

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ Комп'ютерних наук  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ Програмної інженерії  
(повна назва)

## КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

### Пояснювальна записка

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ другий (магістерський)

Дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища  
з параметричними налаштуваннями  
\_\_\_\_\_ (тема)

Виконав:  
Студент \_\_\_\_\_ 2 курсу, групи \_\_\_\_\_ ІПЗм-20-3  
\_\_\_\_\_ Попов Д.Д.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність \_\_\_\_\_ 121-Інженерія програмного  
забезпечення  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми \_\_\_\_\_ Освітньо-наукова програма  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Керівник \_\_\_\_\_ доц. Назаров О.С..  
(посада, прізвище)

Допускається до захисту

Зав. кафедри \_\_\_\_\_ 3.В. Дудар  
(підпис) (прізвище, ініціали)

2022 р.

## Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Комп'ютерних наук  
(повна назва)

Кафедра Програмної інженерії  
(повна назва)

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 121 – Інженерія програмного забезпечення  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми Освітньо-наукова програма  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Інженерія програмного забезпечення  
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав.кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

### ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студента Попова Дениса Дмитровича  
(прізвище, ім'я, по батькові)

- Тема роботи Дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями  
затверджена наказом університету від 26.03.2022 № 385
- Термін подання роботи до екзаменаційної комісії 11.05 2022р.
- Вихідні дані до роботи Дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями  
*Використовувати мову програмування C++.*
- Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі аналіз предметної області, аналіз методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями, експериментальне дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, слайдів, ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри)  
18 рис., 16 слайдів.

6 Консультанти розділів роботи

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Спецчастина			

**КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН**

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Аналіз проблемної області дослідження	1.02.21 – 5.02.22	Виконано
2	Постановка задачі	8.02.21-12.02.22	Виконано
6	Підготовка пояснювальної записки	12.04.21-24.04.22	Виконано
7	Підготовка презентації та доповіді	25.04.21-30.04.22	Виконано
8	Нормоконтроль	5.05.21-7.05.22	Виконано
9	Рецензування	8.05.21-10.05.22	Виконано
10	Занесення диплома в електронний архів	10.05.21-11.05.22	Виконано
11	Попередній захист	11.05.21-12.05.22	Виконано
12	Допуск до захисту у зав. кафедри	12.05.21-13.05.22	Виконано

Дата видачі завдання 25 січня 2022р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ доц. Назаров О.С.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

**РЕФЕРАТ / ABSTRACT**

Кваліфікаційна робота магістра містить: 66 с., 18 рис., 19 джерел.

**ЗОВНІШНЯ БАЛІСТИКА, C++, UNREAL ENGINE 4, BLUEPRINTS,  
БАЛІСТИЧНА СИМУЛЯЦІЯ**

Об'єктом дослідження є методи симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями.

Метою роботи є дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями.

Методи розробки базуються на мові програмування C++, та на фізичному рушії Unreal Engine 4.

**EXTERNAL BALISTICS, C++, UNREAL ENGINE 4, BLUEPRINTS,  
BALLISTIC SIMULATION**

The object of research is methods of integration with external systems, as well as systems for integration Google Calendar, Android Calendar and Moodle.

The aim of this work is to explore methods of integrating data from disparate web systems.

Development methods are based on the C++ programming language and physical engine Unreal Engine 4.

Я, Попов Денис Дмитрович, студент гр. ІПЗм-20-3, здобувач вищої освіти на другому (магістерському) рівні кафедри «Програмна інженерія», заявляю: моя кваліфікаційна робота на тему «Дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями», що буде представлена в екзаменаційну комісію для публічного захисту, виконана самостійно, в ній не містяться елементи плагіату і вона може бути опублікована в електронному архіві відкритого доступу ElAr KhNURE. Всі запозичення з друкованих та електронних джерел мають відповідні посилання.

Я ознайомлений з діючим положенням «Про протидію академічному плагіату в ХНУРЕ», згідно з яким виявлення плагіату є підставою для відмови в допуску кваліфікаційної роботи до захисту та застосування дисциплінарних заходів.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	7
1 АНАЛІЗ ПРОЛЕМНОЇ ГАЛУЗІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ .....	9
1.1 Аналіз проблемної галузі .....	9
1.2 Виявлення проблем та актуалізація рішень .....	10
1.3 Постановка задачі .....	17
2 ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ БАЛІТИКИ СНАРЯДУ .....	19
2.1 Постановка завдання .....	19
3 ФОРМУВАННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ .....	43
3.3 Інструменти програмної реалізації .....	45
ВИСНОВКИ .....	53
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ .....	54

## ВСТУП

Зовнішньою балістикою називають особливий вид балістики, який вивчає поведінку снаряду у польоті. Дана наука досліджує, під яким кутом до горизонту та з якою початковою швидкістю має рухатися куля певної форми та ваги для того, щоб вона досягла цілі.

Зовнішню балістику часто пов'язують з вогнепальною зброєю, оскільки вона також вивчає вільну фазу польоту кулі з того моменту, коли вона виходить із ствола вогнепальної зброї і до того, як влучить у ціль.

Окрім даного напрямлення, зовнішня балістика також вивчає вільний політ ракет і іншої метальної зброї. Серед них:

- артилерійські снаряди;
- активні реактивні снаряди;
- м'ячі;
- стріли.

Під час польоту серед основних сил, що діють на снаряд, виділяють гравітацію, опір і, при його наявності, вітер. Гравітація надає снаряду прискорення вниз. Через цей фактор снаряд відхиляється від польоту по прямій лінії. Опір, тобто протидія повітря, сповільнює снаряд із силою, що є пропорційна квадрату швидкості. І, до того ж, вітер змушує снаряд відхилятися по траєкторії, у яку він направлений.

Завдяки дослідженням зовнішньої балістики, можна ще до пострілу з достатньою точністю визначити, куди саме потрапить куля. Точність пострілу залежить від таких факторів:

- опір середовища;
- геометрія та форма снаряду, що запускається;
- обертання снаряду;

— вологість, вітер, турбулентність та інші параметри, наведені вище.

Окрім того, після того, як куля вилетить зі ствола, вона летітиме не по прямій лінії, а по балістичній траєкторії, що за формою схожа на параболу. До того ж необхідно мати на увазі, що у пневматичній зброї використовуються легші кулі, ніж у вогнепальній, що, у свою чергу, дозволяє їм летіти з невеликою або ж середньою швидкістю від 100 до 380 м/с. Через даний фактор викривлення траєкторії польоту кулі з пневматичної зброї від різних впливів значніше, ніж для куль з вогнепальної зброї.

Вище наведені основні фактори, проте також мають місце інші ефекти, серед яких є температура та щільність повітря, гіроскопічний дрейф та ін.

Головною метою створення даної роботи є покращення рівня вогневої підготовки військових, спортсменів та мисливців.

Об'єктом дослідження є методи симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями.

Тезиси до роботи опубліковані на 12-й науково-технологічній конференції «СУЧАСНІ НАПРЯМИ РОЗВИТКУ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ТА ЗАСОБІВ УПРАВЛІННЯ»

# 1 АНАЛІЗ ПРОЛЕМНОЇ ГАЛУЗІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

## 1.1 Аналіз проблемної галузі

У основах стрільби закладені теоретичні положення, знання яких є необхідним для розуміння процесів, що відбуваються при стрільбі, а також засвоєння її прийомів і правил. Ті, хто навчаються цьому, отримують знання, які є необхідними для влучної стрільби по різних цілях у будь-яких умовах. Навчання діям при озброєнні здійснюється у цілях опанування прийомів стрільби з різних положень та різними способами.

Представлений продукт – це система, орієнтована на застосування у військовій галузі для тренування снайперів. Крім того, така розробка може використовуватися для покращення навичок влучної стрільби на дальні дистанції як мисливцями, так і спортсменами[1].

