# Метод Відновлення Розривних Функцій Спеціального Вигляду з Використанням Проекцій і Скінченних Сум Фур'є

Олег М. Литвин
кафедра вищої та прикладної математики
Українська інженерно-педагогічна
академія
Харків, Україна
academ_mail@ukr.net

Олександра Литвин
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет
радіоелектроніки
Харків, Україна
litvinog@ukr.net

# The Method of Reconstructing Discontinuous Functions of a Special Form with the Use of Projections and Finite Fourier Sums

Oleg M. Lytvyn
Department of High and Applied Mathematics
Ukrainian engenering-pedagogical
academy
Kharkiv, Ukraine
academ_mail@ukr.net

Oleksandra Litvin
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
litvinog@ukr.net

***Анотація* — Досліджується метод наближення розривних функцій, що описують внутрішню структуру 2D тіла з допомогою проекцій, які поступають з комп'ютерного томографа. Пропонується використовувати розривні сплайни двох змінних для автоматичного знаходження ліній розриву та метод О. М. Литвина обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з допомогою періодичних розривних сплайнів однієї змінної і проекцій.**

***Abstract* — The method of approaching of bursting functions, which describe the underlying structure of 2D body with the help of projections which act from a computer tomograph, is probed. It is suggested to use bursting splines two variables for the automatic finding of lines of break and method of O. M. Lytvyn's calculation of coefficients of Fourier functions two variables with the help of periodic bursting splines of one variable and projections.**

***Ключові слова — комп'ютерна томографія, реконструкція, зображення, розривна функція, розривний сплайн, сума Фур'є***

***Keywords — computer tomography, reconstraction, image, discontinuous function, discontinuous spline, sum Fourier***

## I. ВСТУП

Як відомо [2, 3, 4], наближення розривних функцій однієї і багатьох змінних скінченними сумами Фур'є призводить до явища Гіббса. Це явище виникає також в комп'ютерній томографії [3, 4, 6]. Для цього випадку в працях Готліба і Густавсона [3, 4] наведені різні методи побудови скінченних сум Фур'є, коефіцієнти Фур'є у яких помножаються на визначені відповідним чином множники з метою зменшення впливу явища Гіббса на кінцевий результат. Використовуються також скінченні суми Фейєра [6], що має згладжувальний ефект, але не підвищення точності результату.

У даній роботі пропонується узагальнити метод, введений в роботах [1, 7] на випадок наближення розривних функцій двох змінних з використанням проекцій і скінченних сум Фур'є [2, 6] для одного конкретного випадку розривної наближуваної функції.

## II. Основні твердження

У даній роботі пропонуються явні формули для побудови розривних сплайнів від двох змінних, які мають розриви першого роду на границі системи вкладених одна в одну двовимірних областей $D_k,\ k=\overline{0,M}$, $D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_M$.

Досліджується метод використання розривних сплайнів для наближення розривних функцій двох змінних скінченними сумами Фур'є, у яких коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій, що поступають з комп'ютерного томографа.

Дано, що $D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_M \subset D = [0,1]^2$.

Невідома функція $f(x,y)$ є періодичною з періодом $l=1$ за змінною $x$ та періодом $l=1$ за змінною $y$ і має розриви першого роду на границях $\Gamma_k : w_k(x,y)=0$ областей $D_{k,k+1} : w_k(x,y) \ge 0, w_{k+1}(x,y) < 0, k=\overline{0,M}$.

Вважаємо, що:

$$f(x,y)=\begin{cases} f_0(x,y), w_0(x,y)<0, \\ f_1(x,y), w_0(x,y)\ge 0, w_1(x,y)<0, \\ \vdots \\ f_k(x,y), w_{k-1}(x,y)\ge 0, w_k(x,y)<0, \\ \vdots \\ f_M(x,y), w_M(x,y)\ge 0. \end{cases}$$

Для аналітичного зображення цієї функції використовуємо формулу:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left( f_0(x,y)+f_M(x,y)+ \right.$$
$$\left. +\sum_{k=0}^{M-1}\left(f_{k+1}(x,y)-f_k(x,y)\right)\frac{|w_k(x,y)|}{w_k(x,y)} \right).$$

Вона є узагальненням формули (1.9) з роботи [5, с. 8] на випадок двох змінних, коли розриви функції $f(x,y)$ задаються не на лініях $x-x_k=0$, а на лініях $\Gamma_k$.

Наступна функція $sp(x,y)$ має ті ж самі розриви першого роду, що і невідома функція $f(x,y)$.

$$sp(x,y)=\begin{cases} h_0(x,y), w_0(x,y)<0, \\ h_k(x,y), w_{k-1}(x,y)\ge 0, w_k(x,y)<0, \\ k=\overline{1,M}, \\ h_M(x,y), w_M(x,y)\ge 0, \end{cases}$$

де

$$h_0(x,y)=f_0^-(x,y),$$
$$h_k(x,y)=\frac{-f_{k-1}^+(x,y)w_k(x,y)+f_k^-(x,y)w_{k-1}(x,y)}{w_{k-1}(x,y)-w_k(x,y)},$$
$$k=\overline{1,M-1},$$
$$h_M(x,y)=f_M^+(x,y).$$

Тут

$$f_k^-(x,y)=\lim_{\substack{(u,v)\to(x,y) \\ w_k(u,v)<0, w_k(x,y)=0}} f(u,v),$$

$$f_k^+(x,y)=\lim_{\substack{(u,v)\to(x,y) \\ w_k(u,v)>0, w_k(x,y)=0}} f(u,v),\quad k=\overline{0,M-1}.$$

Це означає, що функція:

$$F(x,y)=f(x,y)-sp(x,y)$$

не буде мати розривів. Будемо її наближувати за допомогою скінченної суми Фур'є, коефіцієнти в якій обчислюються за допомогою проекцій методом, запропонованим в роботі [1].

