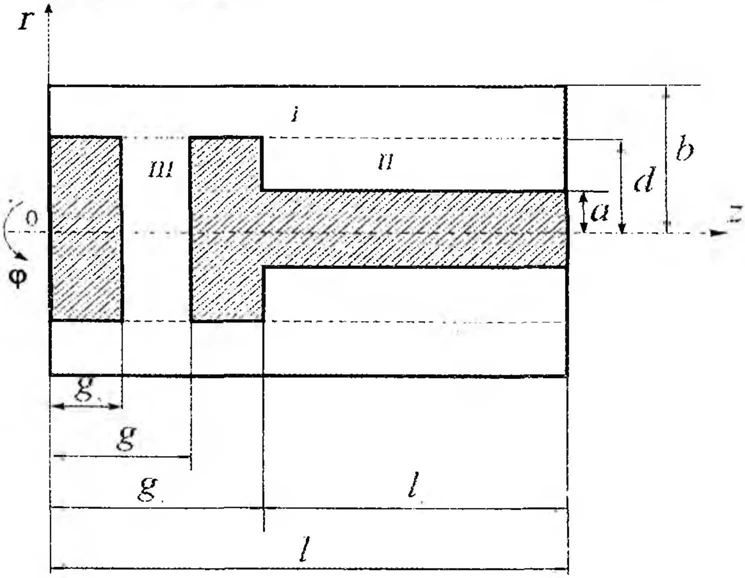
УДК 621. 372. 413 + 621.385.69

С. В. ЧУМАЧЕНКО

УРАВНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И КОМПОНЕНТЫ ПОЛЯ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА С ДВУМЯ НАСТРОЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический резонатор с двумя настроечными элементами. Один представляет собой стержень радиуса a и длины l_1, на конце которого закреплен диск радиуса d и толщины $g_1 - g$. Другой располагается на противоположной торцевой стенке навстречу и представляет собой стержень радиуса d и длины g_2. Объем изучаемой резонансной системы состоит из трех частичных областей (рисунок). Область I: $d \le r \le b, 0 \le z \le l$; область II: $a \le r \le d, g_1 \le z \le l$; область III: $0 \le r \le d, g_2 \le z \le g$.



Необходимо найти нетривиальные решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие следующим условиям: 1) касательные составляющие вектора электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящих стенках резонатора; 2) на границе раздела частичных областей электромагнитное поле непрерывно.

Требуется определить собственные частоты колебаний электрического типа и соответствующие этим частотам собственные поля.

Представления для потенциальных функций и компонентов поля. Для каждой частичной области потенциальные функции, которые являются решениями уравнения Гельмгольца, имеют вид

$$\Pi(r,z)=\begin{cases}\Pi_1(r,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n Z_n^I(p_n r)\cos\left(\dfrac{\pi n}{l}z\right), & d\le r\le b,\ 0\le z\le l;\\ \Pi_2(r,z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m B_m Z_m^{II}(q_m r)\cos\left(\dfrac{\pi m}{l_1}(z-g_1)\right), & a\le r\le d,\ g_1\le z\le l;\\ \Pi_3(r,z)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s C_s J_0(f_s r)\cos\left(\dfrac{\pi s}{g-g_2}(z-g_2)\right), & 0\le r\le d,\ g_2\le z\le g,\end{cases}\tag{1}$$

где

$$Z_n^I(p_n r)=J_0(p_n r)N_0(p_n b)-J_0(p_n b)N_0(p_n r);$$

$$Z_m^{II}(q_m r)=J_0(q_m r)N_0(q_m a)-J_0(q_m a)N_0(q_m r);$$

$$p_n=\sqrt{k^2-(\pi n/l)^2};\quad q_m=\sqrt{k^2-(\pi m/l_1)^2};$$

$$f_s=\sqrt{k^2-(\pi s/(g-g_2))^2};$$

k — собственные числа; $\varepsilon_j(j=n,m,s)$ — число Неймана.

Собственные числа k подлежат отысканию.