Стандартні методики навчання цим навичкам сконцентровані на польових тренуваннях зі стрільбою по цілям. Для тренування у веденні вогню по непорушних цілях та цілях, що з'являються (або рухаються), на вибраній ділянці місцевості у різноманітних напрямках і відстанях у межах від ста до п'ятисот метрів встановлюються такі мішені:

- головні;
- грудні;
- поясні;
- ростові фігури.

Спочатку мають вивчатися правила вибору та встановлення прицілу, а потім точки прицілювання з урахуванням відстані до цілі та її розмірів (за сприятливих метеорологічних умов).

Для тренування з вирішення вогневих задач за сприятливих метеорологічних умов, керівник заняття показує одну з цілей, повідомляє відстань до неї і наказує, користуючись таблицями перевищення траєкторії над лінією прицілювання, визначити приціл і навести зброю, встановлену на прицільному станку, в ціль. Керівник заняття перевіряє правильність встановлення прицілу та наведення. Після декількох таких вправ завдання повинні ускладнюватися. Після твердого засвоєння правил та прийомів стрільби у нерухомі цілі та цілі, що з'являються, керівник заняття переходить до навчання стрільбі по цілях, що рухаються.

Завдяки використанню характеристик дальності прямого пострілу зброї, пояснюється, коли і як можливо вести стрільбу по різних цілях, не змінюючи приціл. З одного боку, це дозволяє отримати досвід у поводженні зі справжньою зброєю на практиці, з іншого – навколишнє середовище не може бути повністю контрольоване чи відтворене за потреби. Це обмежує аналіз помилок при стрільбі та не дає курсантові цілеспрямовано їх виправляти, що призводить до збільшення часу, необхідного для опанування стрільби на дальні дистанції[2].

## 1.2 Виявлення проблем та актуалізація рішень

Основною задачею є розрахування траєкторії польоту снаряду, враховуючи більшість факторів, які впливають на нього при польоті.

У момент пострілу ствол зброї знаходиться у відповідному положенні. Таким чином, політ кулі починається з прямої лінії, що являється продовженням осі каналу ствола у момент вильоту з нього кулі. Цю лінію називають лінією метання.

При польоті кулі у повітрі, на неї відбувається дія двох сил:

- сили тяжіння;
- сили опору повітря.

Сила тяжіння відхиляє куля від лінії метання, тоді як сила опору повітря направлена назустріч кулі і таким чином змушує її безперервно втрачати швидкість польоту. Через даний фактор зменшується дальність польоту кулі.

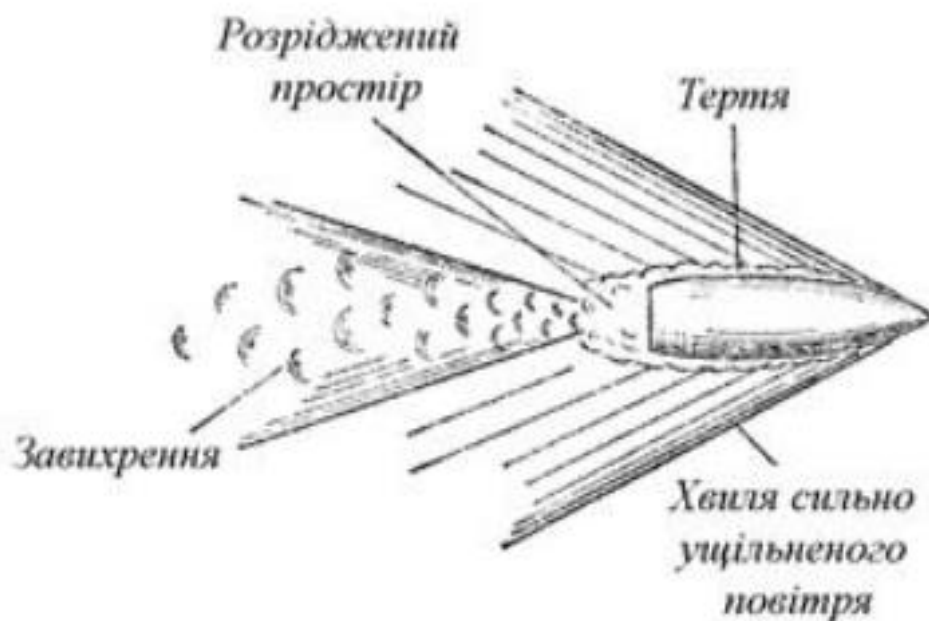


Рисунок 1.1 - Утворення сили опору повітря

Сила опору повітря залежить від таких факторів:

- швидкість польоту;
- форма кулі;
- калібр кулі;
- матеріал поверхні кулі;
- густина повітря.

Під дією вищезгаданих сил куля летить у повітрі не по прямій лінії (лінії метання), а по кривій, нерівномірно вигнутій лінії, що розміщена нижче лінії метання. Дана крива лінія, по якій летить куля, є траєкторією її польоту.

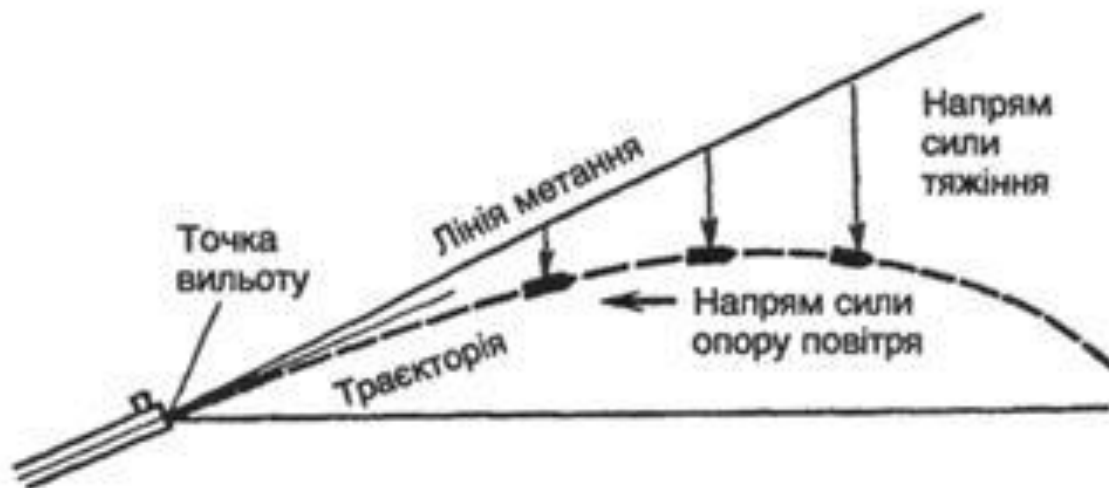


Рисунок 1.2 - Траєкторія польоту кулі

Точка вильоту кулі, або центр дулового зрізу ствола є початком траєкторії польоту кулі. Кінцем траєкторії називають точку зустрічі - точку перетину траєкторії польоту з поверхнею цілі або перешкоди. Саме туди влучає куля.



Рисунок 1.3 - Елементи траєкторії

Також варто пам'ятати наступні елементи траєкторії (див. Рисунок 1.3):

- горизонт зброї - так називають горизонтальну площину, що проходить через точку вильоту кулі;
- лінія підвищення - це пряма лінія, що являється продовженням осі каналу ствола до пострілу;
- площина стрільби - назва вертикальної площини, що проходить через лінію підвищення;
- кут підвищення - це кут, який знаходиться між лінією підвищення та горизонтом зброї;
- кут метання є кутом, який розташований між лінією метання та горизонтом зброї;
- вершина траєкторії - назва найвищої точки траєкторії, що знаходиться над горизонтом зброї.
- перевищення траєкторії над лінією прицілювання - найбільш коротка відстань від будь-якої точки траєкторії до лінії прицілювання;
- точка падіння - назва точки перетину траєкторії і горизонту зброї;
- повна горизонтальна дальність - назва проміжку, що знаходиться на відстані між точкою вильоту кулі до її точки падіння;
- кінцева швидкість - швидкість кулі, з якою вона рухається у точці падіння;
- висота траєкторії - найкоротший проміжок між вершиною траєкторії та горизонтом зброї;
- кут падіння - назва кута, що знаходиться між дотичною до траєкторії в точці падіння і горизонтом зброї;
- прицільна дальність - проміжок відстані між точкою вильоту та перетином траєкторії з лінією прицілювання;
- лінія прицілювання - назва прямої лінії, що проходить від ока стрільця через середину прорізу прицілу і вершину мушки до точки прицілювання;
- точка прицілювання - точка, на яку наводиться зброя. може знаходитись як на цілі, так і поза нею;
- точкою зустрічі називають точкою перетину траєкторії та поверхні цілі;

- кут зустрічі - назва кута між дотичною до траєкторії та дотичною до поверхні цілі у точці їх зустрічі;
- кут місця цілі - кут, що знаходиться між лінією прицілювання та горизонтом зброї.

