



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

ДИКАРЕВ В.А.

Предлагается метод преобразования системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной к системе с максимально возможным числом нулевых элементов её главной матрицы. Указываются условия, при выполнении которых поставленная задача может быть решена. Все используемые в работе матрицы допускают разложения в асимптотические ряды. Предполагается их голоморфность. Существенно используются результаты В.И. Арнольда.

1. Введение и постановка задачи

Исследованию при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений системы линейных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad (1)$$

где матрица $A(t, \varepsilon)$ – m -го порядка допускает разложение в асимптотический ряд

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \dots + \varepsilon^n A_n(t) + \dots, \quad (2)$$

посвящено много работ (см. например [1-4] и содержащуюся в них литературу). Один из способов решения этой задачи состоит в том, что ищется матрица $C(t, \varepsilon)$ с асимптотическим разложением

$$C(t, \varepsilon) = C_0(t) + \varepsilon C_1(t) + \dots + \varepsilon^n C_n(t) + \dots \quad (3)$$

такая, что замена $x = C(t, \varepsilon)y$ приводит систему (1) к виду

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = B(t, \varepsilon)y, \quad (4)$$

в которой матрица $B(t, \varepsilon)$ с асимптотическим разложением

$$B(t, \varepsilon) = B_0(t) + \varepsilon B_1(t) + \dots + \varepsilon^n B_n(t) + \dots \quad (5)$$

имеет более простой вид, чем $A(t, \varepsilon)$. Точнее, матрица $B(t, \varepsilon)$ имеет больше нулевых элементов, чем $A(t, \varepsilon)$, что может привести к тому, что система (3) будет распадаться на подсистемы низких порядков.

Целью работы является такое преобразование системы дифференциальных уравнений с малым параметром,

в результате которого получается система с максимально возможным числом нулевых элементов её главной матрицы.

Задача работы состоит в максимальном упрощении главной матрицы исследуемой системы.

Ниже предлагается такая замена (3), после реализации которой получаем систему (4) с максимально возможным числом нулевых элементов матрицы B_0 при заданной жордановой форме матрицы A_0 . В частности, наша теорема обобщает теорему о блок-диагонализации (см. [2,3,5]). Этот результат удаётся получить с помощью теоремы В.И. Арнольда [6] о нормальной форме семейства матриц, голоморфно зависящих от параметра. Дальнейшие построения носят локальный характер по t . Все матрицы вида (2), (3), (5) предполагаются аналитическими по t в окрестности точки $t = 0$ и по ε : $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma$, где Σ – некоторый сектор с центром в нуле, симметричный относительно вещественной оси. Асимптотические разложения вида (2), (3), (5) будем считать равномерными по t в окрестности точки $t = 0$.

2. Решение поставленной задачи

Используется результат В.И. Арнольда [6]. Пусть матрица $A(t)$ голоморфна по t в окрестности $t = 0$. Тогда существует невырожденная голоморфная матрица $R(t)$ такая, что $R^{-1}AR = B$, где матрица $B(t)$ имеет следующую структуру: $B(t) = B_0 + B_1(t)$. Здесь B_0 есть жорданова нормальная форма матрицы $A(0)$, а матрица $B_1(t)$ имеет блочно-диагональную форму, причём каждый блок $B_1(t)$ соответствует диагональному блоку B_0 , имеющему равные собственные значения. Чтобы описать структуру блока матрицы $B_1(t)$, допустим для упрощения нумерации столбцов и строк, что соответствующий блок B_0 расположен в верхнем левом углу B_0 и имеет жордановы клетки размера $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$. Тогда в рассматриваемом блоке матрицы $B_1(t)$ отличны от нуля лишь элементы, стоящие на пересечении строк и столбцов соответственно с номерами $n_1 + n_2 + \dots + n_j$, i_j . Здесь $i \leq j \leq k$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1} + 1 \leq i_j \leq n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Элементы матрицы $B_1(t)$ голоморфны по t в окрестности $t = 0$ и $B_1(0) = 0$.

Множество матриц $B_1(t)$, отвечающих фиксированной матрице B_0 , образует линейное подпространство M в пространстве E всех матриц m -го порядка. Размерность M равна размерности централизатора матрицы $A_0(0)$ (т.е. множества матриц, коммутирующих с $A_0(0)$). Обозначим $\dim M = d$.

Используем следующий факт, доказанный в [6].

А) Пусть $T_{A_0(0)}$ – линейный оператор в пространстве матриц E , определяемых равенством

$$T_{A_0(0)}(X) = A_0(0)X - XA_0(0).$$

Тогда M является прямым дополнением к образу оператора $T_{A_0(0)}$ в пространстве E .

