

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Разработаны принципы обобщения моделей линейного предсказания с учетом статистических связей высших порядков стационарных негауссовых процессов. Представлена теория обобщенных моделей авторегрессии. Получены выражения для вычисления параметров и основных характеристик модели. Показаны примеры синтеза обобщенных моделей авторегрессии с учетом статистических связей второго и произвольного порядка.

Случайный процесс полностью описывается либо полным набором многомерных плотностей распределения вероятностей, либо полным набором кумулянтных или моментных функций всех порядков. Анализ статистических связей случайного процесса, которые описываются, в частности, корреляционной функцией, позволяет решать методом линейного предсказания широкий круг задач, особенно прикладных. Использование моделей линейного предсказания дает возможность синтезировать обесцеляющие фильтры, решать задачу прогнозирования [1], получать параметрические спектральные оценки [2] и т.д. Несмотря на то, что корреляционные связи являются наиболее важными при описании случайных процессов, для решения ряда проблем статистического анализа негауссовых процессов следует учитывать статистические связи более высоких порядков, характеристиками которых являются кумулянтные или моментные функции [3-7].

В статье предложена обобщенная модель авторегрессии (ОАР) для описания негауссовых процессов. Обобщенная модель включает в себя как частный случай обычную модель авторегрессии и обладает ее конструктивными свойствами. Предложенная модель может найти применение в спектральном анализе, прогнозировании, при синтезе линейных устройств обработки негауссовых сигналов.

Негауссовы свойства случайных процессов вызваны наличием более сложных статистических связей, чем статистическая связь первого порядка, характеристикой которой является корреляционная функция. Статистические связи порядка $r-1$ описываются набором моментных функций порядка r [8].

Как будет показано ниже, модель ОАР строится на основе наборов моментных функций третьего порядка $m_3[j, j-l]$ для каждого сдвига l . Поэтому при построении обобщенных моделей возникает проблема выбора удобного и наглядного представления матричных выражений. Наиболее простым способом представления является использование привычных математических форм, применяемых при построении обычных моделей второго ранга. Для этого будут использоваться векторы-столбцы и двумерные матрицы. Однако при таком обозначении полагается, что уравнения получены для некоторого фиксированного значения индекса l . Значение l , равное $0, 1, 2, \dots$, выбирается, исходя из решаемой задачи и негауссовых свойств моделируемого процесса.

Модель ОАР третьего ранга для заданного l описывается уравнением

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] x[t-i] + a_3^l[t], \quad (1)$$

где $\Phi_3^l[i]$ – коэффициенты ОАР для индекса l ; p_l – порядок модели ОАР для индекса l ; $a_3^l[t]$ – ошибка предсказания модели для заданного l с нулевым средним, статистическая независимость которой характеризуется выражением $E\{a_3^l[t] a_3^l[t-j] a_3^l[t-l]\} = 0$ при $j, l \neq 0$. Домножив левую и правую части (1) на $x[t-j] x[t-l]$ и взяв математическое ожидание, имеем

$$E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\} = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]\} + E\{a_3^l[t]x[t-j]x[t-l]\}. \quad (2)$$

Учитывая, что

$$E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\} = m_3[j, j-l],$$

$$E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]\} = m_3[j-i, j-l], \quad (3)$$

$$E\{a_3^l[t]x[t-j]x[t-l]\} = 0, \quad \text{при } j, l \neq 0, \quad (4)$$

получим уравнение для вычисления коэффициентов ОАР

$$m_3[j, j-l] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_3[j-i, j-l], \quad 0 < j \leq p_l, \quad l > 0. \quad (5)$$

Умножив (1) на $x[t]x[t]$ и усреднив, получаем дополнительное выражение

$$m_3 = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_3[i, i] + m_{3a}^l, \quad (6)$$

где m_3 – момент третьего порядка случайного процесса; $m_3[i, i]$ – моментная функция; m_{3a}^l – момент третьего порядка ошибки предсказания для выбранного сдвига l . Уравнение (6) устанавливает связь между моментом третьего порядка случайного процесса $a_3^l[t]$ с моментной функцией m_{3a}^l , моментом m_3 случайного процесса $x[t]$.

Заметим, что в уравнении (5) два свободных индекса j и l . Поэтому вместо системы p уравнений, с помощью которой в уравнении Юла-Уокера получают $\Phi[i]$, имеем в общем случае $p_1 + p_2 + \dots + p_l$ уравнений, достаточных для определения трехмерной матрицы коэффициентов $\Phi_3^l[i]$ модели ОАР. Если зафиксировать l , то решение уравнения (5) сводится к определению вектора-столбца коэффициентов ОАР $\Phi_3^l[i]$, где верхний индекс l указывает, для какого значения фиксированного сдвига l получены коэффициенты ОАР.

