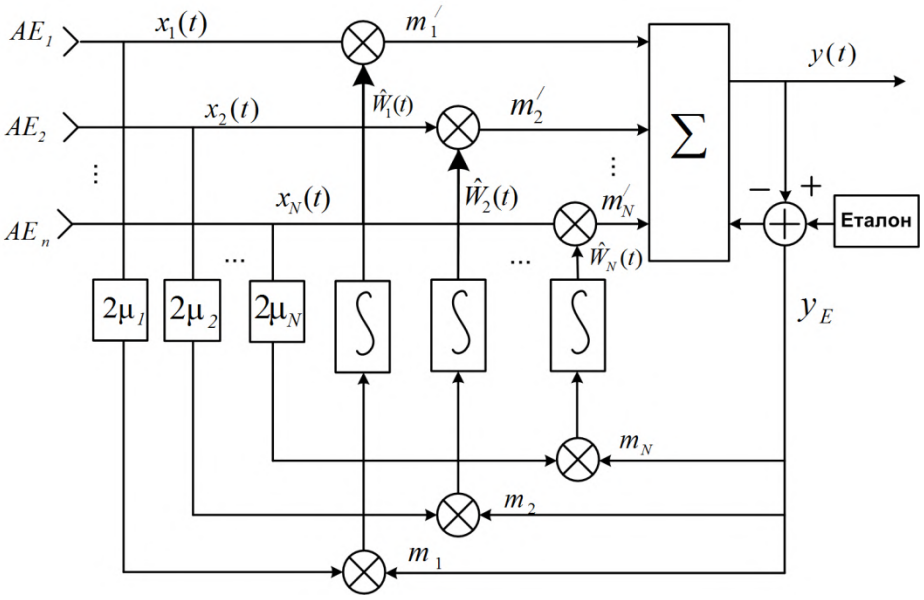


Рис. 2. Структурна схема управління ВВК ААР, що синтезована за алгоритмом Уідроу

Цей же алгоритм при безперервній процедурі набуває вигляду диференціального рівняння Уідроу-Хоффа [1, 4]:

$$d\hat{W}(t)/dt=2\mu[y_e(t)-y(t)]X(t)=2\mu\nu(t)X(t). \tag{14}$$

На рис. 2 представлена структурна схема дискретного алгоритму N-мірної ААР, виконана у відповідності з (14).

Відзначимо один важливий факт, який відрізняє ААР з використанням критерію МСКВ від ААР, у яких прийнятий критерій МВСЗ. У ААР, що синтезовані за критерієм МВСЗ, на кожен канал прийому вводиться опорний сигнал, який визначає положення головного максимуму ДС і повинен бути строго погоджений з положенням антенних елементів решітки.

У розглянутому алгоритмі Уідроу-Хоффа еталонний сигнал $y_E(t)$ в загальний канал прийому вводиться вже після загального суматора (рис. 2). Тому явної залежності алгоритму ААР від розташування антенних елементів тут не існує. Це дозволяє використовувати даний алгоритми при випадковому або невідомому розташуванні приймальних елементів решітки або невідомому напрямку приходу сигналу і завад, наприклад при використанні ААР на рухомих об'єктах.

Процедури виду (6), (12)–(14) є нічим іншим як процедурами стохастичної апроксимації [12], умова збіжності та стійкості яких забезпечується відповідним

вибором коефіцієнта μ. Водночас вибір крокової постійної μ не вбачається конструктивним, бо це призводить до збільшення помилок. Тому слід розглядати постановку задачі та її вирішення з позицій теорії рекурентної лінійної та нелінійної фільтрації в просторі станів. Методи й алгоритми стохастичної апроксимації, у тому числі (6), (12)–(14), є окремим випадком більш загальних процедур, таких як процедури фільтрації Стратоновича, Калмана-Б'юсі та ін. [8]. Відомо, що алгоритми типу (6), (12)–(14) при виконанні умов Дворецького збігаються з ймовірністю 1 до оцінюваного значення та являють собою рекурентний метод знаходження умовного середнього значення. Іншими словами, процедури (6), (12)–(14) призначаються для оцінки постійних випадкових величин, для яких стан оцінюваної величини ВВК можна визначити простим диференціальним рівнянням

$$dW(t)/dt = 0\,. \tag{15}$$

Якщо ж припустити випадкову зміну у часі моделі стану ВВК та параметрів напрямку приходу сигналу та завад, то стан ВВК необхідно виразити у вигляді багатовимірного (N-мірного) стохастичного диференціального рівняння

$$dw_i(t)/dt = -\alpha_i(t)w_i(t) + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t)\xi_{м}^{i}(t) \quad \text{при } i,\ j=\overline{1,N}, \tag{16}$$