Отметим, что ядро оператора $T_{A_0(0)}$ совпадает с централизатором матрицы $A_0(0)$. В частности, $\dim \text{Ker} T_{A_0(0)} = d$.

В) Образ оператора $T_{A_0(t)}$:

$$T_{A_0(t)}X = A_0(t)X - XA_0(t)$$

в сумме (вообще говоря не прямой) даёт всё пространство E .

Свойство В следует из А и полунепрерывности области значений оператора $T_{A_0(t)}$.

Докажем, что существует матрица $C = C(t, \varepsilon)$, имеющая асимптотическое разложение вида (3), такая, что после замены $x = Cy$ система (1) переходит в систему (4), матрица $B = B(t, \varepsilon)$ допускает асимптотическое разложение вида (5), $B_0(t)$ есть нормальная форма Арнольда матрицы $A_0(t)$, а $B_n(t)$ ($n \geq 1$) – аналитическая матрица и $B_n(t) \in M$.

Доказательство теоремы проведём в 2 этапа. Сначала сконструируем нормальные ряды (3) и (5), а затем построим матрицы C и B , обладающие требуемыми свойствами, для которых эти ряды являются асимптотическими.

1. Считаем, что матрица $A_0(t)$ уже приведена к нормальной форме Арнольда. Этого можно добиться с помощью преобразования $x = Ry$, где $R = R(t)$ – матрица, приводящая $A_0(t)$ к нормальной форме.

Будем искать C в виде ряда

$$C(t, \varepsilon) = I + \varepsilon C_1(t) + \dots + \varepsilon^n C_n(t) + \dots \quad (6)$$

В результате замены $x = Cy$ получим систему

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} C^{-1}(AC - \varepsilon C')y.$$

Обозначим матрицу этой системы через $B(t, \varepsilon)$. Имеем уравнение

$$\varepsilon C' = AC - CB. \quad (7)$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε в этом равенстве. Получим

$$B_0(t) = A_0(t),$$

$$B_n - (A_0 C_n - C_n A_0) = A_1 C_{n-1} + \dots + A_n - C'_{n-1} - C_{n-1} B - \dots - C_1 B_{n-1}. \quad (8)$$

Допустим, что нам уже известны матрицы $B_0 = A_0$, $B_1, \dots, B_{n-1}$, $C_0 = I$, $C_1, \dots, C_{n-1}$. Покажем, как определить B_n и C_n . Выберем в пространстве матриц E

линейное подпространство L размерности $m^2 - d$ такое, что $L \cap M = 0$, $L \cap \text{Ker} T_{A_0(0)} = 0$. В силу полунепрерывности $\text{Ker} T_{A_0(t)}$ при достаточно малых t справедливо также, что

$$L \cap \text{Ker} T_{A_0(t)} = 0. \quad (9)$$

Обозначим стоящую справа в (8) известную матрицу через $S = S(t)$. Тогда (8) переписывается в виде

$$B_n - \text{Ker} T_{A_0(t)}(C_n) = S.$$

В силу свойства В и (9) это уравнение однозначно разрешимо относительно B_n и C_n . Полученные матрицы B_n и C_n аналитичны по t , так как находятся в результате решения системы линейных уравнений, при котором производятся лишь рациональные операции над элементами A_0 и S . Построение формальных рядов (3) и (6) для матриц C и B на этом закончено.

2. Лемма 1 (см. [2, с. 65]). Пусть функция $a_k(t)$ $k = 0, 1, \dots$ голоморфна в T , где T – круг $|t| \leq t_0$, и пусть Σ – произвольный сектор вида $|\arg \varepsilon| \leq \alpha$, $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$. Тогда существует функция $f(t, \varepsilon)$, голоморфная по обоим переменным в $T \times \Sigma$, и такая, что имеет место равномерное в T асимптотическое представление

$$f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \varepsilon^k$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в Σ .

Используя лемму 1, построим матрицы $\tilde{C} = \tilde{C}(t, \varepsilon)$, $\tilde{B} = \tilde{B}(t, \varepsilon)$, для которых полученные формальные ряды (3) и (6) являются асимптотическими и, кроме того, $\tilde{B}(t, \varepsilon) - B_0(t) \in M$. Делая замену $x = Cy$, перейдём от системы (1) к системе

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \tilde{B}(t, \varepsilon)y, \quad (10)$$

причём матрица

$$\tilde{B} = \tilde{C}^{-1}(A\tilde{C} - \varepsilon \tilde{C}') \quad (11)$$

разлагается в асимптотический ряд по степеням ε , поскольку $\tilde{C}_0(t) = C_0(t) = I$.

Так как равенство (11) получается из (7) заменой C на $\tilde{C}$ и B на $\tilde{B}$, то коэффициенты асимптотического ряда для $\tilde{B}$ равны B_n .

