УДК 62.50

И. Б. СИРОДЖА, д-р техн. наук

АДАПТИВНЫЙ СТРУКТУРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ГРАММАТИКИ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ДВУХ ОБРАЗОВ

В работе [1] изложен структурно-аналитический (СА) метод распознавания образов по разнотипной эмпирической информации, позволяющий строить грамматические решающие правила в классе R-функций [2] с адаптирующейся к реальной среде структурой и преодолеть недостатки дискриминантных [3, 4], а также лингвистических [5] методов распознавания. Согласно СА-методу распознавания решающее правило или правило классификации (ПК) Ф находится путем восстановления стохастической [3] двузначной R-функциональной грамматики $G_R^{(2)}$ [1] по синтаксическому образцу (СО), получаемому в результате специальной обработки выборочной таблицы эмпирических данных (ТЭД) $Z_0 = \{x_{ij}\}$ $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$.

В статье предложен и обоснован адаптивный СА-алгоритм восстановления оптимальной $G_R^{(2)}$ для распознавания объектов двух классов K_1 и K_2, основанный на использовании метода стохастической аппроксимации в интерпретации Я. З. Цыпкина [3].

Пусть СО задан бинарной матрицей

$$S(m,\ M+1) = \{\vec{f}_1(\vec{x}_1),\ \Phi(\vec{f}_1);\ \ldots;\ \vec{f}_m)(\vec{x}_m)\Phi(\vec{f}_m)\} \qquad (1)$$

размером $(m \times M + 1)$, где

$$\vec{f}_i(\vec{x}_i) = (f_1(\vec{x}_i),\ f_2(\vec{x}_i),\ \ldots,\ f_M(\vec{x}_i)),\ (i = \overline{1, m}),\ \vec{x}_i \in X^n \qquad (2)$$

— вектор-строка СО (1), компоненты которой состоят из значений терминальных свойств-предикатов (С — П), заданной структурно полной системы

$$C = \{f_1(\vec{x}),\ \ldots,\ f_M(\vec{x})\}; \qquad (3)$$

$\Phi(\vec{f}_i) = \omega$, $(\omega = 0,\ 1)$ — значение ПК Ф для синтаксической строки $\vec{f}_i(\vec{x}_i)$ $(i = \overline{1, m})$, т. е. искомой двузначной функции, задающей разбиение пространства признаков X^n на два подмножества посредством С — П $f_j \in C$ $(j = \overline{1, M})$ **(3).**

Задача состоит в построении адаптивного алгоритма восстановления по синтаксическому образцу (1) ПК $\Phi(\vec{x}) \equiv G_R^{(2)}$ для образов K_1, $K_2 \in X^n$ в форме R-функции

$$\Phi(\vec{x}, \vec{c}) = \vec{c}^{\,\mathrm{T}} \vec{\varphi}(\vec{f}); \; S_2[\Phi(\vec{x}, \vec{c})] = \omega = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi > 0, \; \vec{x} \in K_1; \\ 0, & \text{если } \Phi \leqslant 0, \; \vec{x} \in K_2, \end{cases} \tag{4}$$

доставляющей минимум функционалу эмпирического риска

$$J(\vec{c}) = M_{\vec{f}} \{ | \omega - S_2[\vec{c}^{\,\mathrm{T}} \vec{\varphi}(\vec{f})] | \}, \tag{5}$$

где $M_{\vec{f}}$ — символ математического ожидания по f, соответствующий операции усреднения по строкам СО (1); $\vec{c}^{\,\mathrm{T}} = (c_1, \ldots, c_{N_c} \in \{0, 1\}$ — транспонированный вектор неопределенных коэффициентов в арифметическом аналоге полного разложения дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) булевой функции $F(X_1, \ldots, X_{N_c})$, сопровождающей R-функцию (4); $\vec{\varphi}(\vec{f}) = (\varphi_1(\vec{f}), \ldots, \varphi_{N_c}(\vec{f}))$ — вектор-функция членов указанного разложения, представленных двоичными комбинациями C_M^{ν}, $(\nu = 1, 2, \ldots, M)$ свойств-предикатов f_j $(j = \overline{1, M})$ системы C (3);

$$N_c = \sum_{\nu=1}^{M} 2^{\nu} C_M^{\nu}.$$

Такую задачу назовем U_1-задачей классификационной обработки данных (КОД).