де $\alpha_i(t)$ – невипадкові величини, що характеризують швидкість зміни i-го ВВК $\alpha_i(t) = \tau_{кор_i}^{-1}$; $\tau_{кор}$ – інтервал кореляції цих змін; $\xi_{м}^{i}$ – компоненти білого гаусового шуму, що породжує шум моделі з рівномірною спектральною густиною потужності V_M^j; $b_{ij}(t)$ – елементи $N \times N$ матриці $B(t)$, що породжують шум і визначають інтенсивність змін кожної з компоненти ВВК.

Випадкові процеси, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями типу (16), відносяться до класу марківських, а коефіцієнти $\alpha_i(t)$ і $\beta_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(t)b_{jk}(t)$ називаються відповідно коефіцієнтами зносу та дифузії цих процесів. Очевидно, вираз (15) є окремим випадком (16) при $\alpha_i(t) = \beta_{ij}(t) = 0$.

Для отримання оцінки ВВК з використанням стандартних процедур лінійної та нелінійної фільтрації необхідно, крім рівняння стану, задавати рівняння спостереження. Рівняння спостереження представимо у вигляді

$$y(t) = W^T(t)x(t) = W_{opt}^T(t)X(t) + \nu_c(t)\,, \tag{17}$$

де $X(t)$ – вектор, отриманий на підставі (2) з вектора $x(t)$ без урахування ізотропного шуму $\nu_i(t)$; $\nu_c(t)$ – шум спостереження, утворений у результаті зваженої суми шумів $\nu_i(t)$, що також є результатом різних помилок апроксимації, прийнятих у моделі.

Шум спостереження апроксимуємо також гаусовим «білим шумом» зі спектральною щільністю потужності V_c. Алгоритм отримання оцінки ВВК для даного випадку є стандартним і визначається зі стохастичного диференціального рівняння

$$d\hat{w}_i / dt = -a_i(t)\hat{w}_i(t) + \sum_{j=1}^{N} K_{ij}(t)F_j(\hat{w}_i, t), \tag{18}$$

де $F_j^{`}(\hat{w}_i, t) = dF_j(\hat{w}_i, t)/d\hat{w}_t$ – N-мірний вектор-стовбець, отриманий через похідні по часу спостереження від логарифма функції правдоподібності

$$F(w_t, t) = \frac{1}{V_C}\left[2y_e(t)y(w_t, t) - y^2(w_t, t)\right], \tag{19}$$

$K_{ij}(t)$ – дисперсія помилки оцінки, що описується рівнянням Ріккаті:

$$dK(t)/dt = B(t)V_H B^T(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)F''(\hat{w}_t, t)K(t), \tag{20}$$

тут $F''(\hat{w}_t, t) = d^2F(\hat{w}_t, t)/d\hat{w}_t^{(i)}d\hat{w}_t^{(i)}$ – квадратна $N \times N$ матриця, $A(t)$ – діагональна матриця з елементами $\alpha_i(t)$.

З урахуванням (4) значення похідних у (19) визначаються виразами наступним чином:

$$F^{`}(\hat{w}_t, t) = \begin{bmatrix} F_1^{`} \\ F_2^{`} \\ \dots \\ F_N^{`} \end{bmatrix}; F^{``}(\hat{w}_t, t) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N1} & F_{N2} & \dots & F_{NN} \end{bmatrix}.$$

де

$$F(w_t, t) = \frac{1}{V_C}\left[2y_э(t)y(w_t, t) - y^2(w_t, t)\right];$$

$$F_j = 2V_C^{-1}\left[y_e(t) - y(w_t, t)\right]x_j(t) = 2V_C^{-1}v(t)x_j(t);$$

$$F^{`}(\hat{w}_t, t) = 2V_C^{-1}v(t)x(t);$$

$F_{ij} = -x(t)x_j(t)$ – елемент матриці $F^{``}(\hat{w}_t, t)$.