Необходимо отметить, что при условиях

$$p_n^2<0;\ q_m^2<0,\ f_s^2<0$$

имеют место соотношения

$$p_n=-ip_n'=-i\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2-k^2};$$

$$q_n=-iq_m'=-i\sqrt{\left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2-k^2};$$

$$f_s=-if_s'=-i\sqrt{\left(\frac{\pi s}{g-g_2}\right)^2-k^2};$$

Тогда функции $Z_n^I(p_n r), Z_m^{II}(q_m r)$ и $J_0(f_s r)$ выражаются через модифицированные функции Бесселя и Неймана

$$Z_n^I(p_n r) = -\frac{2}{\pi} e^{-i\pi n/2}\left[I_0(p_n' r)K_0(p_n' b) - (-1)^n I_0(p_n' b)K_0(p_n' r)\right];$$

$$Z_m^{II}(q_m r) = -\frac{2}{\pi} e^{-i\pi n/2}\left[I_0(q_m' r)K_0(q_m' a) - (-1)^n I_0(q_m' a)K_0(q_m' r)\right];$$

$$J_0(f_s r) = (-1)^n e^{-i\pi n/2} I_0(f_s' r).$$

Компоненты полей в каждой из частичных областей вычисляются по известным формулам с помощью (1) и имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
E_z^I(r,z) &= \frac{1}{i\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n p_n^2 Z_n^I(p_n r)\cos\left(\frac{\pi n}{l}z\right);\\
E_r^I(r,z) &= \frac{2\pi}{i\omega l}\sum_{n=0}^{\infty} n A_n p_n Z_n^{I'}(p_n r)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right);\\
H_\varphi^I(r,z) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n p_n Z_n^{I'}(p_n r)\cos\left(\frac{\pi n}{l}z\right);
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
E_z^{II}(r,z) &= \frac{1}{i\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_m B_m q_m^2 Z_m^{II}(q_m r)\cos\left(\frac{\pi m}{l_1}(z-g_1)\right);\\
E_r^{II}(r,z) &= -\frac{2\pi}{i\omega l_1}\sum_{m=1}^{\infty} m B_m q_m Z_m^{II'}(q_m r)\sin\left(\frac{\pi m}{l_1}(z-g_1)\right);\\
H_\varphi^{II}(r,z) &= -\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m B_m q_n Z_m^{II'}(q_m r)\cos\left(\frac{\pi m}{l_1}(z-g_1)\right);
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned}
E_z^{III}(r,z) &= \frac{1}{i\omega}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s C_s f_s^2 J_0(f_s r)\cos\left(\frac{\pi s}{g-g_2}(z-g_2)\right);\\
E_r^{III}(r,z) &= \frac{-2\pi}{(g-g_2)i\omega}\sum_{s=1}^{\infty} s\cdot C_s f_s^2 J_0'(f_s r)\sin\left(\frac{\pi s}{g-g_2}(z-g_2)\right);\\
H_\varphi^{III}(r,z) &= -\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s C_s f_s\, J_0'(f_s r)\cdot\cos\left(\frac{\pi s}{g-g_2}(z-g_2)\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Для трех частичных областей на границе их раздела должны выполняться следующие условия

$$H_\varphi^I(r,z) = \begin{cases} H_\varphi^{II}, g_1 \le z \le l;\\ H_\varphi^{III}, g_2 \le z \le g; \end{cases} \qquad (5)$$

$$E_z^I(r,z)=\begin{cases}E_z^{II},g_1\le z\le l,\\ 0,\ 0\le z\le g_2, g\le z\le g_1;\\ E_z^{III}(r,z), g_2\le z\le g.\end{cases}$$

Определение неизвестных коэффициентов. Подчиняя компоненты поля (2)—(4) граничным условиям (5), получаем формулы для вычисления неизвестных коэффициентов B_m и C_s, а также бесконечную однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n

$$B_m=\frac{1}{l_1 q_m Z_m^{II}{}'(q_m d)}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n p_n Z_n^{I}{}'(p_n d) i_2(n,m),\ m=0,1,2,\ldots;$$

$$C_s=\frac{1}{(g-g_2)f_s J_0'(f_s d)}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n p_n Z_n^{I}{}'(p_n d)\cdot i_1(n,s);$$

$$\begin{aligned}&A_n l p_n^2 Z_n^I(p_n d)-\\&-4\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\frac{q_m Z_m^{II}(q_m d)}{l_1 Z_m^{II}{}'(q_m d)}i_2(n,m)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j A_j p_j Z_j^{I}{}'(p_j d) i_2(j,m)-\\&-\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s\frac{f_s J_0(f_s d)}{(g-g_2)J_0'(f_s d)}i_1(n,s)\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon_j A_j p_j Z_j^{II}{}'(p_j d) i_1(j,s)=0,\\&n=0,1,2,\ldots;\end{aligned}\tag{6}$$

$$i_1(n,s)=\frac{nl(g-g_2)^2}{\pi\left(s^2l^2-n^2(g-g_2)^2\right)}\sin\left(\frac{\pi n}{l}g_2\right);$$

$$i_2(n,m)=\frac{nl_1^2 l}{\pi\left(m^2l^2-n^2l_1^2\right)}\sin\left(\frac{\pi n g_1}{l}\right).$$