Сила опору повітря є пропорційною швидкості його польоту, проте не прямо пропорційною. Окрім зменшення дальності і зміни форми його траєкторії, сила опору повітря намагатиметься перекинути снаряд.

Саме тому, щоб куля у польоті не переверталася, їй надають обертового руху за допомогою нарізів на каналі ствола. Таким чином, з'являється нове відхилення, яке називають деривацією.

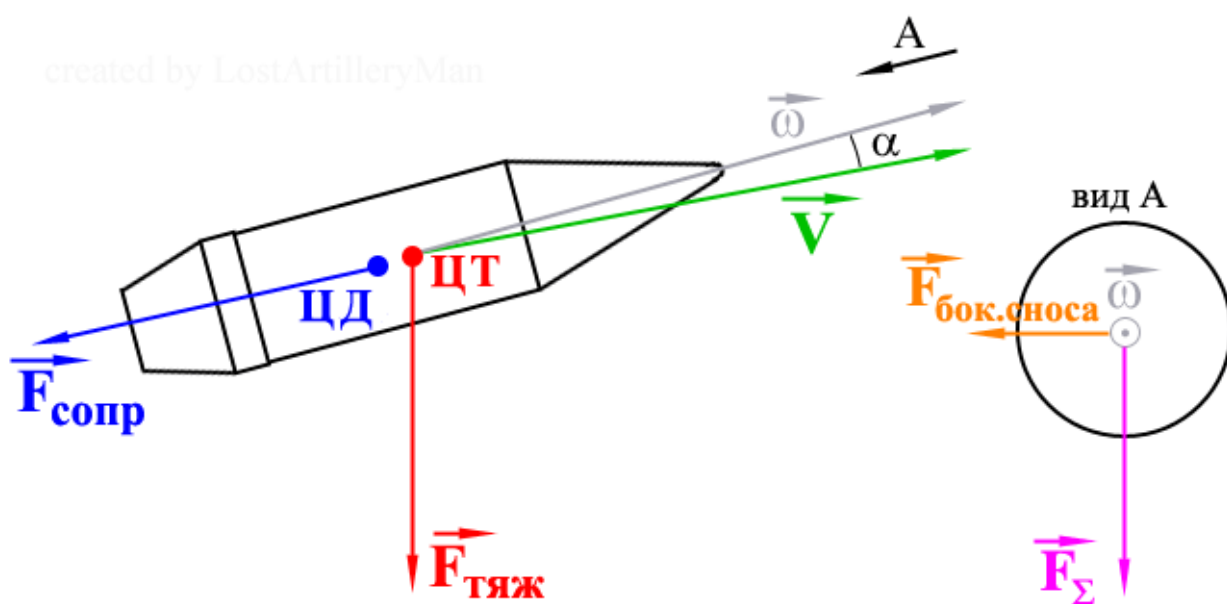


Рисунок 1.4 - Графічне зображення сил, що діють на кулю при польоті

Є декілька факторів, що впливають на деривацію:

- нарізи у стволі зброї;
- вага кулі: важкі кулі менше відхиляються деривацією, і при однаковому калібрі відхилення більш важкої кулі буде меншим, ніж у легкої;

- підвищення ствола зброї при стрільбі (кут метання): чим він більший, тим менша деривація;
- температура повітря: чим вона є нижчою, тим, як правило, сильніша деривація;
- зустрічний вітер, що посилює деривацію.

У сучасній артилерії поправка на деривацію або враховується автоматично, або заздалегідь вводиться до таблиць стрільби - таблиць, у яких зберігається інформація про поправки прицілу згідно з дистанціями до цілей. Окрім того, у деяких моделях ручної вогнепальної зброї чи у оптичних прицілах деривація закладається у конструкцію моделі.

Головною проблемою стандартних методик навчання є не лише неможливість контролювання навколишнього середовища, але й витрати. Такі тренування потребують використання патронів, які мають відносно велику вартість, а саме: від 7\$ до більш ніж 300\$ за одиницю. При стандартному використанні 10 патронів за тренування, його разове проведення для п'ятерох бійців з використанням найдешевших патронів має обійтися приблизно в 350\$.

Окрім того, тренування в реальному світі можуть призвести до травм у разі несправності зброї або нехтування правилами безпеки при поводженні з нею. Наприклад, доволі часто трапляються пошкодження барабанної перетинки, так як снайперські гвинтівки зазвичай мають велику гучність пострілу.

Проте, в даний час є інші способи набувати та підтримувати навички стрільби. Популярною на сьогодні альтернативою польовим тренуванням є інтерактивні тири, що працюють завдяки фотоелементам або лазерним сенсорам.

Це набагато безпечніший спосіб навчання, ніж тренування у реальному світі, проте і цей спосіб має свої недоліки. Коли мова йде саме про стрільбу на дальні дистанції, така система на являється ефективною, тому що на середніх та дальніх дистанціях лазерний промінь не може виступати аналогом кулі (див. рис. 1.1).

Через вплив таких чинників, як гравітація та опір повітря, траєкторія кулі є параболоїдною. Цей нюанс варто враховувати не лише при передбаченні траєкторії, а й при налаштуванні прицілу та пристрілці зброї.

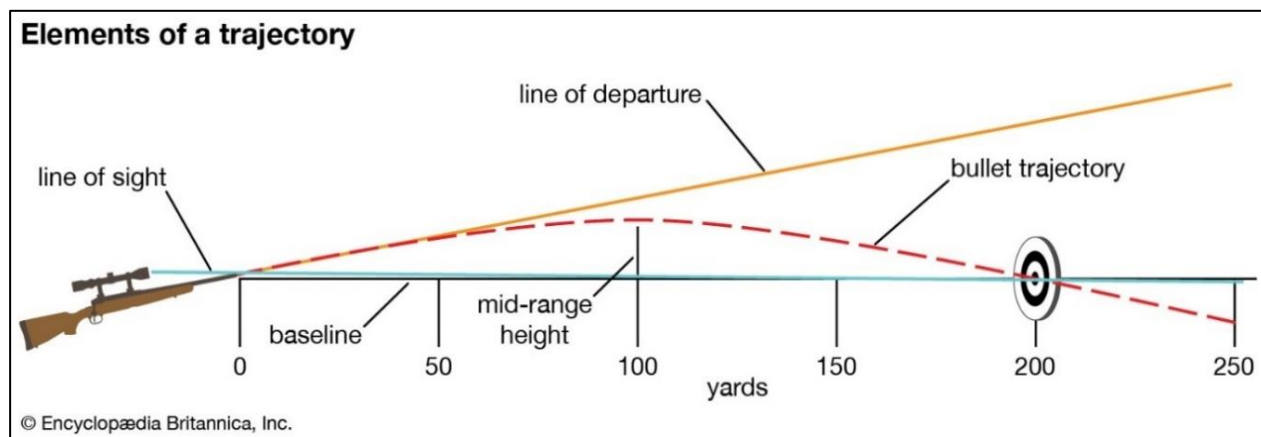


Рис. 1.5 - Траєкторія кулі при стрільбі на дальні дистанції

Виходячи з усіх вищеописаних способів навчання стрільбі з вогнепальної зброї на дальні дистанції, можна зробити висновок, що у кожного з них є як свої переваги, так і ряд недоліків.