З урахуванням цього рівняння оцінки ВВК (18) набуває вигляду

$$d\hat{w}_i(t)/dt = -a_i(t)\hat{w}_i(t) + \sum_{j=1}^{N} 2K_{ij}(t)V_H^{-1}\left[y_e(t) - y(t)\right]x_i(t) =$$

$$= -a_i(t)\hat{w}_i(t) + 2V_C^{-1}v(t)\sum_{j=1}^{N} K_{ij}(t)x_i(t) \tag{21}$$

або у векторній формі

$$d\hat{W}(t)/dt = A(t)\hat{W}(t) + 2V_C^{-1}\nu(t)K_{ij}(t)X(t)\,. \qquad (22)$$

Рівнянню (22) відповідає структурна схема алгоритму оцінки ВВК ААР, яка подана на рис. 3, або фільтр Калмана-Б'юсі. Розглянута задача оцінки ВВК лінійна як за постановкою (17), (18), так і за рішенням (20)-(22) і відповідає лінійному варіанту фільтра Калмана-Б'юсі. Відмінною особливістю отриманого тут рішення є те, що апостеріорна дисперсія $K_{ij}(t)$ виявилася залежною від результатів спостережень за рахунок наявності матриці $F``(\hat{w}_t, t)$. На відміну від класичних рішень, тут потрібне обчислення значень матриці $K_{ij}(t)$ в реальному масштабі часу.

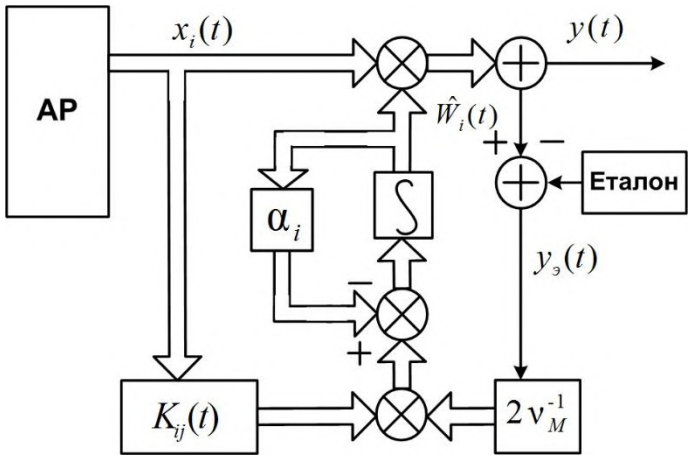


Рис. 3. Структурна схема алгоритму оцінки ВВК АР

Таким чином, для систем мобільного зв'язку можна рекомендувати алгоритми ААР, що синтезовані на основі методів калманівської фільтрації формування ВВК.

IV. Аналіз алгоритмів просторово-часової обробки Уідроу-Хоффа та Калмана-Б'юсі за показником швидкості збіжності

В ході вирішення другої задачі проведено порівняльний аналіз алгоритму Уідроу-Хоффа та алгоритма Калмана-Б'юсі. Графіки залежності ВСЗШ від часу надано на рис. 4. Крива 1 відповідає випадку використання алгоритму Уідроу-Хоффа, крива 2 – алгоритму Калмана-Б'юсі.

В той же час, як показує аналіз процедури Калмана-Б'юсі поряд з оптимальністю для складної сигнально-завадової обстановки вона характеризується максимально коротким часом збіжності до сталого стану на інтервалі $\tau \le \tau_{кор}$. Тобто при виборі кроку дискретизації $\Delta t = 0{,}1\tau_{кор}$ перехідний процес завершується вже за 3-10 кроків дискретизації. Таким чином, збіжність процедури Калмана-Б'юсі забезпечується на інтервалі часу, що відведений для дії сигналів виклику.

На рис. 5 представлені графіки залежності ВСЗШ від кількості антенних елементів N. Графіки залежності побудовані при значенні сигнал/завада $P_c/P_з = 0$ дБ для різних значень відношення сигнал/шум $P_c/P_ш$. Крива 1 (рис. 5) відповідає значенню $P_c/P_ш = 10$ дБ, крива 2 відповідає $P_c/P_ш = 20$ дБ, крива 3 відповідає $P_c/P_ш = 30$ дБ.

Аналіз ААР малої та великої розмірності показує, що з ростом числа антенних елементів ефективність заглушення завад спочатку різко зростає, потім це зростання знижується і стає пропорційним числу елементів N. При цьому ВСЗШ на виході ААР істотно залежить від відношення сигнал/шум на її вході.

