УДК 519.6:514.1

ОСОБЕННОСТИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

ЕВСЕЕВА Л.Г, РОМАНОВА Т.Е., СЫСОЕВА Ю.А.

Предлагается подход к учету погрешностей исходных данных при построении математической модели комбинаторной оптимизационной задачи размещения прямоугольников на основе приложения элементов теории интервального анализа в геометрическом проектировании.

Рассмотрим оптимизационную задачу геометрического проектирования [1] в следующей постановке.

Пусть имеется множество прямоугольников T_i, $i \in J_n = \{1,2,...,n\}$, длины a_i^0, $i \in J_n$, ширины b^0, заданные с исходными погрешностями $\nu_{a_i}^0$, $i \in J_n$, $\nu_{b_i}^0$, $i \in J_n$ по длине и ширине; полоса Ω^0 ширины w^0 с соответствующими погрешностями ν_l^0, ν_w^0 по длине и ширине.

Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что выполняются соотношения:

$$0 \le \nu_{a_i} \le \varepsilon \cdot a_i^0,\ 0 \le \nu_{b_i}{}^0 \le \varepsilon \cdot b^0,\ i \in J_n,$$
$$0 \le \nu_l{}^0 \le \varepsilon \cdot l^0,\ 0 \le \nu_w^0 \le \varepsilon \cdot w^0,$$

где $\varepsilon \in (0,1) \subset R^1$ характеризует точность задания исходных данных, зависящую от конкретной прикладной или научной задачи.

Необходимо разбить полосу на конечное число горизонтальных полос и разместить в них множество прямоугольников таким образом, чтобы длина l занятой части полосы с учетом ее погрешности ν_l была минимальной.

В отличие от других работ, посвященных моделированию комбинаторной оптимизационной задачи размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных [2], в этой работе используются понятия интервального касания выпуклых интервальных многоугольников, интервального расстояния между выпуклыми интервальными многоугольниками. Кроме того, данная задача рассматривается как двухкритериальная задача минимизации.

Пусть x_i, y_i — координаты полюса [3] прямоугольника T_i, $i \in J_n$; ν_{x_i}, ν_{y_i}, $i \in J_n$ — погрешности координат x_i, y_i соответственно.

Рассмотрим расширенное пространство центрированных интервалов [4]:

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \left\{ \langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \middle| x = \frac{1}{2}(c+d), \right.$$
$$\left. \nu_x = \frac{1}{2}(c-d), c, d \in R^1 \right\}.$$

Поскольку арифметическое евклидово пространство R^2 и интервальное пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ изометричны [4], зададим биекцию между элементами этих пространств вида

$$\begin{gathered}\left(a_i^0, \nu_{a_i}^0\right) \leftrightarrow \left\langle a_i^0, \nu_{a_i}^0 \right\rangle = \left\langle A_i^0 \right\rangle,\ i \in J_n,\\ \left(b^0, \nu_{b_i}^0\right) \leftrightarrow \left\langle b^0, \nu_{b_i}^0 \right\rangle = \left\langle B_i^0 \right\rangle,\ i \in J_n,\\ \left(w^0, \nu_w^0\right) \leftrightarrow \left\langle w^0, \nu_w^0 \right\rangle = \left\langle W^0 \right\rangle,\end{gathered} \quad (1)$$

где $(x, \nu_x) \in R^2$, $\langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Из постановки задачи следует, что справедливы интервальные неравенства [5]:

$$\left\langle A_i^0 \right\rangle \ge \langle 0 \rangle,\ \left\langle B_i^0 \right\rangle \ge \langle 0 \rangle,\ \left\langle W^0 \right\rangle \ge \langle 0 \rangle,\ i \in J_n.$$

В качестве математической модели прямоугольника T_i, длины a_i^0 и ширины b^0, с исходными погрешностями $\nu_{a_i}^0$, $\nu_{b_i}^0$, рассматриваем интервальный прямоугольник [6] $\mathbf{T}_i$ в двумерном интервальном пространстве $\mathbf{I}_s^2\mathbf{R} = \mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [7].

Аналогично, в качестве математической модели области размещения Ω^0 ширины w^0, имеющей исходные погрешности ν_l^0, ν_w^0, рассматриваем интервальную полосу $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ [3].