Пусть полное разложение ДНФ логики структуры ПК $\Phi(\vec{x}, \vec{c})$ (4) имеет вид

$$\begin{gathered} F[S_2(f_1), \ldots, S_2(f_M)] = S_2[\Phi(\vec{x}, \vec{c})] = F(Z_1, \ldots, Z_M) = \\ = \vec{c}_1^{\,\bar{1}} \bar{Z}_1 V \vec{c}_2^{\,1} Z_1 V \ldots V c_{2M-1}^{\bar{M}} \bar{Z}_M V C_{2M}^{M} Z_M V c_{2M+1}^{\bar{1}\bar{2}} \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 V \ldots \\ \ldots V c_{2^2 C_M^2}^{(M-1)M} Z_{M-1} Z_M V \ldots V c_{N_c-1}^{12\ldots\bar{M}} Z_1 Z_2 \ldots \\ \ldots \bar{Z}_M V c_{N_c}^{12\ldots M} Z_1 Z_2 \ldots Z_M. \end{gathered} \tag{6}$$

Введем отрицание $\bar{S}_2$ предиката S_2 (4):

$$\bar{S}_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда, очевидно, справедливы равенства

$$F[S_2(f_1), \ldots, S_2(f_M)] = S_2[\Phi(\vec{x}, \vec{c})] = F(Z_1, \ldots, Z_M) =$$

$$
\begin{gathered}
= S_2 [c_1^{\bar{1}} \bar{S}_2 (f_1) + c_2^1 S_2 (f_2) + \ldots + c_{2M-1}^{\bar{M}} \bar{S}_2 (f_M) + c_{2M}^{M} S_2 (f_M) + \\
+ c_{2M+1}^{\bar{1}\bar{2}} \bar{S}_2 (f_1) S_2 (f_2) + \ldots + c_{2^2 2^2 c_M}^{(M-1)M} S_2 (f_{M-1}) S_2 (f_M) + \ldots \qquad (8) \\
\ldots + c_{N_c-1}^{12\ldots\bar{M}} S_2 (f_1) S_2 (f_2) \ldots \bar{S}_2 f_M) + c_{N_c}^{12\ldots M} S_2 (f_1) S_2 (f_2) \ldots \\
\ldots S_2 (f_M)] = S_2 [\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{\varphi} (\vec{f})] = \\
= S_2 \left[\sum_{i=1}^{N_c} C_i \varphi_i (\vec{f}) \right]; \quad \vec{f}^{\mathrm{T}} = (f_1, \ldots, f_M).
\end{gathered}
$$

Любую правую часть (8) назовем арифметическим аналогом логики структуры (6), поскольку здесь используются обычные операции сложения и умножения. Верхний индекс j при коэффициенте C_i^j указывает символический вид конъюнктивной комбинации С — П в i-м члене разложения (8) и может отсутствовать, а нижний индекс i — порядковый номер члена. Например, для синтаксического образца с $M = 2$ С — П f выражение (8) имеет вид

$$
\begin{gathered}
F [S_2 (f_1), S_2 (f_2)] = S_2 [c_1^{\bar{1}} \bar{S}_2 (f_1) + c_2^1 S_2 (f_2) + c_3^{\bar{2}} \bar{S}_2 (f_2) + \\
+ c_4^2 S_2 (f_2) + c_5^{\bar{1}\bar{2}} \bar{S}_2 (f_1) \bar{S}_2 (f_2) + C_6^{\bar{1}2} \bar{S}_2 (f_1) S_2 (f_2) + \\
+ C_7^{1\bar{2}} S_2 (f_1) \bar{S}_2 (f_2) + c_8^{12} S_2 (f_1) S_2 (f_2) = \\
= S_2 \left[\sum_{i=1}^{N_c=8} c_i \varphi_i (\vec{f}) \right].
\end{gathered}
$$

Очевидно, выражению (7) соответствует арифметическое равенство

$$
\bar{S}_2 (f) = 1 - S_2 (f). \qquad (9)
$$

Применяя адаптивный дискретный алгоритм Я. З. Цыпкина к уравнению

$$
\nabla_{\vec{c}} J(\vec{c}) = M_{\vec{f}} \{ \nabla_{\vec{c}} | \omega - S_2 [\vec{c}^{\mathrm{T}} \vec{\varphi} (\vec{f})] | \} = 0, \qquad (10)
$$