Таким чином можна виділити основні проблеми, пов'язані із навчанням стрільбі з вогнепальної зброї на дальні дистанції:

- неможливість контролювання навколишнього середовища та витрати на патрони при навчанні у реальному світі;
- неефективність стрільби з контролеру (подібного до пістолету) з фотоелементом.

### 1.3 Постановка задачі

Головною задачею є розрахування траєкторії польоту снаряду з урахуванням більшості факторів, які впливають на його політ.

Якщо тіло кинути під кутом до горизонту, то в польоті на нього діятимуть сила тяжіння та сила опору повітря. Якщо силою опору знехтувати, залишається єдина сила - сила тяжіння. Тому внаслідок Другого закону Ньютона, тіло рухається з прискоренням, яке є рівним прискоренню вільного падіння.

Після аналізу області та виявлення проблем в ній основною задачею поточного проекту являється розробка програмного забезпечення для дослідження методів симуляції зовнішньої балістики в умовах середовища з параметричними налаштуваннями. Метою роботи є реалізація системи, що дасть користувачам можливість створювати симуляції полігонів для стрільби на дальні дистанції у віртуальній реальності. Для зручності координації та використання, програму буде поділено на сервер, який міститиме необхідний функціонал для створення та редагування карт полігонів і проведення симуляцій[3].

Такі дії надаватимуть інструкторам можливість:

- налаштовувати рельєф, температуру та вологість повітря, зони з різною силою та напрямком вітру;
- задавати характеристики різних одиниць стрілецької зброї та набоїв для їх подальшої симуляції;
- проводити розстановку мішеней;
- зберігати карти полігонів для подальшого використання;
- записувати результати симуляцій за допомогою стороннього ПО;
- відтворювати та аналізувати записи симуляцій.

І, відповідно, клієнтська частина надаватиме курсантам можливість:

- під'єднуватися до відповідного серверу;
- спостерігати симуляцію полігону у віртуальній реальності від першої особи;
- використовувати віртуальну зброю за допомогою контролерів;
- бачити траєкторію кулі після пострілу;
- отримувати відгук на влучення у мішень.

Як можна зробити висновки з вищеписаних даних, такий розподіл функціоналу дозволить централізувати проведення тренувань і, до того ж, підключення може бути обмежене локальною мережею, якщо цього будуть потребувати вимоги безпеки.

## 2 ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ БАЛІТИКИ СНАРЯДУ

### 2.1 Постановка завдання

На рисунку 2.1 зображено кінематику руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

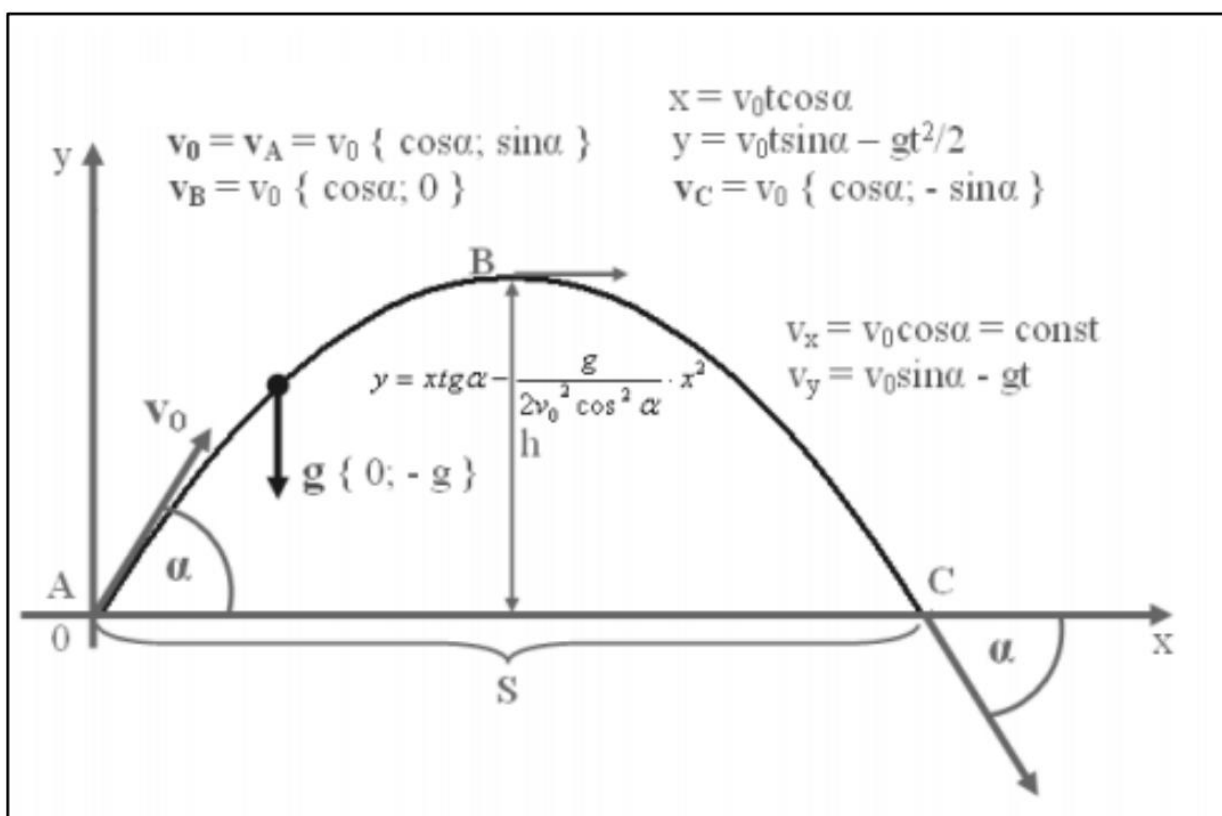


Рисунок 2.1 - Напрямок руху тіла, що кинуте під кутом до горизонту

Початковою швидкістю тіла є  $v_0$ , що знаходиться під кутом  $\alpha$  до горизонту. На тіло діє лише сила тяжіння  $mg$ , отже відбуватиметься плаский рух. Через вектори  $g$  і  $v_0$  будується площина, у яку встановлюється у декартовій системі координат точку, з якої робитиметься постріл. Ця точка буде початком координат. Вісь  $x_0$  направлена по горизонту у напрямку пострілу, вісь  $y_0$  направлена вертикально вгору[4].

Рух у горизонтальному напрямку відбувається рівномірний та має постійну швидкість  $v_0 \cos a$ . Рух у вертикальному напрямку є рівноприскореним з початковою швидкістю  $v_0 \sin a$  та має постійне прискорення  $g$ . Отже, рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, можна розглядати як суму горизонтального та вертикального руху, що між собою не пов'язані.

Оскільки рух не відбувається миттєво, потрібно ввести змінну часу  $t$ . Тепер рівняння має наступний вигляд:

$$x = v_0 \cos a \cdot t \text{ і } y = v_0 \sin a \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (2.1)$$

Вертикальна та горизонтальна швидкість матимуть наступний вигляд:

$$v_x = v_0 \cos a = \text{const} \text{ та } v_y = v_0 \sin a - gt. \quad (2.2)$$

Таким чином, рух напрямком вгору триватиме до тих пір, поки  $v(y)$  не буде дорівнювати 0. Далі позначимо час підйому буквою  $\tau$  і виведемо його з рівняння  $v(y) = 0$ :

$$\tau = \frac{v_0 \sin a}{g}. \quad (2.3)$$

Щоб отримати рівняння траєкторії  $y = y(x)$ , з рівняння (2.1а) потрібно обчислити час  $t = x/v_0 \cos a$  та підставити у рівняння (2.1б):

$$y = x \tan a - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 a} x^2, \quad (2.4)$$

таким чином, щоб траєкторія мала вигляд параболи.