Тогда поставленную задачу можно представить как оптимизационную задачу размещения интервальных прямоугольников в интервальной полосе.

Не нарушая общности рассуждений и учитывая (1), полагаем, что множество $\left\{\left\langle B_i^0 \right\rangle\right\}, i = 1,...,n$ ранжировано в соответствии с отношением порядка, введенным в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [5]:

$$\left\langle B_i^0 \right\rangle \ge \left\langle B_{i+1}^0 \right\rangle:$$
$$\begin{cases} b_i^0 = b_{i+1}^0 \\ \nu_{b_i}^0 \ge \nu_{b_{i+1}}^0 \end{cases},\ i \in J_{n-1}.$$

Для решения поставленной задачи прежде всего, определим число k интервальных полос $\mathbf{P}_j$, на которые можно разделить интервальную полосу $\mathbf{\Omega}$ так, чтобы:

1) $\mathbf{P}_j \cap \mathbf{P}_{j+1} = \mathbf{fr}\ \mathbf{P}_j = \mathbf{fr}\ \mathbf{P}_{j+1}$, $j \in J_{n-1}$,

2) $\bigcup_{j=1}^{k} \mathbf{P}_j \subset \mathbf{\Omega}$,

где $\mathbf{fr}\ \mathbf{P}_j$ — интервальная граница [6] интервальной полосы $\mathbf{P}_j$. Интервальные уравнения интервальных прямых $\mathbf{f}_{ij}$, $i \in J_n$, $j = J_4$, участвующих в формировании интервальной границы интервального прямоугольника $\mathbf{T}_i$, имеют вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_{i1}: \langle X \rangle - \overline{\langle X_i \rangle} + \left\langle 0, \nu_{a_i}^0 \right\rangle = \langle 0 \rangle,\\ \mathbf{f}_{i3}: -\overline{\langle X \rangle} + \langle X_i \rangle + \left\langle A_i^0 \right\rangle = \langle 0 \rangle,\\ \mathbf{f}_{i4}: -\overline{\langle Y \rangle} + \langle Y_i \rangle + \left\langle B_i^0 \right\rangle = \langle 0 \rangle,\\ \mathbf{f}_{i4}: \langle Y \rangle - \overline{\langle Y_i \rangle} + \left\langle 0, \nu_{b_i}^0 \right\rangle = \langle 0 \rangle,\end{gathered} \quad (2)$$

где $\left(\left\langle X_i\right\rangle,\left\langle Y_i\right\rangle\right)=\left(\left\langle x_i,\nu_{x_i}\right\rangle,\left\langle y_i,\nu_{y_i}\right\rangle\right)\in \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ – интервальные координаты интервального полюса интервального прямоугольника T_i в неподвижной интервальной системе координат $\langle X\rangle\langle 0\rangle\langle Y\rangle$; $\overline{\langle X\rangle}=\left\langle x,-\nu_x\right\rangle$ – сопряжение [4] элемента $\langle X\rangle=\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Определение 1. Интервальной длиной интервального прямоугольника $\mathbf{T}_i\subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ называется интервальное расстояние между интервально параллельными интервальными прямыми $\mathbf{f}_{i1}$ и $\mathbf{f}_{i3}$, участвующими в формировании $\mathbf{frT}_i$.

Определение 2. Интервальной шириной интервального прямоугольника $\mathbf{T}_i\subset \mathbf{I}_s^2\mathbf{R}$ называется интервальное расстояние между интервально параллельными интервальными прямыми $\mathbf{f}_{i2}$ и $\mathbf{f}_{i4}$, участвующими в формировании $\mathbf{frT}_i$.