построенному на основе функционала (15), получаем адаптивный алгоритм для определения $\vec{c}$ в дискретах $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$
\begin{gathered}
\vec{c} [n] = \vec{c} [n-1] + \Gamma [n, \omega [n]] \; S_2 (\omega [n] - \\
- \vec{c} \vec{\varphi}^T (\vec{f} [n])) \; \vec{\varphi} (\vec{f} [n]), \qquad (11)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Gamma [n, \omega [n]] = \\
= \Gamma_1 [n] (1 - \omega [n]) + \Gamma_2 [n] \omega [n] = \begin{cases} \Gamma_1 [n], & \text{если } \omega [n] = 0; \\ \Gamma_2 [n], & \text{если } \omega [n] = 1. \end{cases} \qquad (12)
\end{gathered}
$$

Замечаем, что алгоритм (11) осуществляет адаптацию логики структуры ПК, поэтому назовем его сокращенно АДЛОГ.

В связи с астрономическим ростом числа N_c членов разложения (8) уже при $M \geqslant 10$ практическое использование алгоритма (11) затруднено. На практике для U_1-задач КОД вполне приемлемо значение $M \leqslant 20$. Поэтому в алгоритме АДЛОГ вместо всех N_c членов разложения (8) обрабатываются по этапам последовательно генерируемые M совокупностей членов $C_i\varphi_i(\vec{f})$ с определенным однородным типом комбинирования f_j, $(j=\overline{1,M})$ в эквивалентном разложении

$$\vec{c}^T\vec{\varphi}(\vec{f}) = \sum_{i=1}^{2^1C_M^1} c_i\varphi_i(\vec{f}) + \sum_{i=2^1C_M^1+1}^{2^2C_M^2} c_i\varphi_i(\vec{f}) + \ldots + \sum_{i=2^{M-1}C_M^{M-1}+1}^{2^MC_M^M} c_i\varphi_i(\vec{f}) \tag{13}$$

и со специальным упорядочиванием последнего по числу членов.

Опишем алгоритм АДЛОГ следующим образом.

Вход: синтаксический образец $S(m, M+1)$ с указаниями «учителя» ω, порог структурной сложности W_0^n и критерий качества $\eta\,(G_R^{(2)})$ [1].

Выход: ПК в форме R-функции (4), если ее структурная сложность не превышает порог W_0^n, в противном случае — ПК в виде грамматики $G_R^{(2)}$ с оценкой качества $\eta\,(G_R^{(2)})$.

Способ. На 1-м этапе генерируется совокупность членов разложения (13) с комбинацией по одному С — П f_j $(j=\overline{1,M})$, т. е. соответствующая первому слагаемому в (13). Последовательными итерациями на каждом этапе алгоритма (11) в две фазы обрабатываются синтаксические строки образца $S(m, M+1)$.

В 1-й фазе строится логика структуры ПК путем обработки $m' < m$ синтаксических строк с указаниями «учителя» $\omega = 0$. Для начальной итерации $(n=1)$ принимается $\vec{c}^T[n-1] = \vec{c}^T[0] = (1,1, \ldots, 1)$, чем обеспечивается первоначальная обработка при наличии всех $2M$ членов сгенерированной совокупности. Поскольку компоненты $c_i[n]$ неотрицательны, то в соответствии с (11) при $\omega = 0$ матрица (12) $\Gamma[n, \omega[n]] = \Gamma_1[n]$, где

$$\Gamma_1[n] = \begin{bmatrix} c_1[n-1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2[n-1] & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c_{2M}[n-1] \end{bmatrix}. \tag{14}$$

За m' итераций алгоритм (11) определит функцию $\vec{c}^T \vec{\varphi}(\vec{f})$ логики структуры с теми членами разложения, для которых

$$c_i[n] = 1 \quad (i = \overline{1,\ 2M}).$$

Во второй фазе (при необходимости) производится минимизация построенной логики структуры ПК путем обработки $m - m'$ синтаксических строк образца $S(m,\ M+1)$ с указаниями «учителя» $\omega = 1$. В начальной итерации $(n = 1)$ вектор $\vec{c}^T[n-1] = \vec{c}^T[0] = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, что соответствует началу с минимального (нулевого) числа членов разложения $\vec{c}^T \vec{\varphi}(\vec{f})$.