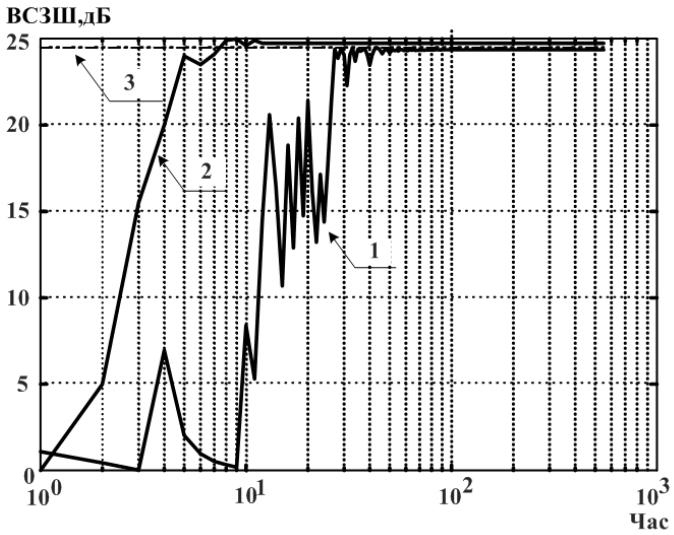


Рис. 4. Залежність ВСЗШ на виході 8-ми елементної ААР від часу для алгоритма Уідроу-Хоффа (крива 1), Калмана-Б'юсі (крива 2), потенційне значення ВСЗШ, дБ (крива 3)

Допустимість аналізу ефективності рекурсивних процедур за результатами аналізу процедур на основі вибіркових оцінок ґрунтується на тому, що обидві ці задачі мають загальне формулювання постановки задачі і критерії ефективності.

V. Дослідження впливу початкових умов на ефективність просторово-часової обробки сигналів

В алгоритмах зі зворотним зв'язком оцінка ВВК відбувається шляхом послідовних наближень у часі, тобто ітеративно. Таким чином, можна припустити, що при відповідному виборі початкового значення ВВК ($\vec{W}_0$) поліпшуються перехідні характеристики [1, 4].

У цьому сенсі вдалим наближенням був би $\vec{W}_0$, що забезпечує максимальне посилення корисного сигналу при повному заглушенні завади. Однак у реальних умовах таке початкове наближення отримати практично неможливо, оскільки кількість і напрямки приходу завад апріорі невідомі та часто змінюються в часі. Більш реалістичним є припущення про наявність деяких відомостей про корисний сигнал: форма сигналу, напрямок приходу, частотно-часова характеристика, або те, наскільки

завада перевищує за потужністю корисний сигнал. В цьому випадку інформативним параметром, за яким можливо найбільш точне налаштування ВВК, може виступати оцінка напряму приходу корисного сигналу. Структурна схема алгоритму ПЧД сигналів АС для рішення цієї задачі представлена на рис. 5.

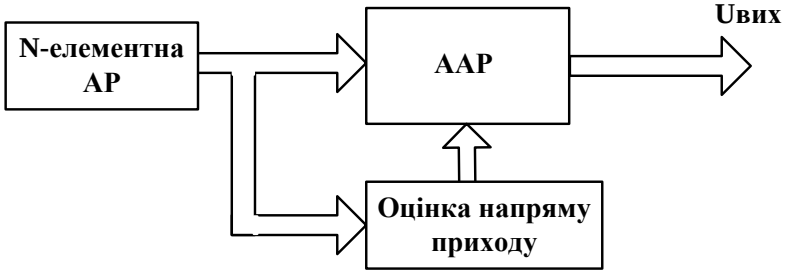


Рис. 5. Структура алгоритму просторово-часового доступу сигналів АС з попередніми визначеннями напрямку приходу

Для проведення аналізу впливу початкових умов скористаємося значеннями ВВК у сталому стані (при $k \to \infty$) [1, 4]:

$$W(k+1) = \left[I - \mu R_{xx}\right]^{K+1} W(0) + \mu \sum_{i=0}^{K} \left[I - \mu R_{xx}\right]^{i} R_{xx}, \tag{23}$$

де R_{xx} – кореляційна матриця прийнятих сигналів завад і шуму.