Согласно определению интервального расстояния между двумя интервально параллельными прямыми [7] с учетом интервальных уравнений (2), вычислим интервальные длину $\left\langle L_i^0\right\rangle$ и ширину $\left\langle B_i^0\right\rangle$ интервального прямоугольника $\mathbf{T}_i$, $i\in J_n$:

$$\left\langle L_i^0\right\rangle=\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{f}_{i1},\mathbf{f}_{i3}\right)=\left\langle a_i^0,2\nu_{a_i}^0\right\rangle, \tag{3}$$

$$\left\langle B_i^0\right\rangle=\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{f}_{i2},\mathbf{f}_{i4}\right)=\left\langle b^0,2\nu_{b_i}^0\right\rangle. \tag{4}$$

Для нахождения числа k введем понятие целой части элемента интервального пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Определение 3. Целой частью интервального числа $\langle X\rangle=\left\langle x,\nu_x\right\rangle\in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ называется интервальное число вида

$$\left[\langle X\rangle\right]=\left\langle \frac{x^+ + x^-}{2},\frac{x^+ - x^-}{2}\right\rangle,$$

где $x^-=\left[x-\nu_x\right]$, $x^+=\left[x+\nu_x\right]$ — целые части вещественных чисел $x-\nu_x, x+\nu_x\in R^1$.

Основываясь на введенной в $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ операции интервального деления [5], определениях 1–3, выражениях (3), (4), определим

$$\left[\langle K\rangle\right]=\left[\left\langle k,\nu_k\right\rangle\right]=\left[\frac{\left\langle w^0,2\nu_w^0\right\rangle}{\left\langle b^0,2\nu_{b_1}^0\right\rangle}\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{\left(b^0\right)^2-\left(2\nu_{b_1}^0\right)^2}\cdot\left(\left\langle w^0,2\nu_w^0\right\rangle*\left\langle b^0,2\nu_{b_1}^0\right\rangle\right)\right].$$

После преобразований получим

$$k=\frac{1}{2}\cdot\left(\left[\frac{w^0-2\nu_w^0}{b^0+2\nu_{b_1}^0}\right]+\left[\frac{w^0+2\nu_w^0}{b^0-2\nu_{b_1}^0}\right]\right), \tag{5}$$

$$\nu_k=\frac{1}{2}\cdot\left(\left[\frac{w^0+2\nu_w^0}{b^0-2\nu_{b_1}^0}\right]-\left[\frac{w^0-2\nu_w^0}{b^0+2\nu_{b_1}^0}\right]\right).$$

Очевидно, что для идеализированной задачи (когда все погрешности исходных данных равны нулю, в том числе $\nu_w^0=\nu_{b1}^0=0$) максимальное число k^0 горизонтальных полос ширины b^0 равно $k^0=\left[\frac{w^0}{b^0}\right]$.

Обозначим через

$$k_{\min}=\left[\frac{w^0-2\nu_w^0}{b^0+2\nu_{b_1}^0}\right], k_{\max}=\left[\frac{w^0+2\nu_w^0}{b^0-2\nu_{b_1}^0}\right].$$

Тогда число $k\in N$ интервальных полос $\mathbf{P}_j$ удовлетворяет условию $k\in\left[k_{\min},k_{\max}\right]$.

Если $k_{\min}=k_{\max}$, то существует единственный вариант разбиения интервальной полосы $\boldsymbol{\Omega}$ на k интервальных полос $\mathbf{P}_j$. Полагаем $k=k_{\min}$.

Рассмотрим интервальное мультимножество $\mathbf{G}$, элементами которого являются интервальные длины $\left\langle L_i\right\rangle$ интервальных прямоугольников $\mathbf{T}_i$, $i\in J_n$ и $m-n$ элементов нулевой длины, т.е.

$$\mathbf{G}=\left\{\underbrace{\langle 0\rangle,\langle 0\rangle,\ldots,\langle 0\rangle}_{m-n},\left\langle L_1\right\rangle,\left\langle L_2\right\rangle,\ldots,\left\langle L_n\right\rangle\right\},$$

где $m=ks, s=n-k+1$. Считаем, что q элементов данного множества различны.

Пусть найдено некоторое размещение интервальных прямоугольников в интервальной полосе $\boldsymbol{\Omega}$, причем в интервальной полосе $\mathbf{P}_j$, $j\in J_k$ размещены интервальные прямоугольники $\mathbf{T}_{j_1},\mathbf{T}_{j_2},\ldots,\mathbf{T}_{j_{m_j}}$, где $j_r\in J_n, r\in J_{m_j}, \sum_{j=1}^{k}m_j=n$. Обозначим через $\left\langle L_{j_r}\right\rangle$ интервальную длину интервального прямоугольника $\mathbf{T}_{j_r}$, $j\in J_k, r\in J_{m_j}$.