Чтобы с увеличением n функционал (5) убывал, алгоритм (11) при $\omega = 1$ должен содержать матрицу (12) $\Gamma[n,\ \omega[n]] = \Gamma_2[n]$, где

$$\Gamma_2[n] = \tag{15}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{S}_2[\vec{\varphi}_1(\vec{f}[n])] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{S}_2[\varphi_1(\vec{f}[n]) + \varphi_2(\vec{f}[n])] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_2\left[\sum\limits_{i=1}^{\hat{Z}} \varphi_i(\vec{f}[n])\right] \end{bmatrix}$$

$\hat{Z}$ — число членов разложения $\vec{c}^T \vec{\varphi}(\vec{f})$, обрабатывающихся во 2-й фазе данного этапа работы алгоритма.

Для экономии машинной памяти и временных затрат в конце 2-й фазы очередного этапа производится упорядочивание по числу членов разложения (8) на основе операции поглощения с учетом предыдущей структуры $\vec{c}^T \vec{\varphi}(\vec{f})$. Упорядочивание равносильно исключению из совокупности членов разложения (13), генерируемых для очередного этапа, тех слагаемых вида $\varphi_\nu(\vec{f}) = y\varphi_\mu(\vec{f})$ (y — любое сочетание С — П f_j, $(j = \overline{1,\ M})$, входящих в данное слагаемое), в которых содержатся слагаемые $\varphi_\mu(f)$, определенные на предыдущих этапах. В завершение каждого этапа полученное ПК проверяется на соответствие учебной выборке Z_0, т. е. на полное совпадение значений ПК в точках Z_0 указаниям «учителя» ω. Действия алгоритма АДЛОГ прекращаются на том этапе, в котором оказалось установленным соответствие найденного оптимального ПК выборке Z_0. ПК запоминается. Инвертируется столбец указаний «учителя» синтаксического образца $S(m,\ M+1)$, т. е. вместо $\omega = 0$ записывается $\omega = 1$, и повторяется полный цикл работы АДЛОГ.

Полученное ПК сравнивается с предыдущим по величине критерия структурной сложности [1]. Выдается менее сложное ПК, которое в случае превышения порога W_0^n преобразуется в оптимальную грамматику $G_R^{(2)}$ путем грамматической перегруппировки входящих в ПК С — П на основе критерия предпочтения С— П [1].

Докажем сходимость алгоритма АДЛОГ. Рассмотрим функционал

$$J_1(\vec{c}) = M_{\vec{f}}\{(\omega - S_2[\vec{c}^T\vec{\varphi}(\vec{f})])^2\}, \tag{16}$$

минимум которого соответствует минимуму функционала (5). В силу алгоритма (11) справедливо равенство

$$J_1(\vec{c}[n]) = J^1(\vec{c}[n-1] + \delta[n]). \tag{17}$$

Определим $\delta[n]$ путем подстановки $\vec{c}[n]$ и $\vec{c}[n-1]$ из (11) в (17):

$$\begin{aligned}\delta[n] = M_{\vec{f}}\{\Gamma[n,\ \omega[n]]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))^T\vec{\varphi}(\vec{f})[-2S_2(\omega[n] -\\ - \vec{c}^T[n-1]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))(\omega(\vec{f}) - \vec{c}^T[n-1]\vec{\varphi}(\vec{f})) +\\ + (\Gamma[n,\ \omega[n]]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))^T\vec{\varphi}(\vec{f})[S_2(\omega[n] -\\ - \vec{c}^T[n-1]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))^2]\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Покажем, что при всех n $\delta[n] \leqslant 0$, т. е. что функционал (16) не возрастает на итерациях алгоритма (11). Это и будет соответствовать доказательству сходимости АДЛОГ к одному из локальных экстремумов функционала (16). Используя представления матриц $\Gamma_1[n]$ (14) и $\Gamma_2[n]$ (15), получаем

$$\Gamma[n,\ \omega[n]]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) = \left\{\sum_{i=1}^{\hat{z}} c_i[n-1]\varphi_i(\vec{f}[n])\right\} \text{ при } \omega[n] = 0;$$

$$\left\{\varphi_i(\vec{f}[n]\bar{S}_2\left[\sum_{i=1}^{\hat{z}-1}\varphi_i(\vec{f}[n])\right]\right\} \text{ при } \omega[n] = 1. \tag{19}$$