При відсутності корисного сигналу цей же вираз набуває вигляду:

$$W(k+1) = \left[I - \mu R_{зз}\right]^{K+1} W(0) + \mu \sum_{i=0}^{K} \left[I - \mu R_{зз}\right]^{i} H, \tag{24}$$

де $R_{зз}$ – кореляційна матриця завад.

При правильному виборі крокової постійної інші сигнали в експонованих рівняннях наближаються до відповідних оптимальних ВВК, а норми нульових доданків дорівнюють нулям. Тому швидкість збіжності процедур зазвичай і визначається як швидкість спадання цих норм, яка, в свою чергу, пов'язана з мінімізованими власними числами матриць R_{xx} та $R_{зз}$. Справді, переходячи до систем координат, у яких R_{xx} та $R_{зз}$ є діагональними, отримаємо

$$\mathrm{E}\{\vec{W}(k+1)\} = Q^{-1}[I - \mu\Lambda]^{k+1} Q\vec{W}(0) + \mu Q^{-1} \sum_{i=0}^{K} [I - \mu\Lambda]^{i} Q\vec{R}_{xc}, \tag{25}$$

$$\mathrm{E}\{\vec{W}(k+1)\} = Q_1^{-1}[I - \mu\Lambda_1]^{k+1} Q_1\vec{W}(0) + \mu Q_1 \sum_{i=0}^{K} [I - \mu\Lambda_1]^{i} Q_1\vec{H}, \tag{26}$$

де Q, Q_1 – матриці перетворення координат, стовпцями яких є власні вектори R_{xx} і $R_{зз}$, а Λ, Λ_1 – діагональні матриці, елементами яких є власні числа R_{xx} і $R_{зз}$. Однак відомо [1, 4], що згадана вище збіжність («сильна» збіжність), яка визначається з умов близькості налаштовуваного вектора до оптимального за нормою

$$\left\| \vec{W}(k) - \vec{W}_{опт} \right\| \to 0 \qquad (27)$$

не є необхідною для початкової ділянки налаштування при правильно обраному $\vec{W}_0$.

Тому можна виділити дві основні характеристики збіжності: заглушення завад (I) і близькості налаштування ВВК до його оптимального значення (II). Очевидно, що збіжність у сенсі (I) залежить як від вибору $\vec{W}_0$, так і поточної завадової ситуації і визначається найменшим власним числом кореляційної матриці вхідних сигналів, що задовольняє умові

$$\lambda_н > \lambda_{\min} = \sigma_ш^2 . \qquad (28)$$

Збіжність у сенсі (II) визначається виконанням умови (27) і залежить від $\lambda_{\min}$ (тобто вона залежить тільки від $\vec{W}_0$).

Отже, виходячи з умови (27) та на виконання вимоги максимізації ВСЗШ, отримаємо наступне. Для досягнення найбільшої швидкості збіжності в сенсі II початковий ВВК необхідно вибирати узгодженим до інформації про корисний сигнал. Тобто $\vec{W}_0$ повинен забезпечувати орієнтацію максимуму ХС у напрямку приходу корисного сигналу.

Вважаючи, що корисний сигнал визначається виразом $x(k) = x_c(k) + x_з(k) + x_ш(k)$, отримаємо, що початковий ВВК має вигляд

$$\vec{W}_0 = k_n \vec{V}_c^{\,*}, \qquad (29)$$

де k_n – постійний коефіцієнт;

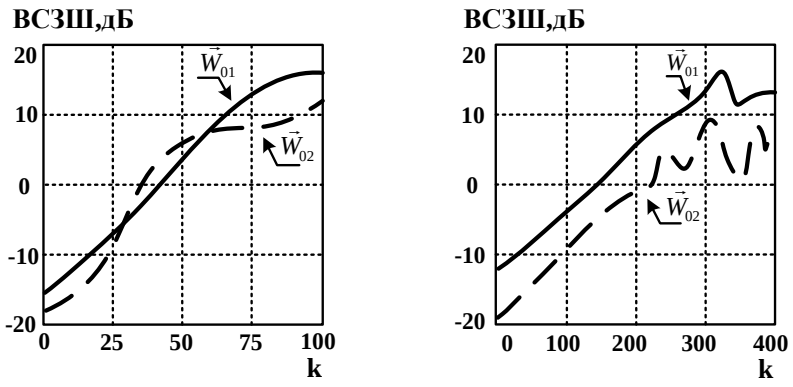
$V_c^T = [1, e^{i\varphi_{c1}}, e^{i\varphi_{c2}}, ..., e^{i\varphi_{c(N-1)}}]$ – вектор напрямку.