Далі потрібно обчислити висоту польоту  $h$ :

$$h = y(\tau) = -\frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g}, \quad (2.5)$$

а також дальність польоту  $s$ :

$$s = x(2\tau) = -\frac{v_0^2 \sin 2a}{g}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Розрахунок області недосяжності пострілу

Розрахунок області недосяжності при пострілі - це визначення у повітряному просторі поверхні, за межі якої куля не зможе долетіти. У балістиці та у теоретичній механіці даною областю називають параболою безпеки, що отримана при різних значеннях кута польоту  $\alpha$ . Обвідне ж сімейство ліній (безліч ліній, які є безперервно залежними від набору параметрів, котрих може бути один або більше) на площині є такою лінією, яка в кожній точці належить одній лінії даного сімейства. Таким чином, деяке сімейство  $\Phi(x, y, \alpha) = 0$  та  $d\Phi/da = 0$  [5].

У даному випадку  $\Phi(x, y, \alpha) = x * tga - g/2V_0^2 * x^2 - y = 0$  та

$$\frac{d\Phi}{da} = \frac{x}{\cos^2 a} - \frac{g * x^2}{v_0^2} * \frac{tga}{\cos^2 a} = 0 \Rightarrow x * tga = \frac{v_0^2}{g}. \quad (2.7)$$

Остаточне рівняння обвідної матиме наступний вигляд:

$$y_{\text{обвід}} = \frac{H}{2} \left[ 1 - \frac{x^2}{H} \right]. \quad (2.8)$$

де  $H = v_0^2/g$  (найбільша висота пострілу).

Траєкторія кидання тіл у площині має вигляд параболи (2.8), що спрямована гілками вниз і має вершину в точці над зброєю на найвищій висоті з даною початковою швидкістю і з розкидом на горизонтальному рівні[6].

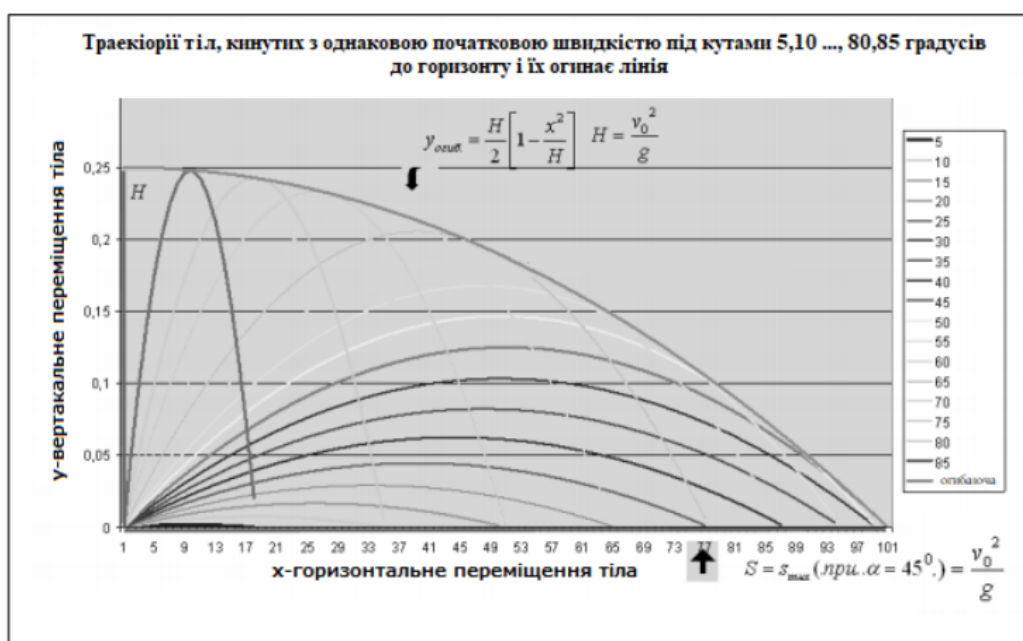


Рисунок 2.2 - Результати розрахунку траєкторії польоту тіла, що кинуте під кутом до горизонту

Далі, використовуючи співвідношення  $1/\cos^2 a = \operatorname{tg}^2 a$  (3.4) можна представити у вигляді квадратичного рівняння з відношенням до  $\operatorname{tg}$  кута кидання:

$$\frac{g * x^2}{2 * V_0^2} * \operatorname{tg}^2 a - x * \operatorname{tga} + \frac{g * x^2}{2 * V_0^2} + y = 0. \quad (2.9)$$

У зоні безпеки немає дійсного значення кута  $\alpha$ , а отже, немає дійсного значення  $\operatorname{tg}\alpha$  для рішення рівняння (2.9).

Таким чином, визначено, що дискримінант рівняння (2.9) матиме негативне значення:

$$D = x^2 - 4 \frac{gx^2}{2V_0^2} * \left( y + \frac{gx^2}{2V_0^2} \right) < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \left( \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{V_0^2} * x^2 \right), \quad (2.10)$$

Оскільки вирази (2.8) та (2.10) за змістом збігаються, то, якщо обернути параболу (2.8) навколо вертикальної вісі  $0y$ , то буде отримана шукана поверхня, яка обмежуватиме зону безпеки. Мається на увазі параболоїд обертання - область недосяжності куль поза даною поверхнею, під час проведення пострілів, що мають постійну початкову швидкість по усіх напрямках (рис. 2.3)[7].

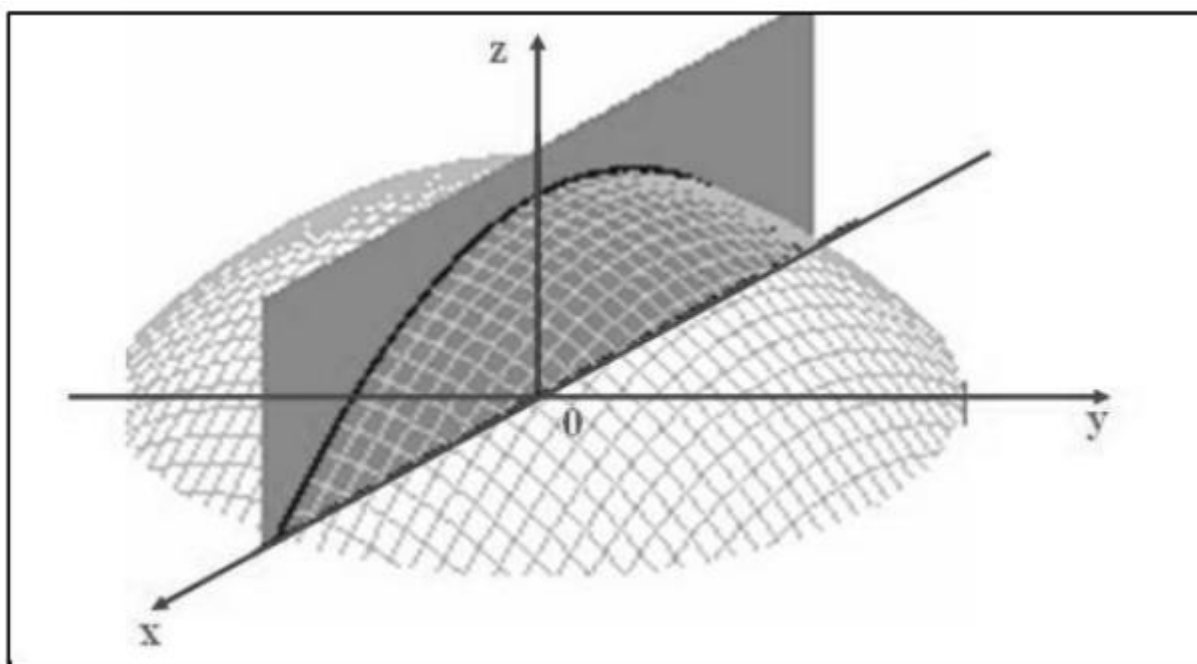


Рисунок 2.3 - Параболоїд обертання

## 2.3 Рух снаряду з урахуванням обертання

### 2.3.1 Розрахунок динаміки твердого тіла

Відомо, що снаряд, як тверде тіло, має шість ступенів свободи. З них три мають відношення до поступального руху, а саме - центру інерції тіла у тривимірному просторі. Інші три - обертальні по відношенню до центра інерції. Склад кінетичної енергії системи є: кінетична енергія руху всієї маси тіла, що зосереджений у центрі інерції та кінетична енергія відносного руху окремих частин системи. У випадку твердого тіла відносний рух - це обертання з однаковим для всіх частин значенням кутової швидкості  $\omega$ . І величина, і напрямок  $\omega$  можуть змінюватися з часом[8].