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \hat{C}' = \hat{B}\hat{C} - \hat{C}B^{(1)}. \quad (12)$$

Лемма 2. Существуют матрицы $\hat{C}(t, \varepsilon)$ и $B^{(1)}(t, \varepsilon)$, удовлетворяющие (12), такие, что $\hat{C} - I = 0$, $B^{(1)} - \tilde{B} = 0$ и $B^{(1)} - B_0 \in M$.

Для доказательства леммы 2 нам потребуется

Лемма 3. Пусть $g(t, z, u)$ и $f(t, z, \varepsilon)$ суть N -мерные вектор-функции от комплексных переменных t и ε и от N -мерных комплексных векторов z и u . Предположим, что

а) $g(t, z, u)$ и $f(t, z, \varepsilon)$ голоморфны по совокупности переменных при $|t| \leq t_0$, $|z| \leq z_0$, $|u| \leq u_0$, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma$;

б) $f(t, z, \varepsilon)$ имеет асимптотическое разложение в ряд по степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma$, равномерное по t и z при $|t| \leq t_0$, $|z| \leq z_0$;

в) $g(0, 0, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0, 0, \varepsilon) = 0$. Матрицы Якоби

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right) \Big|_{u=t=z=0}, \quad (13)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \Sigma}} \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} - \frac{\partial g_j}{\partial z_k} \right) \Big|_{u=t=z=0} \quad (14)$$

невырождены. Здесь $f_j(t, z, \varepsilon)$ и $g_j(t, z, u)$, $j = 1, 2, \dots, N$ – компоненты f и g .

Тогда если дифференциальному уравнению

$$g(t, y, \varepsilon y') = f(t, y, \varepsilon) \quad (15)$$

формально удовлетворяет ряд $\sum_{r=1}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r$, коэффициенты которого голоморфны при $|t| \leq t_0$, то существует

решение $y = \varphi(t, \varepsilon)$ уравнения (15), определённое в области

$$|t| \leq t_1 \leq t_0, \quad 0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_0, \quad \varepsilon \in \Sigma^*,$$

и такое, что $\varphi(t, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty} y_r(t) \varepsilon^r$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma^*$ равномерно по t . Здесь Σ^* – некоторый подсектор сектора Σ .

Доказательство. Для случая $g(t, z, u) \equiv u$ эта лемма доказана в [2, с. 176]. Мы сведём лемму 2 к этому случаю. Покажем, что (15) можно разрешить относительно $\varepsilon y'$ при достаточно малых t , y , $\varepsilon y'$. Это следует из (13). Значит, уравнение (15) можно переписать в виде

$$\varepsilon y' = F(t, y, \varepsilon). \quad (16)$$

Далее матрица

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in \Sigma}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial z_k} \right) \Big|_{t=z=0}$$

невырожденная в силу (13) и (14). Сведение к указанному выше частному случаю имеет место при достаточно малых y и $\varepsilon y'$, а это условие выполнено, поскольку уравнение (16) имеет малое решение y при достаточно малом ε .

Доказательство леммы 2. Полагая $\hat{B} - \tilde{B} = B^{(2)}$, $B^{(1)} - \tilde{B} = B^{(3)}$, $\hat{C} = I + C^{(1)}$, перепишем (12) так:

$$\varepsilon C^{(1)} = \tilde{B} C^{(1)} - C^{(1)} \tilde{B} + B^{(2)} (I + C^{(1)}) - (I + C^{(1)}) B^{(3)}. \quad (17)$$

Введём в пространстве матриц E скалярное произведение по формуле

$$(A, B) = \text{sp}(AB^*).$$

Выберем базис Φ_j ($j = 1, 2, \dots, m^2 - d$) в ортогональном дополнении к M . Умножим обе части (17) слева на $(I + C^{(1)})^{-1}$ и скалярно домножим полученное таким образом равенство справа на Φ_j . Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon (I + C^{(1)}) C^{(1)}, \Phi_j &= ((\tilde{B} C^{(1)} - C^{(1)} \tilde{B}), \Phi_j) - \\ &- (C^{(1)} (I + C^{(1)})^{-1} (\tilde{B} C^{(1)} - C^{(1)} \tilde{B}), \Phi_j) + \\ &+ ((I + C^{(1)})^{-1} B^{(2)} (I + C^{(1)}), \Phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, m^2 - d, \end{aligned} \quad (18)$$

$B^{(3)} \in M$, поскольку $\tilde{B} - B_0 \in M$ по построению, а $B^{(1)} - B_0 \in M$ по требованию леммы. Поэтому члены $(B^{(3)}, \Phi_j) = 0$ в равенстве (18) опущены.

Будем искать вектор $C^{(1)}$, удовлетворяющий (18), в подпространстве L (напомним, что $\dim L = m^2 - d$). Тогда систему (18) можно рассматривать как уравнение вида (15) относительно вектора $C^{(1)} \in L$, $N = m^2 - d$.