Очевидно, вектор напрямку V_c^T може бути відомий заздалегідь або визначений методами напрямку приходу корисного сигналу відповідно до схеми на рис. 5.

Проведено імітаційне моделювання в математичному пакеті прикладних програм для числового аналізу MATLAB. Покрокові значення ВСЗШ при наявності на вході лінійних 4-х елементних ААР ($d_i = \lambda_c / 2$) однієї та двох завад представлені на рис. 6 і рис. 7 для алгоритмів МСКВ та МВСЗ відповідно.

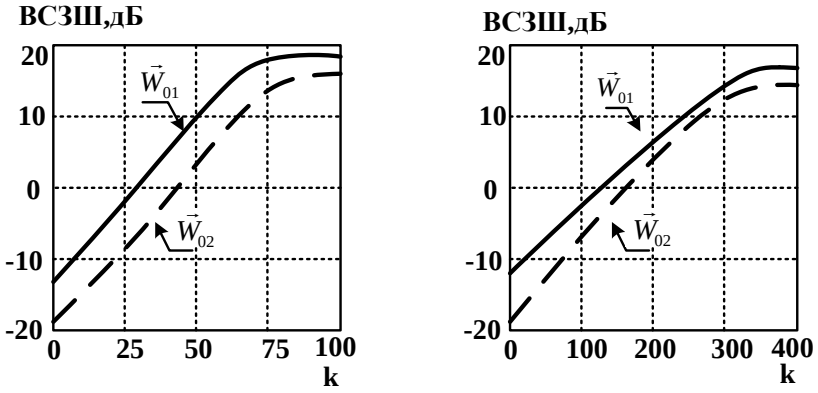
Покрокові залежності ВСЗШ на виході ААР наведені при наявності на вході решітки двох завад з кутами приходу $\theta_{з1} = 15^0$, $\theta_{з2} = 45^0$, для яких $P_{з1}/\sigma_ш^2 = 40$ дБ та $P_{з2}/\sigma_ш^2 = 34$ дБ. При цьому розглядався $\vec{W}_0$, що задовольняє (29), а також інший граничний випадок, коли $\vec{W}_0$ визначає вихідну характеристику спрямованості (ХС), постійну для всіх кутів приходу сигналів (ізотропна ХС).

Істинне значення ВВК позначено $\vec{W}_{01}$, $\vec{W}_{02}$ – ізотропна ДС. Потужності корисного сигналу, завади і шума на вході ААР задовольняли співвідношенням: $P_c/\sigma_ш^2 = 13$ дБ, $P_з/\sigma_ш^2 = 40$ дБ.



а) б)

Рис. 6. Покрокові залежності ВСЗШ на виході 4-х елементної ААР для алгоритму МСКВ: а) при дії однієї завади ($\theta_1 = 15^0$) зі співвідношеннями – $P_c/\sigma_ш^2 = 13$ дБ, $P_з/\sigma_ш^2 = 40$ дБ; б) при дії двох завад ($\theta_1 = 15^0; \theta_2 = 45^0$) зі співвідношеннями – $P_{з1}/\sigma_ш^2 = 40$ дБ, $P_{з2}/\sigma_ш^2 = 34$ дБ



а) б)

Рис. 7. Покрокові залежності ВСЗШ на виході 4-х елементної ААР для алгоритму МВСЗ: а) при дії однієї завади ($\theta_1 = 15^0$) зі співвідношеннями – $P_c/\sigma_ш^2 = 13$ дБ, $P_з/\sigma_ш^2 = 40$ дБ; б) при дії двох завад ($\theta_1 = 15^0; \theta_2 = 45^0$) зі співвідношеннями – $P_{з1}/\sigma_ш^2 = 40$ дБ, $P_{з2}/\sigma_ш^2 = 34$ дБ

З аналізу розрахункових залежностей (рис. 6, рис. 7) випливає, що вибір $\vec{W}_0$ у вигляді (29) дозволяє не тільки істотно поліпшити перехідні характеристики алгоритмів, що на практиці також досить значно – до 4 дБ для чотирьохелементної АР збільшує можливе ВСЗШ.