При $\omega[n] = 1$ вектор (19) имеет вид $\Gamma = (\underbrace{0,\ 0,\ \ldots\ 0}_{r},\ 1,\ 0,\ \ldots 0)$,

где номер r соответствует первому по порядку номеру, при котором $\varphi_r(\vec{f}[n]) = 1$. Поэтому

$$\Gamma[n,\ \omega[n]]\vec{\varphi}(\vec{f}[n])\vec{\varphi}(\vec{f}) = \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\hat{z}} c_i[n-1]\varphi_i(\vec{f}[n])\varphi_i(\vec{f}) \text{ при } \omega[n] = 0,\\ \varphi_r(\vec{f}) \text{ при } \omega[n] = 1,\end{cases} \tag{20}$$

а) если $\omega[n] = 0$ и $\vec{c}^T[n-1]\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) = 0$, то $\delta[n] = 0$. Пусть теперь $\vec{c}^T[n-1]\vec{\varphi}(\vec{f}[n] \geqslant 1$. Очевидно, что для любого $f[n]$ число функций $\varphi_i(\vec{f}[n])$, обращающихся в «0» и в «1», не меньше числа единичных и соответственно нулевых компонент вектора $\vec{f}[n]$. Поэтому

$$\alpha[n] \equiv \sum_{i=1}^{Z} c_i[n-1]\,\varphi_i(\vec{f}[n])\,\varphi_i(\vec{f}) \leqslant \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}). \tag{21}$$

Учитывая (20) и (21), получаем

$$\delta[n] = M_{\vec{f}}\{\alpha[n][-2S_2(-\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))(\omega(\vec{f}) -$$

$$-\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f})) + \alpha[n] = M_{\vec{f}}\{\alpha[n][2(\omega(\vec{f}) - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}) +$$

$$+\alpha[n]) - \alpha[n]]\} \leqslant 0,$$

где $\omega(\vec{f}) - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}) + \alpha[n] \leqslant 0$;

б) если $\omega[n] = 1$ и $\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) = 1$, то $\delta[n] = 0$. Пусть $\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) > 1$. Случай равенства «0» исключен, поскольку вначале обрабатывались синтаксические строки с указаниями $\omega[n] = 0$ и $\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) = 0$. По этим же соображениям исключается и случай $\vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}) = 0$. Так как в 1-й фазе алгоритма перебираются все синтаксические строки с $\omega[n] = 0$ и $\vec{c}^T[0] = (1, 1, \ldots, 1)$, то после этого остается ненулевых компонент c_i больше, чем требуется в случае $\omega = 1$. Поэтому $\omega[n] - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]) < 0$ и $\omega(\vec{f}) - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}) < 0$.

Следовательно,

$$-2S_2(\omega[n] - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))(\omega(\vec{f}) - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f})) \leqslant -2;$$

$$0 \leqslant (\Gamma[n,\ \omega[n]]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))^T\vec{\varphi}(\vec{f})\,[S_2(\omega[n] - \vec{c}^T[n-1]\,\vec{\varphi}(\vec{f}[n]))]^2 =$$

$$= \varphi_r(\vec{f}) \leqslant 1,$$

т. е. $\delta[n] \leqslant 0$. Сходимость АДЛОГ доказана.

Алгоритм АДЛОГ реализован в языках ФОРТРАН-IV [1], АЛГОЛ-60 [6] и успешно используется для решения практических задач.

Список литературы: 1. *Сироджа И. Б.* Структурно-аналитический метод распознавания образов с разнотипными признаками. — Мат. методы анализа динам. систем, 1981, вып. 5, с. 91—107. 2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения.— К.: Наук. думка, 1982.— 550 с. 3. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающих систем. — М.: Наука, 1970. — 252 с. 4. *Дуда Р., Харт П.* Распознавание образов и анализ сцен. — М.: Мир, 1976. — 512 с. 5. *Фу К.* Структурные методы в распознавании образов.— М.: Мир, 1977. — 319 с. 6. *Сироджа И. Б., Голубь Н. Г.* Алгоритм поиска оптимальной логической структуры решающего правила. — Системы управления летательных аппаратов, 1977, вып. 3, с. 20—25.

Поступила в редколлегию 25.04.85.