Необхідно обчислити кінетичну енергію обертання твердого тіла. Щільність  $\rho$  тіла може бути різною по всьому об'єму  $V$ , залежачи від координат:  $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(r)$ . Маса елемента обсягу  $dV$  дорівнює  $dm = \rho dV$ . Швидкість обертання  $v$  обчислюється згідно співвідношенню  $v = [\omega r]$ . Квадратними дужками позначено векторний твір – вектор, що чисельно дорівнює площі паралелограма, який побудований на векторах  $\omega$  і  $r$  та є перпендикулярним до площини, вектора. У свою чергу, вектор  $v$  спрямований у сторону площини паралелограма, звідки від вектору  $\omega$  до вектору  $r$  проводиться обхід проти годинникової стрілки.

Таким чином, кінетична енергія відносно об'єму дорівнює  $1/2 \int \rho [\omega * r]^2 dV$ . Кінетична енергія всього тіла представлятиметься інтегралом від даної величини за обсягом

$$T = \frac{1}{2} \int \rho [\vec{\omega} * \vec{r}]^2 dV. \quad (2.11)$$

Далі потрібно висловити квадрат векторного твору через компоненти:

$$[\vec{\omega} * \vec{r}]^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 a = \omega^2 r^2 \cos^2 a = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} * \vec{r})^2.$$

$\alpha$  - це кут, що побудовано між векторами  $\omega$  та  $r$ , отже  $(\omega r)$  – це скалярний добуток векторів  $r$  та  $\omega$ . Проте:

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 \Rightarrow (\omega^2 r^2) = (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)^2 = \omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 + 2\omega_x \omega_y xy + 2\omega_x \omega_z xz + 2\omega_y \omega_z yz.$$

Оскільки тіло тверде, складові  $\omega_x$   $\omega_y$   $\omega_z$  можуть бути за обсягом винесені з-під знаку інтеграла. Після чого, об'єднуючи члени, що залежать від компоненту  $\omega$ , можна отримати для  $T$ :

$$T = 1/2 \omega_x^2 \int p(y^2 + z^2)dV + 1/2 \omega_y^2 \int p(x^2 + z^2)dV + 1/2 \omega_z^2 \int p(x^2 + y^2)dV - \omega_x \omega_y \int pxydV - \omega_y \omega_z \int pyzdV - \omega_x \omega_z \int pxyzdV. \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Розрахунок моментів інерції

Усі інтеграли, що є у складі (2.12), залежать лише від геометрії тіла і розподілу щільності у ньому, проте рух тіла у системі відліку, що скріплена з тілом, на них не впливає. Отже, потрібно ввести наступні величини:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int p(y^2 + z^2)dV, & J_{yy} &= \int p(x^2 + z^2)dV, \\ J_{zz} &= \int p(x^2 + y^2)dV, \\ J_{xy} &= - \int pxydV, & J_{xz} &= - \int pxyzdV, & J_{yz} &= - \int pyzdV. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Величини, котрі мають однакові індекси - це моменти інерції, а ті, що мають різні індекси – твори інерції. У (3.13) кінетична енергія - це:

$$T = \frac{1}{2} (J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 + 2J_{xy}\omega_x\omega_y + 2J_{xz}\omega_x\omega_z + 2J_{yz}\omega_y\omega_z).$$

За теорією матриць доводиться теорема, яка становить, що наявне таке перетворення системи координат від  $Oxyz$  до  $Ox'y'z'$  (що є поворотом), яке дозволяє переходити виключно до моментів інерції у такий спосіб, щоб добуток інерції дорівнював 0. Це можна вважати зведенням матриці величин до діагонального вигляду. Тоді координатна система  $Ox'y'z'$  – система, побудована на головних осях інерції[9].

Таким чином у даній координатній системі значення кінетичної енергії може бути записано у такому вигляді:

$$T = \frac{1}{2} (J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2) \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Розрахунок моменту сил та моменту імпульсу твердого тіла

З посиланням на імпульсний момент матеріальної точки можна зробити узагальнення і обчислити проекцію імпульсного моменту твердого тіла:

$$\begin{aligned} M_x &= \int p[\vec{r} * \vec{v}]_x dV = \int p[\vec{r}[\vec{\omega} * \vec{r}]]_x dV \\ &= \int p(\omega_x^2 - x(\vec{\omega} * \vec{r})) dV = \\ \omega_x \int p(x^2 + z^2) dV - \omega_y \int pxy dV - \omega_z \int pxz dV \\ &= J_{xx}\omega_x + J_{xy} + J_{xz}\omega_z \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отриманий результат запишемо у векторній формі:

$$\vec{M} = \frac{dT}{d\vec{\omega}} \quad (2.16)$$

Таким чином, співвідношення (2.15) та (2.16) виражають той факт, що моментом кількості руху являється узагальнений імпульс, який пов'язується з обертанням. Тепер можна обчислити похідну від моменту кількості руху за часом і для матеріальної точки, і для твердого тіла:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \frac{d}{dt} [\vec{r} * \vec{p}] = [\dot{\vec{r}} * \vec{p}] + [\vec{r} * \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} * \vec{F}] \\ \vec{M} &= \int [\vec{r} * \vec{F}] dV = \vec{K}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\vec{K}$  (права сторона (3.17)) є результуючим моментом сил, що прикладені до тіла. Оскільки  $\vec{F}$  є силою тяжіння, то  $\vec{K}$  запишемо у вигляді:

$$\vec{K} = - \int pg[\vec{r} * \vec{z}_0] dV, \quad (2.18)$$

де  $\vec{z}_0$  - одиничний вектор за вертикальним напрямком.

Проте оскільки вектор  $\vec{z}_0$  є постійним, його потрібно винести за знак інтегралу:

$$\vec{K} = \vec{z}_0 \int p g \vec{r} dV. \quad (2.19)$$

У випадку, коли точка знаходиться у центрі інерції, значення інтегралу усіх трьох проекцій, що визначають центр інерції дорівнюватиме нулю. Тоді  $K = 0$ , отже момент кількості руху зберігається. Твердому тілу для збереження моменту кількості руху достатньо, щоб  $K = 0$ . Тоді у довільній механічній системі момент буде незмінним лише тоді, коли зовнішні сили відсутні.

### 2.3.4 Рівняння Ейлера

Відношення  $M$  та  $\omega$  виглядає за формулою (2.15). Зазвичай відносять рівняння до системи відліку, що скріплена з тілом, з огляду на прискорений рух даної системи. Зміна вектору  $M$  по відношенню до рухомих осей складається з таких складових: від зміни самого вектору та від руху осей. Таким чином, для вектору  $M$  дана зміна дорівнюватиме  $[\omega M]$ .

Далі осі координат потрібно спрямувати по головних осях інерції. По відношенню до моментів інерції вони є постійними. Саме тому похідна за часом  $M_x = J_{xx}\omega_x$  має вигляд:

$$M'_x = J_{xx}\omega'_x + \omega_y M_z - \omega_z M_y = J_{xx}\omega'_x + (J_{zz} - J_{yy})\omega_z \omega_y. \quad (2.20)$$

Прирівнявши даний вираз до значення проекції силового моменту на першу інерційну вісь і зробивши ту саму дію відповідно до інших осей, відбудеться отримання системи рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned}
 J_x \omega_x' + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= K_x, \\
 J_y \omega_y' + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= K_y, \\
 J_z \omega_z' + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= K_z.
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Після цього рівняння Ейлера стає можливо звести до квадратичних при довільних інтегралах руху у таких випадках:

- 1)  $K_1 = K_2 = K_3 = 0$ , тобто точка опори у центрі інерції;
- 2)  $J_y = J_z \neq J_x$ , з точкою опори, що лежить на осі симетрії.