В матричном виде уравнение (5) можно представить следующим образом:

$$\bar{m}_3^l = \Omega_3^l \bar{\Phi}_3^l, \quad (7)$$

где

$$\bar{m}_3^l = \begin{bmatrix} m_3[1, 1-l] \\ m_3[2, 2-l] \\ \vdots \\ m_3[p_l, p_l-l] \end{bmatrix}; \quad \bar{\Phi}_3^l = \begin{bmatrix} \Phi_3^l[1] \\ \Phi_3^l[2] \\ \vdots \\ \Phi_3^l[p_l] \end{bmatrix}. \quad (8)$$

При $l = 0$ моментная матрица имеет вид

$$\Omega_3^0 = \begin{bmatrix} m_3[0, 1] & m_3[-1, 1] & \dots & m_3[1 - p_0, 1] \\ m_3[1, 2] & m_3[0, 2] & \dots & m_3[2 - p_0, 2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_3[p_0 - 1, p_0] & m_3[p_0 - 2, p_0] & \dots & m_3[0, p_0] \end{bmatrix}. \quad (9a)$$

При $l = 1$ моментная матрица имеет вид

$$\Omega_3^1 = \begin{bmatrix} m_3[0,0] & m_3[-1,0] & \dots & m_3[1-p_1,0] \\ m_3[1,1] & m_3[0,1] & \dots & m_3[2-p_1,1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_3[p_1-1, p_1-1] & m_3[p_1-2, p_1-1] & \dots & m_3[0, p_1-1] \end{bmatrix}. \quad (96)$$

При произвольном $l = n$ моментная матрица имеет вид

$$\Omega_3^n = \begin{bmatrix} m_3[0,1-n] & m_3[-1,1-n] & \dots & m_3[-p_n+1,1-n] \\ m_3[1,2-n] & m_3[0,2-n] & \dots & m_3[-p_n+2,2-n] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_3[p_n-1, p_n-n] & m_3[p_n-2, p_n-n] & \dots & m_3[0, p_n-n] \end{bmatrix}. \quad (9B)$$

Если выборка $x[t]$ задана на интервале $1, N$, то оценки элементов матрицы Ω_3^l получают по формуле

$$m_3[i, j, l] = \frac{1}{J[i, j, l]} \sum_{t=1}^{J[i, j, l]} x[t+i]x[t+j]x[t+l], \quad (10)$$

где $J[i, j, l]$ – целое число, равное разности между N и максимальным значением из текущего набора индексов i, j, l . Чтобы получить системы уравнений для каждого l , необходимо приравнять элементы столбцов матрицы \bar{m}_3^l к скалярному произведению соответствующей строки и столбца матриц Ω_3^l и $\bar{\Phi}_3^l$. Необходимо отметить, что так как порядки p_l для каждого l могут быть разные, размеры столбцов в (9) также могут отличаться.

Как видно из (9), элементы матриц могут иметь отрицательные индексы, что несколько затрудняет оперирование с ними. Поэтому удобно воспользоваться правилом изменения индексов у дискретных моментных функций стационарного случайного процесса

$$m_r[s, l, \dots, n, k] = m_r[s-k, l-k, \dots, n-k, 0] = m_r[s-k, l-k, \dots, n-k]. \quad (11)$$

Свойство (11) позволяет всегда получить один из индексов равным нулю и при записи можно его опускать. Если нулевых индексов несколько, то будет опускаться только один индекс. При отрицательных индексах у моментных функций, как следует из (11), необходимо добавить к каждому из индексов целое положительное число, равное по модулю минимальному отрицательному индексу, то есть

$$m_r[s, -l, -w, \dots, k] = m_r[0, s+l, l-w, \dots, l+k] = m_r[s+l, l-w, \dots, l+k], \quad |l| > |w|. \quad (12)$$

Приведём несколько примеров уравнений для расчета коэффициентов ОАР модели третьего ранга первого порядка.

1. В случае произвольного l и $j = 1$ имеем

$$m_3[1, 1-l] = \Phi_3^l[1]m_3[0, 1-l] \quad (13a)$$

или

$$m_3[l, l-1] = \Phi_3^l[1]m_3[l-1, l-1]. \quad (136)$$

Представим несколько примеров получения систем уравнений для определения коэффициентов ОАР третьего ранга при $p = 2$.

2. При произвольном l и $j = 1, 2$ получим:

$$\begin{aligned} m_3[l, l-1] &= \Phi_3^l[1]m_3[l-1, l-1] + \Phi_3^l[2]m_3[l-2, l-1], \\ m_3[l, l-2] &= \Phi_3^l[1]m_3[l-1, l-2] + \Phi_3^l[2]m_3[l-2, l-2]. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнения (7) можно представить в матричном виде

$$\bar{\Phi}_3^l = (\Omega_3^l)^{-1} \bar{m}_3^l, \quad (15)$$

где векторы столбцы и моментная матрица определяются выражениями (8), (9). Возможность представления решения уравнения (4) набором решений (15) для разных l значительно упрощает задачу построения ОАР моделей. Такой подход также приводит к известным алгоритмам решения. Уравнения (15) близки по структуре к уравнениям Юла-Уокера и решаются аналогично.