Системе (18) формально удовлетворяет ряд для вектора $C^{(1)}$ по степеням ε с коэффициентами, равными нулю. Для того чтобы применить лемму 3, проверим невырожденность матриц (13) и (14). Вместо доказательства невырожденности этих матриц нам удобно будет доказать невырожденность соответствующих линейных форм, т.е. дифференциалов. Матрице (13) отвечает дифференциал $\delta g(t, z, u) \Big|_{t=z=u=0}$, где $z = C^{(1)}$, $u = \varepsilon C^{(1)}$, причём δt и $\delta C^{(1)}$ полагаем равными нулю:

$$\begin{aligned} \delta ((I + C^{(1)})^{-1} \varepsilon C^{(1)'}, \Phi_j) \Big|_{t=0, C^{(1)}=0, C^{(1)'}=0} &= \\ &= (\delta(\varepsilon C^{(1)'}), \Phi_j), \end{aligned} \quad (19)$$

где через $\delta(\varepsilon C^{(1)'})$ обозначим дифференциал $\varepsilon C^{(1)'}$. Если бы правая часть (19) равнялась нулю при $j = 1, \dots, m^2 - d$, то $\delta C^{(1)'} \in M$. Но $C^{(1)} \in L$, значит, $\delta C^{(1)'} \in L$, а $M \cap L = 0$.

Аналогичным образом матрице (14) отвечает предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ дифференциала

$$\delta f(t, z, \varepsilon) - g(t, z, u) \Big|_{t=z=u=0},$$

где $z = C^{(1)}$, $u = \varepsilon C^{(1)}$, причём $\delta t = \delta(\varepsilon C^{(1)})' = 0$. Этот предел равен

$$\begin{aligned} ((B_0(0)\delta C^{(1)} - \delta C^{(1)}B_0(0)), \Phi_j) = \\ = (T_{A_0(0)}(\delta C^{(1)}), \Phi_j), \end{aligned} \quad (20)$$

поскольку $B^{(2)} = 0$ и $B_0(0) = A_0(0)$. Если бы правая часть (20) была равна нулю при всех j , то величина $T_{A_0(0)}(\delta C^{(1)})$ принадлежала бы M , что невозможно согласно А. Следовательно, $\delta C^{(1)} \in \text{Ker} T_{A_0(0)}$, что противоречит условиям $\delta C^{(1)} \in L$, $L \cap \text{Ker} T_{A_0(0)} = 0$. Поэтому применима лемма 3, и уравнение (18) имеет решение $C^{(1)} = 0$. Из (17) теперь следует, что $B^{(3)} \in M$ и $B^{(3)} = 0$. Лемма 2 доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы. Сделаем в (10) замену $y = \hat{B}z$. Нетрудно видеть из (10), что z удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = B^{(1)}(t, \varepsilon)z. \quad (21)$$

Из леммы 2 теперь следует, что матрица $B^{(1)}$ обладает свойствами, которыми, согласно формулировке теоремы, должна обладать матрица B . Действительно, $B^{(1)} - \tilde{B} = 0$ и, значит, $B^{(1)}$ допускает разложение в асимптотический ряд (5) с найденными ранее коэффициентами $B_n(t)$. Кроме того, $B^{(1)} - B_0 \in M$. Матрица же преобразования $x = \tilde{C}\hat{C}z$, согласно лемме 2 разлагается в асимптотический ряд, стоящий справа в (6), поскольку $\hat{C} - I = 0$. Теорема доказана.

Предложенный в статье метод минимизации числа ненулевых элементов главной матрицы исследуемой системы применим и в случае, когда её коэффициенты являются случайными величинами.

3. Заключение

Научная новизна работы состоит в следующем: произведено преобразование исходной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, в результате которого главная матрица преобразованной системы имеет максимальное число нулевых элементов.

Практическая ценность работы заключается в том, что преобразованная система уравнений требует минимальных затрат машинного времени, поскольку главная матрица системы содержит максимальное число нулевых элементов.

Литература: 1. Агапова И.С., Дикарев В.А., Подгорбунский Н.С. Процесс глобальной блок-диагонализации матриц //Радиоэлектроника и информатика. 2007. №1. С. 24-29. 2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с. 3. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1966. 251 с. 4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с. 5. Sibuya Y. Sur un systeme des equations differentielles ordinaires lineaires a coefficients periodiques et contenant des parameters, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, (1), 7 (1954). 229-241. 6. Арнольд В.И. УМН, XXVI. 1971. Вып. 2 (158).

Поступила в редколлегию 22.05.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Дикарев Вадим Анатоліевич, д-р физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 343-57-03.