### 2.3.5 Розрахунок кутів Ейлера

Відповідно до теорії твердих тіл, для обчислення положення у просторі твердого тіла, що має одну нерухому точку, а після цього отримання рівняння, що пояснюватиме рух даного тіла, необхідно три параметри. Отже, рух цього тіла відноситься до системи, побудованої на нерухомих осях  $Oxyz$ , які беруть початок у, відповідно, нерухомій точці  $O$ , що належить даному тілу. Окрім цього, у самому тілі потрібно взяти систему незмінно рухомих осей  $Ox'y'z'$ , які мають початок у тій же самій точці  $O$  та пов'язані з даним тілом (рис. 2.4).

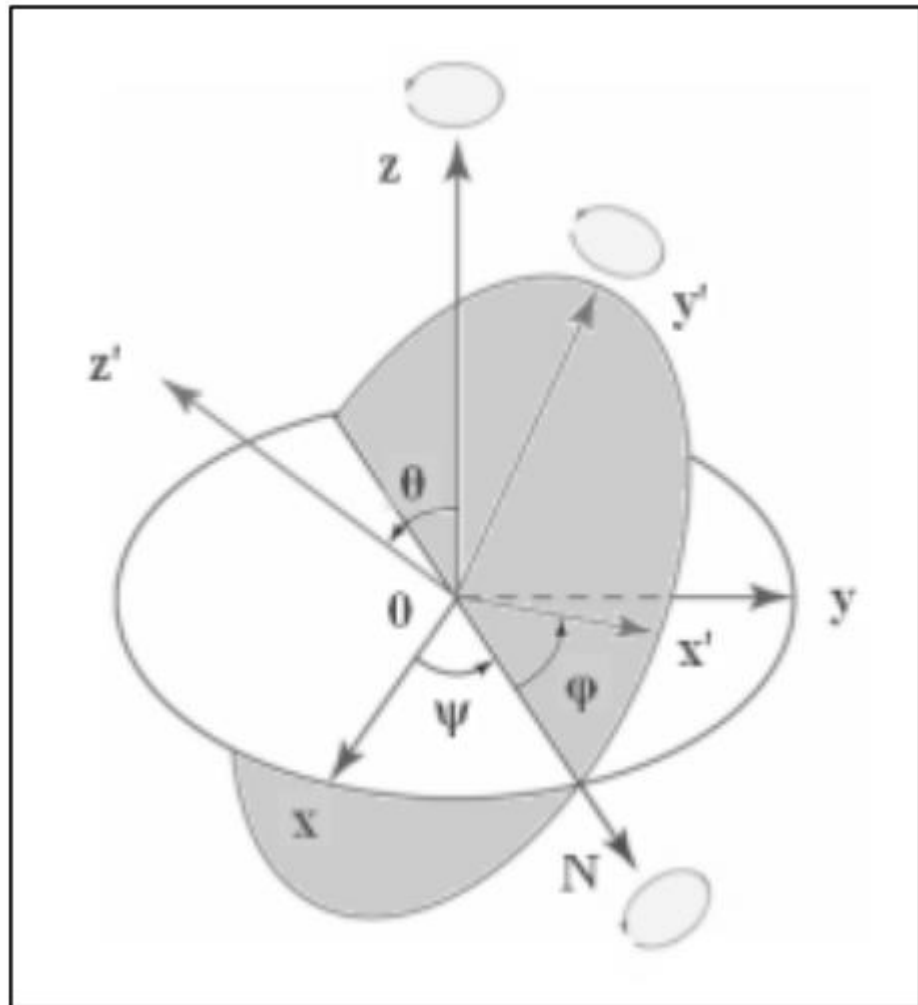


Рисунок 2.4 - Напрямок руху тіла, яке знаходиться у системі нерухомих осей

Згідно з аналітичною геометрією, положення рухомої системи  $Ox'y'z'$  відноситься до нерухомої системи, побудованої на осях  $Oxyz$  таким чином, що є можливість визначити за допомогою дев'яťох направляючими косинусів рухомих осей (косинусами таких кутів, що утворені між рухомими та нерухомими осями). Проте, значно простішим та зручнішим способом буде визначити положення системи  $Ox'y'z'$  по відношенню до осей  $Oxyz$  з використанням трьох кутів Ейлера. Згідно з даним способом, потрібно позначити лінію, котра відповідатиме перетину координатних систем  $Oxy$  та  $Ox'y'$  через  $ON$  та встановити на ній напрямок від  $O$  до  $N$ , тобто позитивний напрямок. Дана пряма  $ON$  має назву лінія вузлів.

Таким чином, кут, побудований між віссю  $Ox$  та лінією вузлів  $ON$  треба позначити через  $\psi$ . Даний кут лежатиме у площині  $Oxy$  та відраховуватиметься від

осі  $Ox$  у позитивному напрямку (тобто проти руху годинникової стрілки зі сторони позитивного напрямку осі  $z$ ). Тоді кут, що побудований між площинами  $Oxy$  та  $Ox'y'$  буде тим самим, що й кут, побудований на осях  $z$  і  $z'$ , який треба позначити через букву  $\theta$ . Даний кут буде відраховуватися від осі  $z$  у напрямку, що є протилежним руху годинникової стрілки, відносно додатного напрямку лінії вузлів.

Лінія  $ON$  перетинає площину  $Ozz'$  під прямою кутом. Тоді кут, що побудований на лінії вузлів  $ON$  та осі  $O'x'$  позначається літерою  $\varphi$ . Даний кут лежатиме у площині  $Ox'y'$  та відраховуватиметься у позитивному напрямку від лінії вузлів (проти годинникової стрілки, відносно додатного напрямку осі  $z'$ ).

Таким чином, три Ейлерові кути, а саме  $\psi$ ,  $\theta$  та  $\varphi$  мають відповідні назви:  $\psi$  – кут прецесії,  $\theta$  – кут нутації та відповідно  $\varphi$  називається кутом власного обертання.

Система осей  $Oxyz$  може бути переведена у положення  $Ox'y'z'$  за допомогою таких трьох обертань:

- 1) Повернути осьову систему  $Oxyz$  відносно осі  $z$  на кут  $\psi$ , після чого вісь  $Ox$  співпадатиме з лінією вузлів  $ON$ ;
- 2) Потім потрібно зробити оберт відносно осі  $ON$  на кут  $\theta$ , після чого вісь  $z$  набуде положення осі  $z'$ ;
- 3) Зробити оберт відносно осі  $z'$  на кут  $\varphi$ . Після цього вісь  $Ox$  (що до даного повороту збігалася з віссю  $ON$ ) набуде положення осі  $x'$ .

Протягом руху тіла дані кути є визначеними та безперервними функціями, параметром котрих є час, та які можна позначити таким чином:

$$\psi = f_1(t), \quad \theta = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (2.22)$$

Оскільки дані функції є відомими, кожного даного моменту часу можна з рівнянь (2.20) знайти кути  $\psi$ ,  $\theta$  та  $\varphi$ . Внаслідок цього можна знайти положення тіла у даний конкретний момент.

Саме тому рівняння (2.20) повністю визначають рух твердого тіла, яке має одну нерухому точку, та мають назву рівнянь руху твердого тіла навколо нерухомої точки.

### 2.3.7 Розрахунок обертання навколо нерухомої осі

Згідно з теоремою Шаля, будь-який рух вільного твердого тіла може розглядатися у вигляді комбінації двох рухів:

- поступального руху
- руху обертання.

У динаміці за точку зазвичай обирають центр маси тіла.. Тоді рух тіла має складатися з поступального руху, що визначається рухом центру мас, і руху тіла навколо центру мас, якщо вважати його нерухомою точкою відліку. Якщо знехтувати опором повітря, то центр мас тіла, кинутого під кутом до горизонту, рухається по параболі з прискоренням  $g$ .