Следует подчеркнуть, что использование верхних индексов в (5) у m_{3a}^l оправдывается тем, что в эти формулы могут входить в зависимости от выбранного l различные коэффициенты ОАР модели третьего ранга и отличающиеся моменты ошибок предсказания.

Соотношение (5) для первого порядка при произвольном l имеет вид

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] + m_{3a}^l. \quad (16)$$

При $p = 2$ получаем

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] + \Phi_3^l[2]m_3[2,2] + m_{3a}^l. \quad (17)$$

По аналогии с частной автокорреляционной функцией можно ввести частную моментную функцию произвольного ранга. Для модели ОАР третьего ранга в случае произвольного l эта функция будет иметь p_l ненулевых значений. При $p = 1, 2$ частные моментные функции третьего ранга равны

$$\Phi_3^l[1,1] = \frac{m_3[1,1-l]}{m_3[0,1-l]}, \quad (18a)$$

$$\Phi_3^l[2,2] = \frac{m_3[2,2-l]m_3[0,1-l] - m_3[1,2-l]m_3[1,1-l]}{m_3[0,2-l]m_3[0,1-l] - m_3[-1,1-l]m_3[1,2-l]}. \quad (18b)$$

Наборы значений $\Phi_3^0[1,1], \Phi_3^0[2,2], \dots, \Phi_3^0[p_1, p_1], \Phi_3^1[1,1], \Phi_3^1[2,2], \dots, \Phi_3^1[p_1, p_1], \dots, \Phi_3^l[1,1], \Phi_3^l[2,2], \dots, \Phi_3^l[p_l, p_l]$ являются частными моментными функциями модели ОАР третьего ранга.

Уравнение (1) можно представить как результат действия оператора ОАР третьего ранга

$$\Phi_3^l(B) = 1 - \Phi_3^l[1]B - \Phi_3^l[2]B^2 - \dots - \Phi_3^l[p]B^p \quad (19)$$

на случайный процесс $x[t]$, где B - оператор сдвига назад, $B^n x[t] = x[t-n]$. Процесс ОАР третьего ранга можно получить, действуя оператором $[\Phi_3^l(B)]^{-1}$ на порождающий процесс, то есть

$$x[t] = [\Phi_3^l(B)]^{-1} a[t]. \quad (20)$$

Отсюда ясно, что для получения стационарного процесса необходимо, чтобы корни характеристического уравнения

$$(c)^{p_l} - \Phi_3^l[1](c)^{p_l-1} - \dots - \Phi_3^l[p_l] = 0 \quad (21)$$

лежали в единичном комплексном круге. Эквивалентное условие стационарности состоит в том, чтобы корни уравнения

$$1 - \Phi_3^l[1]B - \Phi_3^l[2](B)^2 - \dots - \Phi_3^l[p_l] = 0 \quad (22)$$

лежали вне единичного комплексного круга. Таким образом, модель ОАР третьего ранга имеет набор характеристических уравнений (21) или (22) для каждого l соответственно.

Уравнение (4) представляет собой разностное уравнение вида

$$m_3[j, j-l] = \Phi_3^l[1]m_3[j-1, j-l] + \Phi_3^l[2]m_3[j-2, j-l] + \dots + \Phi_3^l[p_l]m_3[j-p_l, j-l]. \quad (23)$$

Так как индекс $j-l$ для данного уравнения фиксирован, то для него существует решение

$$m_3[j, j-l] = A^l[1](c^l[1])^{|j|} + A^l[2](c^l[2])^{|j|} + \dots + A^l[p_l](c^l[p_l])^{|j|}, \quad (24)$$

где $c^l[k]$ – корни соответствующего характеристического уравнения (21), $A^l[k]$ – постоянные, определяемые из начальных условий уравнения (23). В зависимости от значений корней моментная функция ОАР процесса может быть представлена суммой экспонент и экспоненциально затухающих синусоид.

Использование принципов обобщения моделей линейного предсказания позволяет построить модели ОАР, структура которых существенно не отличается от обычных моделей АР. Такой подход дает возможность избежать усложнения задачи синтеза обобщенных моделей, вызванного многомерностью моментных функций. С помощью изложенного способа построения модели довольно просто перейти от моделей ОАР третьего ранга к моделям более высоких рангов.

Список литературы: 1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 2. Марпл.–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с. 3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с. 4. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 5. Ширяев А.Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов. Теория вероятности и ее применение. 5. 3. С. 293 – 313. 6. Леонов В.П. Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 124 с. 7. Шелухин О.И. Беляев И.В. Негауссовские процессы. СПб.: Политехника, 1992. 312 с. 8. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. Радио, 1978. 376 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 28.02.2003