Висновки

Відома значна кількість методів і алгоритмів синтезу ААР, що розрізняються як за призначенням, так і критеріями ефективності функціонування. В основу всіх методів покладена оцінка комплексного вектору вагових коефіцієнтів (ВВК), що включаються в трактах прийому кожного АЕ і керовані за тими чи іншими алгоритмами. Проведено огляд найбільш популярних методів синтезу ААР, до числа яких відно-

сяться алгоритми МСКВ, МВП, МВСЗ. Кожен із цих методів припускає знаходження оцінки вектору вагових коефіцієнтів, що включені на виході АЕ антенної решітки на основі кореляційної матриці (або її обігу) сигналів і завад, що характеризує діючу сигнально-завадову ситуацію. За допомогою критерію МСКВ можуть бути розроблені процедури, що мають рекурентну форму, наприклад, процедури стохастичної апроксимації, лінійної або нелінійної фільтрації, а також процедури Калмана-Б'юсі, зокрема, методи рекурентного обернення кореляційної матриці.

В результаті аналізу процедур на основі вибіркових оцінок показана допустимість ефективності рекурсивних процедур просторово-часової обробки, яка ґрунтується на тому, що обидва напрямки обробки мають загальне формулювання постановки рішення задачі та загальні критерії ефективності.

Більш конструктивними для використання в задачах ПЧД є рекурсивні процедури реалізації ПЧОС. Це дозволяє здійснювати корекцію ВВК у реальному масштабі часу, що особливо важливо для зв'язку з рухомими АС і змінними параметрами радіоканалу. Історично першим було запропоновано рішення ПЧОС Уідроу, що ґрунтується на оберненні вибіркової коваріаційної матриці прийнятих сигналів і завад. Методи Уідроу-Хоффа є відносно простими, проте для їх збіжності потрібно 50-150 кроків дискретизації, що для задач ПЧД може виявитися неприпустимим, оскільки саму задачу ПЧД необхідно завершити до часу надання послуги АС, тобто за $t \le 2 \div 5$ с. Це пов'язано з тим, що кроковий коефіцієнт μ у методі Уідроу-Хоффа з плином часу стрімко зменшується, а оновлююча інформація, що надходить, з кожним кроком, має все меншу вагу. Тому при динамічній СЗО кроковий коефіцієнт повинен розраховуватися в залежності від швидкості зміни цієї динаміки.

Таким чином, для оцінки вектору вагових коефіцієнтів антенної решітки запропоновано використання рекурсивної процедури Калмана-Б'юсі в просторі змінних стану. На відміну від відомих асимптотичних алгоритмів обробки сигналів, рекурсивний алгоритм Калмана-Б'юсі є оптимальним у динамічній, зокрема, нестаціонарній, завадово-сигнальній обстановці за показниками якості та швидкодії. Це дозволило досягти сталого режиму цієї обробки на інтервалі дії викличних сигналів, тобто за 3-10 кроків дискретизації без змін загальних режимів роботи мобільної мережі.

З процесу вирішення багатьох розрахункових завдань відомо, що ефективність самого рішення (швидкість збіжності, залишкові помилки та ін.) багато в чому визначаються вдалим вибором початкових умов. Апріорна інформація про напрямки приходу сигналу від АС у задачах просторового доступу необхідна як на висхідній ділянці для якнайшвидшого формування вагових коефіцієнтів ААР і супроводу кутового переміщення АС, так і на низхідній ділянці для синтезу адаптивної ДС АР у напрямку АС. Використання даного інформаційного параметра дозволяє поліпшити якість просторово-часового доступу: вдале налаштування значення ВВК, наближеного до оптимального значення, що забезпечує максимальне посилення корисного сигналу при повному заглушенні завади. Також забезпечується супровід сигналу АС при переміщеннях, встановлюється головна пелюстка діаграми спрямова-

ності АР у напрямку станції, яка здійснює виклик, прискорюється збіжність адаптивних алгоритмів антенної решітки, де інформація про напрямок використовується як початкові умови.