Собственные значения. Из условия существования и единственности решения СЛАУ (6) следует дисперсионное уравнение относительно собственных частот k рассматриваемого резонатора [1]

$$\begin{aligned}&\det\{\delta_{ni} l p_i^2 Z_i^I(p_i d)-p_i Z_i^I(p_i d)S_{ni}-p_i Z_i^{I}{}'(p_i d)K_{ni}\}=0,\\&n=0,1,2,\ldots;\quad i=0,1,2,\ldots,\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$S_{ni}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\frac{q_m Z_m^{II}(q_m d)}{l_1 Z_m^{II\prime}(q_m d)}i_2(n,m)i_2(i,m);$$

$$K_{ni}=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon_s\frac{f_s J_0(f_s d)}{(g-g_2)J_0'(f_s d)}i_1(n,s)i_1(i,s).$$

Случай малости геометрического параметра. В случае малости геометрического параметра $\theta=\frac{g-g_2}{l}<<1$ в системе (6) в бесконечных суммах по m и s удерживается только по одному слагаемому с номерами $m=0$ и $s=0$ соответственно. Путем несложных преобразований [2] выводятся следующие формулы для вычисления коэффициентов A_n, B_m, C_s:

$$A_n=A_0\left(V_n+G_nW+\hat{G}_n\hat{W}\right), n=1, 2, 3,...; \qquad (8)$$

$$B_m=\frac{2A_0}{l_1 q_m Z_m^{II\prime}(q_m d)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n+G_nW+\hat{G}_n\hat{W}\right)p_n Z_n^{I\prime}(p_n d)i_2(n,m); \qquad (9)$$

$$C_s=\frac{2A_0}{(g-g_2)f_s J_0'(f_s d)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n+G_nW+\hat{G}_n\hat{W}\right)p_n Z_n^{I\prime}(p_n d)\,i_1(n,s). \qquad (10)$$

Составляющие W, $\hat{W}$ находятся из выражений

$$W=\frac{c_1}{c_3}+\frac{c_2}{c_3}\frac{c_3c_4+c_1c_5}{c_3c_6-c_2c_5};\quad \hat{W}=\frac{c_3c_4+c_1c_5}{c_3c_6-c_2c_5},$$

где

$$c_1=\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}V_kW_k;\quad c_2=\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\hat{G}_k\hat{W}_k;\quad c_3=1-\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}G_kW_k;$$

$$c_4=\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}V_k\hat{W}_k;\quad c_5=\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}G_k\hat{W}_k;\quad c_6=1-\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\hat{G}_k\hat{W}_k;$$

$$V_k=\left(\frac{p_0q_0Z_0^{I\prime}(p_0d)Z_0^{II}(q_0d)}{Z_0^{II\prime}(q_0d)}i_2(k,0)+\frac{f_0p_0Z_0^{I\prime}(p_0d)J_0(f_0d)}{J_0'(f_0d)}i_1(k,0)\right)T_k;$$

$$W_k=p_kZ_k^{I\prime}(p_kd)i_2(k,0);\quad \hat{W}_k=p_kZ_k^{I\prime}(p_kd)i_1(k,0);$$

$$G_k = \frac{2q_0 Z_0^{II}(q_0 d)}{l_1 Z_0^{II\prime}(q_0 d)} i_2(k,0) T_k ;\ \hat{G}_k = \frac{2 f_0 J_0(f_0 d)}{(g - g_2) J_0'(f_0 d)} i_1(k,0) T_k ;$$

$$T_k = \left(l p_k^2 Z_k^I(p_k d) - \frac{2q_0 Z_0^{II}(q_0 d)}{l_1 Z_0^{II\prime}(q_0 d)} p_k Z_k^{I\prime}(p_k d) i_2^2(k,0) - \right.$$

$$\left. - \frac{2 f_0 J_0(f_0 d)}{(g - g_2) J_0'(f_0 d)} p_k Z_k^{I\prime}(p_k d) \cdot i_1^2(k,0) \right)^{-1} .$$