Згідно з цим методом розв'язок задачі відшукується у вигляді суми Фур'є:

$$F(x,y)\approx S_{N,N}(x,y)=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}F_{k,l}e^{i2\pi(kx+ly)},$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою:

$$F_{k,l}=\iint_D F(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=$$
$$=\iint_D \left(f(x,y)-sp(x,y)\right)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy=$$
$$=\iint_D f(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy-\iint_D sp(x,y)e^{-i2\pi(kx+ly)}dxdy.$$

Зауважимо, що для обчислення першого інтеграла використовуються проекційні дані:

$$\int_{L_p} f(x,y)dl=\gamma_p,\ p=\overline{1,m},$$

які надходять з комп'ютерного томографа. А для другого інтеграла проекційні дані знаходяться безпосереднім обчисленням, оскільки вважається, що розривний сплайн побудовано у явному вигляді.

Для кращого розуміння запропонованого підходу наведемо приклад, у якому покажемо, як будується функція $sp(x,y)$.

Приклад. Введемо позначення.

$$w(x,y)=\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}.$$

Якщо лінії $w_k(x,y)=0, k=\overline{0,M-1}$ є колами $w_k(x,y)\equiv w(x,y)-r_k=0,\ k=\overline{0,M-1},$ тобто:

$$D_0: w(x,y)\le r_0,\dots,D_k: r_{k-1}\le w(x,y)\le r_k, k=\overline{1,M-1},$$
$$D_M: [0,1]^2\setminus\{w(x,y)\le r_{M-1}\},$$

то функції $f_k(x,y)$ будуть мати такі граничні властивості:

$$f_k^-(x,y)=f_k(r_k\cos\theta, r_k\sin\theta), k=\overline{0,M-1},$$
$$f_k^+(x,y)=f_{k+1}(r_k\cos\theta, r_k\sin\theta), k=\overline{0,M-1},$$
$$r\ge 0, 0\le\theta\le 2\pi.$$

Тут $r$ і $\theta$ координати точки $(x,y)$ у полярній системі координат з центром у точці $(0.5,0.5)$.

У цьому випадку у формулі для $sp(x,y)$ функції $h_k(x,y)$ будуть функціями змінних $r$ та $\theta$ і запишуться у вигляді:

$$h_0(x,y)=f_0(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta),\dots,$$
$$h_k(x,y)=$$
$$=f_k(r_{k-1}\cos\theta, r_{k-1}\sin\theta)\frac{w(x,y)-r_k}{r_{k-1}-r_k}+$$
$$+f_k(r_k\cos\theta, r_k\sin\theta)\frac{w(x,y)-r_{k-1}}{r_k-r_{k-1}}, k=\overline{1,M-1},$$
$$h_M(x,y)=f_M(r_{M-1}\cos\theta, r_{M-1}\sin\theta).$$

## III. Висновки

Таким чином, для випадку, коли відомі лінії розриву функції $f(x,y)$ та відомі односторонні границі функції $f_k(x,y)$ на лініях $\Gamma_k: w_k(x,y)=0$ у роботі запропоновано загальний метод наближення невідомої функції $f(x,y)$ за допомогою проекцій і скінченних сум Фур'є.

Для використання запропонованого методу до практики автори планують розробку та дослідження методу знаходження ліній розриву та односторонніх границь невідомої функції $f(x,y)$ на вказаних лініях.

Запропонований метод дозволяє уникнути явища Гіббса, бо функція:

$$F(x,y)=f(x,y)-sp(x,y)$$

немає розривів.

Для випадку, коли теоретичний вигляд структури досліджуваного зображення відомий, наприклад (структура організму людини у заданих площинах складається з кісток, м'язів тощо), автори пропонують для побудови $sp(x,y)$ використовувати сплайн-інтерлінацію та сплайн-інтерфлетацію функцій на основі розривних сплайнів [8].

Отже, запропонований метод є одним з ефективних підходів уникнення явища Гіббса, який виникає при наближенні сумами Фур'є розривних функцій двох змінних.

## Література References


[1] О. М. Литвин, «Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії» // *Системний аналіз, управління і інформаційні технологіїї: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту.* Збірка наукових праць. Випуск 125. Харків: ХДПУ, 2000. С. 27–35.

[2] О. М. Литвин, «Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних» // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ».* Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ». 2016. № 6(1178). С. 43–46.

[3] D. Gottlieb, C. W. Shu, «On the Gibbs Phenomenon and its Resolution» // *SIAM Review.* 1997. 39, № 4. P. 644–668.

[4] B. Gustafsson, «Mathematics for Computer Tomography» // *Physica Scripta.* 1996. T. 61. P. 38–43.

[5] О. М. Литвин, В. Л. Рвачов, Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування, К: Наукова думка, 1973. 123 с.

[6] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра» // *Інформатика та системні науки* (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10–12 березня 2016 р.). Полтава: ПУЕТ, 2016. С. 186–189.

[7] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Оптимізація кількості експериментальних даних у методі обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проекцій» // *Інформатика та системні науки* (ІСН-2017): матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. Полтава: ПУЕТ, 2017. С. 175–179.

[8] О. М. Литвин, Інтерлінація функцій та деякі її застосування, Харків: Основа, 2002. 544 с.