Найбільш важливим у задачі ПЧД обмеженням є вибір початкового значення ВВК ААР. У завданнях ПЧД швидкість збіжності алгоритму адаптації ААР відіграє принципову роль у тому сенсі, що всі процеси щодо організації ПЧД (виявлення сигналу виклику, визначення напрямку приходу, оцінка ВВК ААР, оцінка якості зв'язку та ін.) повинні завершитися за мінімальний час, що передує наданню самої послуги, запропонованої АС. Очевидно, вектор напрямку V_c^T має бути відомий заздалегідь або визначений методами оцінки напрямку приходу корисного сигналу. Це дасть можливість істотно покращити перехідні характеристики алгоритмів, що на практиці також досить помітно (до 4 дБ для чотирьохелементної АР) збільшить можливе ВСЗШ. Якість просторово-часової обробки сигналів зростає пропорційно числу АЕ. Для систем рухомого зв'язку можна рекомендувати алгоритми ААР, синтезовані на основі методів калманівської фільтрації формування ВВК з кількістю антенних елементів, що дорівнює 4 ...16.

Список літератури:

1. *Монзинго Р.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию. – Москва: Радио и связь, 1986. – 448 с.

2. *Баланис К.А., Иоанидес П.И.* Введение в смарт-антенны. – Москва: Техносфера, 2012. – 200 с.

3. *Коляденко Ю.Ю.* Анализ эффективности алгоритмов адаптивных антенных решеток в линиях сотовой связи // Радиотехника. Всеукр. меж вед. научн.-техн. сб. – 2006. – Вып. 144. – С. 172-181.

4. Электромагнитная доступность источников радиоизлучений. Учебное пособие / Под ред. В. В. Поповского. – Ленинград: ВАС, 1987. – 262 с.

5. *Коростелев А.А.* Пространственно-временная теория радиосистем: учебное пособие для вузов. – Москва: Радио и связь, 1987. – 320 с.

6. *Марков Г.Т., Сазонов Д.М.* Антенны. – Москва: Энергия, 1975. – 528 с.

7. *Вендик О.Г., Парнес М.Д.* Антенны с электрическим сканированием. – Москва: Радиотехника, 2001. – 352 с.

8. *Караваев В.В., Сазонов В.В.* Статистическая теория пассивной локации. – Москва: Радио и связь, 1987. – 240 с.

9. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – Москва: Радио и связь, 1981. – 416 с.

10. Пространственно-временная обработка сигналов / Под ред. И. Я. Кремера. – Москва: Радио и связь, 1984. – 224 с.

11. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов. – Москва: Радио и связь, 1989. – 440 с.

12. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. М. С. Ярлыкова. – Москва: Радиотехника, 2004. – 504 с.

13. *Родимов А.П., Поповский В.В.* Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех. – Москва: Радио и связь, 1984. – 272 с.

14. *Jovanović A., Lazović L., Rubežić V.* Adaptive Array Beamforming Using a Chaotic Beamforming Algorithm // Hindawi Publishing Corporation. International Journal of Antennas and Propagation. – Volume 2016. – Article ID 8354204. – P. 1-8. http://dx.doi.org/10.1155/2016/8354204.

15. *Shahab S.N., Zainun A.R., Ali H.A., Hojabri M., Noordin N.H.* MVDR algorithm based linear antenna array performance assessment for adaptive beamforming application // Journal of Engineering Science and Technology. – 2017. – Vol. 12, No. 5. – P.1366 – 1385.

16. *Senapati A., Roy J.S.* Adaptive Beamforming In Smart Antenna Usingt Chebyscheff Distribution And Variants Of Least Mean Square Algorithm // Journal of Engineering Science and Technology. – 2017. – Vol. 12, No. 3. – P.716-724.

17. *Singh H., Jha R.M.* Trends in Adaptive Array Processing // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Antennas and Propagation. – 2012, Article ID 361768. – P. 1-20. doi:10.1155/2012/361768.

18. *Sharma S.K., Patwary M., Chatzinotas S.* Multiple Access Techniques for Next Generation Wireless: Recent Advances and Future Perspectives // EAI Endorsed Transactions on Wireless Spectrum. – 2016. –Vol. 2, Issue 7. – P. 1-12.

19. *Song X., Wang F., Wang J., Ren J.* Robust Recursive Algorithm under Uncertainties via Worst-Case SINR Maximization // Journal of Electrical and Computer Engineering Volume. –2015. – Article ID 458521. – P. 1-8. http://dx.doi.org/10.1155/2015/458521.

20. *Flaksman A. G., Sorokin I. S., Ermolayev V. T.* Regularized estimate of the weight vector of an adaptive antenna array // Radiophysics and Quantum Electronics. – 2013. – Vol. 55, Issue 9. –P. 578–586. https://doi.org/10.1007/s11141-013-9395-3.