Представления для компонентов полей (2)—(4) с учетом выражений для коэффициентов (8)—(10) принимают вид

$$E_{rI}^{(n)}(r,z) = -\frac{2\pi A_0}{i\omega l} \sum_{j=1}^{\infty} j \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I\prime}(p_{jn} r) \sin\left(\frac{\pi j}{l} z\right);$$

$$E_{zI}^{(n)}(r,z) = \frac{2A_0}{i\omega} \sum_{j=1}^{\infty} p_{jn}^2 \widetilde{E}_{jn} Z_j^I(p_{jn} r) \cos\left(\frac{\pi j}{l} z\right);$$

$$H_{\varphi I}^{(n)}(r,z) = -2A_0 \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I\prime}(p_{jn} r) \cos\left(\frac{\pi j}{l} z\right);$$

$$E_{rII}^{(n)}(r,z) \cong -\frac{2\pi U_n^E A_0}{i\omega l_1^2} \frac{Z_1^{II\prime}(q_{1n} r)}{Z_1^{II\prime}(q_{1n} d)} \sin\left(\frac{\pi}{l_1}(z - g_1)\right);$$

$$E_{zII}^{(n)}(r,z) \cong \frac{2A_0}{i\omega l_1} \frac{U_n^E q_{1n} Z_1^{II}(q_{1n} r)}{Z_1^{II\prime}(q_{1n} d)} \cos\left(\frac{\pi}{l_1}(z - g_1)\right);$$

$$H_{\varphi II}^{(n)}(r,z) \cong -\frac{2A_0}{l_1} \frac{U_n^E Z_1^{II\prime}(q_{1n} r)}{Z_1^{II\prime}(q_{1n} d)} \cos\left(\frac{\pi}{l_1}(z - g_1)\right);$$

$$E_{rIII}^{(n)}(r,z) \cong -\frac{2\pi A_0}{i\omega (g - g_2)^2} \frac{\Theta_n^E J_0'(f_{1n} r)}{J_0'(f_{1n} d)} \sin\left(\frac{\pi}{g - g_2}(z - g_2)\right);$$

$$H_{\varphi III}^{(n)}(r,z) = -\frac{2A_0}{g - g_2} \Theta_n^E \frac{J_0'(f_{1n} r)}{J_0'(f_{1n} d)} \cos\left(\frac{\pi}{g - g_2}(z - g_2)\right);$$

$$E_{zIII}^{(n)}(r,z) \cong \frac{2A_0\Theta_n^E f_{1n} J_0(f_{1n}r)}{i\omega(g-g_2)J_0'(f_{1n}d)} \cos\left(\frac{\pi}{g-g_2}(z-g_2)\right);$$

$$U_n^E = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I}{}'(p_{jn}d) i_2(j,1); \quad \Theta_n^E = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{E}_{jn} p_{jn} Z_j^{I}{}'(p_{jn}d) i_1(j,1),$$

$$\widetilde{E}_{jn} \equiv V_j + G_j W + \hat{G}_j \hat{W}.$$

Из условия нормировки полей определяется множитель A_0:

$$|A_0|^2 = \frac{V}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_1(j,n)\left|\widetilde{E}_{jn}\right|^2 \cdot \left|p_{jn}\right|^2 + \frac{c_2\left|U_n^E\right|^2}{l_1 \cdot \left|Z_1^{II}{}'(q_{1n}d)\right|^2} + \frac{c_3\left|\Theta_n^E\right|^2}{(g-g_2)\left|J_0'(f_{1n}d)\right|^2}\right)},$$

где

$$c_1(j,n) = \int_a^b r Z_j^{I}{}'(p_{jn}r) Z_j^{I}{}'^{*}(p_{jn}r) dr;$$

$$c_2 = \int_a^b r Z_1^{II}{}'(q_{1n}r) Z_1^{II}{}'^{*}(q_{1n}r) dr; \quad c_3 = \int_0^d r J_0'(f_{1n}r) J_0'^{*}(f_{1n}r) dr.$$

Индекс n всюду указывает на номер соответствующего собственного числа k.

Итак, решена граничная задача на собственные значения для рассматриваемого резонатора. Получено дисперсионное уравнение, из которого определяются собственные частоты резонатора. Записаны представления для компонентов электромагнитного поля. Проведены вычисления при наличии малости геометрического параметра: найдены выражения для неизвестных коэффициентов и получена формула для вычисления нормирующего множителя. Представление поля в виде (1) позволяет точнее определить значение резонансного волнового числа k при $g - g_2 \sim l$.

Список литературы: 1. *Исследование* спектра собственных частот магнитных типов колебаний в цилиндрическом резонаторе с коаксиальным кольцевым выступом / А.А. Кириленко, С.А. Масалов, В.П. Шестопалов, В.Ф. Шинкаренко. Х., 1974. 53 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т радиофизики и электрон.; 37). 2. *Третьяков О.А., Чумаченко С. В.* Колебания в резонаторе с нестационарным диэлектриком // Радиофизика и радиоастрономия. 1997. Т. 2, № 2. С. 220—229.

Харьковский государственный университет

Поступила в редколлегию 14.04.98