Данному размещению интервальных прямоугольников $\mathbf{T}_i$, $i\in J_n$ в интервальной полосе $\boldsymbol{\Omega}$ поставим в соответствие перестановку [1] π интервальных элементов мультимножества $\mathbf{G}$:

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\left\langle L_{1_1}\right\rangle,\ldots,\left\langle L_{1_{m_1}}\right\rangle,\underbrace{\langle 0\rangle,\ldots\langle 0\rangle}_{s-m_1}\ldots,\right.$$

$$\left.\left\langle L_{k_1}\right\rangle,\ldots\left\langle L_{k_{m_k}}\right\rangle,\underbrace{\langle 0\rangle,\ldots\langle 0\rangle}_{s-m_k}\right).$$

Иначе,

$$\boldsymbol{\pi}=\left\{\begin{array}{l}\langle G_{\alpha_1}\rangle,\langle G_{\alpha_2}\rangle,\ldots,\langle G_{\alpha_m}\rangle,\\ i,\alpha_i\in J_m\end{array}\right\}. \tag{6}$$

Множество всех перестановок $\boldsymbol{\pi}$ вида (6) обозначим через $\mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})$.

Определим интервальное расстояние между интервальными прямоугольниками $\mathbf{T}_{j_r}$ и $\mathbf{T}_{j_{r+1}}$, $j \in J_k, j_r \in J_{m_j - 1}$ в интервальной полосе $\mathbf{P}_j$. Согласно формуле интервального расстояния между интервально касающимися прямоугольниками [8] имеем:

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{T}_{j_r}, \mathbf{T}_{j_{r+1}}\right) = \left\langle \left| \nu_{a_{j_r}} + \nu_{a_{j_{r+1}}} \right|, \left| \nu_{a_{j_r}} - \nu_{a_{j_{r+1}}} \right| \right\rangle. \quad (7)$$

С учетом (3), (6), (7) интервальная длина $\mathbf{L}_j$ занятой части интервальной полосы $\mathbf{P}_j, j \in J_k$ равна

$$\mathbf{L}_j = \sum_{r=1}^{m_j} \left\langle L_{j_r} \right\rangle + \sum_{r=1}^{m_j - 1} \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{T}_{j_r}, \mathbf{T}_{j_{r+1}}\right). \quad (8)$$

Интервальная длина $\mathbf{L} = \langle l, \nu_l \rangle$ занятой части интервальной полосы $\boldsymbol{\Omega}$ задается выражением

$$\mathbf{L} = \max_{1 \le j \le k} \mathbf{L}_j, \quad (9)$$

где $\mathbf{L}_j, j \in J_k$ вычисляется по формуле (8), а максимум определяется в соответствии с отношением порядка, введенным в расширенном пространстве центрированных интервалов $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Тогда математическая модель комбинаторной оптимизационной задачи размещения интервальных прямоугольников в интервальной полосе с учетом (6) и (9) может быть записана в виде

$$\min_{\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})} \mathbf{L}, \quad (10)$$

причем минимум берется по всем перестановкам $\boldsymbol{\pi}$ из множества $\mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})$.

Осуществим погружение множества всех перестановок $\mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})$ в m-мерное интервальное пространство $\mathbf{I}_s^m\mathbf{R} = \underbrace{\mathbf{I}_s\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{I}_s\mathbf{R}}_{m}$. Всякому элементу $\boldsymbol{\pi} = \left(\langle \pi_1 \rangle, \langle \pi_2 \rangle, \ldots, \langle \pi_m \rangle\right) \in \mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})$ вида (6) поставим в соответствие элемент $\mathbf{Z} = \left(\langle Z_1 \rangle, \langle Z_2 \rangle, \ldots, \langle Z_n \rangle\right) \in \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$ по правилу $\boldsymbol{\pi} \to Z: \langle \pi_i \rangle = \langle Z_i \rangle = \langle G_{\alpha_i} \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, $i, \alpha_i \in J_m$. Обозначим образ множества $\mathbf{P}_{mq}(\mathbf{G})$ при таком отображении через $\mathbf{E}_{mq}(\mathbf{G}) \subset \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$. Тогда задача (10) примет вид:

$$\min_{\mathbf{Z} \in \mathbf{E}_{mq}(\mathbf{G})} \max_{1 \le j \le k} \mathbf{L}_j,$$

$$\mathbf{L}_j = \left(\begin{array}{l} \sum_{r=1}^{m_j} \left\langle z_{j_r}, 2\nu_{z_{j_r}} \right\rangle + \\ + \sum_{r=1}^{m_j - 1} \left\langle \left| \nu_{z_{j_r}} + \nu_{z_{j_{r+1}}} \right|, \left| \nu_{z_{j_r}} - \nu_{z_{j_{r+1}}} \right| \right\rangle \end{array} \right). \quad (11)$$

Рассмотрим представление математической модели (11) в арифметическом евклидовом пространстве R^{2m}. Для этого используем отображение ψ пространства $\mathbf{I}_s^m\mathbf{R}$ в арифметическое евклидово пространство R^{2m} вида [4]:

$$\begin{aligned} &\Psi : \mathbf{I}_s^m\mathbf{R} \to R^{2m} : \\ &: \Psi(\mathbf{Z}) = Z = (z_1, \nu_{z_1}, \ldots, z_n, \nu_{z_n}) \in R^{2m}, \\ &\mathbf{Z} \in \mathbf{I}_s^m\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (12) математическую модель (11) в арифметическом евклидовом пространстве R^{2m} можно представить в виде

$$\min_{Z \in \mathrm{IE} \subset R^{2m}} (l, \nu_l), \quad (13)$$

где $\mathrm{IE} = \Psi\left(\mathbf{E}_{mq}(\mathbf{G})\right)$. Решение двухкритериальной задачи (13) сводится к последовательному решению следующих задач [9]:

$$l^* = \min_{Z \in \mathrm{IE} \subset R^{2m}} l, \quad (14)$$

$$\nu_l^* = \min_{Z \in \mathrm{IE'} \subset R^{2m}} \nu_l \quad (15)$$

и где $\mathrm{IE'} = \left\{ Z \in \mathrm{IE} \,\middle|\, l = l^* \right\}$. Адекватность задач (13) и (14)–(15) обусловлена отношением порядка, введенным в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$.

Математическая модель (15),(16) реализована модифицированным методом ветвей и границ [9].

Литература: 1. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К. : Наук. думка, 1986. 286 с. 2. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Евсеева Л.Г.* Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных //Доп. НАН Украины. 1997. №7. С.56-60. 3. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. К.: Наук. думка, 1976. 248 с. 4. *Stoyan Yu.G.* The extended interval space and elementary mappings// Proceedings of the IMACS–GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Oldenburg, Germany, 1995. P. 270–279. 5. *Стоян Ю.Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов// Докл. НАН Украины, Сер. А, 1996. N 7. С. 23–25. 6. *Стоян Ю.Г.* Интервальные множества. Харьков, 1998. 27с. (Препр./ НАН Украины. Институт проблем машиностроения; 400). 7. *Стоян Ю.Г.* Интервальное пространство $\mathrm{I}_s^2(\mathrm{R})$. Интервальные уравнения // Доп. НАН України. 1998. №6. С.109-116. 8. *Stoyan Yu.G., Romanova T.E.* Account of errors in optimization placement problem //Journal of mechanical engeneering. 1998. Vol. 1, №2. P.31-40. 9. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Сысоева Ю. А.* Оптимизационная задача размещения правильных интервальных многоугольников //Докл. НАН Украины. 1998. №9. С. 114-120.

Поступила в редколлегию 17.09.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Скляр Г.М.

Евсеева Людмила Григорьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Полтавского военного института связи. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 36034, Полтава, ул. Примакова, 12, кв. 112, тел. (0532) 66-82-86.

Романова Татьяна Евгеньевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения НАН Украины им. А.Н. Подгорного. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 310140, Харьков, пр. Гагарина, 54, кв.18, тел. (0572) 27-35-80.

Сысоева Юлия Анатольевна, канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 310086, Харьков, ул. 23 Августа, 29, кв.176, тел. (0572) 30-09-03.