Дана маси тіла  $m$ , його головними моментами інерції є  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . Сам снаряд після вильоту з рушниці обертається з великою швидкістю відносно осі симетрії, і ця вісь є головною віссю інерції для більшості типів куль вогнепальної зброї. Якщо вісь не обертається у просторі, імпульсу дорівнює  $M = J\omega$ , де  $J$  – інерційний момент відносно осі снаряда.

Під час спроби викликати поворот осі снаряда спостерігається явище, що отримало назву гіроскопічного ефекту: під дією сил, які, здавалося б, повинні були викликати поворот осі снаряда, вісь снаряда обертається навколо іншої осі, що лежить в перпендикулярній площині. Це явище забезпечує більшу стійкість руху снаряда(див. рис. 2.7).

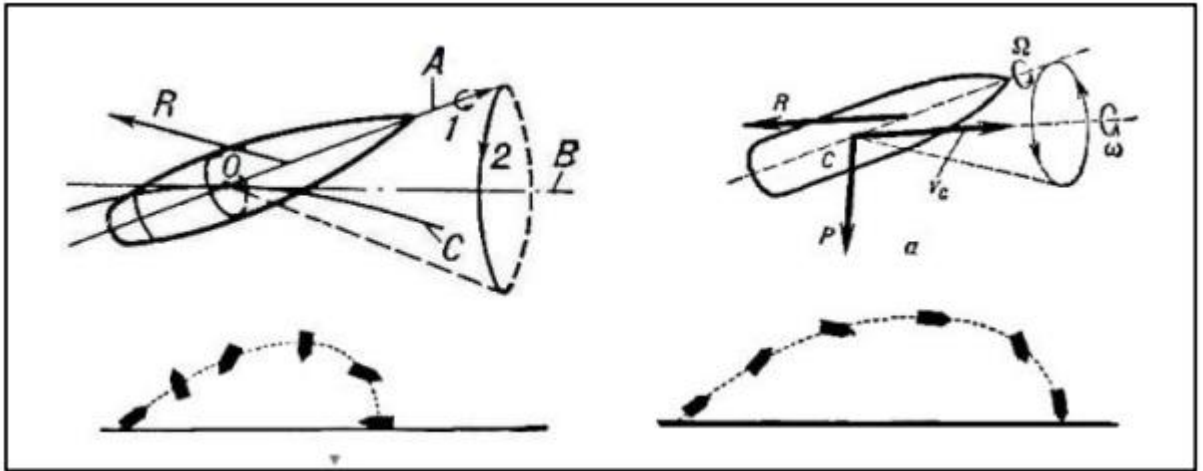


Рисунок 2.7 - Візуалізація гіроскопічного ефекту

Іншою особливістю даного руху є те, що в полі тяжіння вісь снаряда обертається відносно вертикалі, описуючи таким чином конус.

Такий снаряда називають прецесією. Кутову швидкість прецесії  $\omega_{\text{прц}}$  можна знайти за допомогою співвідношення:

$$\omega_{\text{прц}} = \frac{mgl}{J\omega}, \quad (2.23)$$

де  $l$  - відстань від точки відліку координат до центра інерції тіла.

Якщо точка відліку знаходиться в центрі маси снаряда, то момент сили тяжіння буде дорівнювати нулю, що є це випадком вільного симетричного снаряда. У зв'язку з законом збереження імпульсу, власне момент імпульсу в такого снаряда не змінюватиметься ні за значенням, ні за напрямком. Якщо надати снаряду обертання відносно осі симетрії, то вектори  $M$  і  $\omega$  матимуть один і той самий напрямок, що буде зберігатися необмежено довго. При виконанні відповідного розрахунку, маємо наступний результат. Вектор  $\omega$ , не змінюючись за величиною, проводить прецесію відносно напрямку вектора  $M$ , описуючи конус. У той самий час, вісь симетрії снаряда  $z$  проводить прецесію, причому вектори  $M$ , і  $\omega$ , а також вісь  $z$  увесь час знаходяться на одній площині. Таким чином, тіло обертається відносно осі  $z$ , а його кутова швидкість  $\omega_z = M_z/J_z$ , де  $M_z$  - проекція вектора  $M$  на

вісь  $z$ ,  $J_z$  – це інерційний момент снаряда щодо цієї осі. Кутова швидкість прецесії обчислюється як  $\omega_{\text{прц}} = M/J$ , де  $J$  - значення моментів одночасно і інерції  $J_x$ , і інерції  $J_y$ .

#### 2.4 Розрахунок руху снаряду з урахуванням опору середовища

У випадку, коли тверде тіло занурене в рідину або газ, вся його поверхня постійно контактує з частинками рідини або газу. Під час тіла, з боку рідини або газу на нього впливають протидійні сили. Ці сили називаються опір середовища. Так само як і у випадку сил тертя, опір середовища постійно спрямований проти руху.

У випадку падіння в повітрі, тіло рухається під впливом таких сил:

- постійна сила земного тяжіння  $P$ , спрямована вертикально вниз;
- сила опору повітря  $f$ , котра збільшується протягом падіння і спрямована протилежно, тобто вертикально вгору.

Сили тяжіння і опору повітря протилежно направлені, отже їх рівнодійна дорівнює різниці їх значень, і спочатку направлена вниз. Поки швидкість тіла, що падає, ще мала, невеликою буде і сила опору, проте ця сила зростатиме пропорційно до швидкості падіння.

При деякій швидкості сила опору стає рівною силі тяжіння, повністю компенсуючи прискорення вільного падіння, і далі тіло починає падати рівномірно. Це називається граничною швидкістю падіння. Гранична швидкість зворотно пропорційна щільності повітря.

Різниця в граничній швидкості тіл, що мають однакову форму, але різні розмірів пояснюється впливом поперечного розміру тіла, тобто його контактної поверхні на силу падіння.

Отже, перше рівняння руху матеріальної точки виглядатиме наступним чином:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_s S \vec{n}, \quad (2.24)$$

де  $k_s$  - це коефіцієнт пропорційності, що характеризує відношення до площі поперечного перетину  $S$ ,  
 $\vec{n}$  - одиничний вектор нормалі поверхні, спрямований паралельно напрямку руху.

З рівняння (2.24) можна дійти висновку, що при збільшенні розмірів тіла за умови збереження форми, площа його поперечного перерізу, а отже і сила опору повітря, зростатимуть повільніше за силу тяжіння, оскільки площа поперечного перерізу дорівнює квадрату розміру, тоді як сила тяжіння - кубу розміру тіла.

Сила опору виникає:

- через тертя повітря об поверхню тіла;
- через зміну руху потоку, котрий спричинено тілом.

У обуреному повітряному потоці, спричиненим присутністю тіла, тиск на передній стороні зростає, а на задній - знижується відносно середнього тиску в потоці. Таким чином, створюється різниця тисків, що створює перепону для руху.

Силу опору повітря, з якої набігаючий потік діє на тіло, можна розкласти на дві складові:

- спрямована паралельно швидкості  $v$  необуреного потоку силу  $x$ , яка називається лобовим опором;
- спрямована перпендикулярно до  $v$  сила  $y$ , що називається підйомною силою.

Співвідношення між опором тертя і опором тиску визначають значенням числа Рейнольдса. У даному випадку  $v$  - швидкість тіла щодо рідини (або швидкість потоку, що набігає на тіло). При малих  $Re$  (тобто при малих  $v$  і  $l$ ) основну роль грає

опір тертя, тому опором тиску можна знехтувати. З ростом в'язкості відносна роль сил тертя зростає. У міру збільшення  $Re$  роль опору тиску зростатиме усе більше. При великих значеннях  $Re$  в лобовому опорі переважають сили тиску.

Оскільки число Рейнольдса визначає характер сил, що діють на тіло в потоці рідини або газу, воно є критерієм подібності і в цьому випадку. Окрім того встановлено, що при невеликих швидкостях і розмірах тіл (тобто при малих  $Re$ , коли опір середовища обумовлено практично тільки силами тертя), модуль сили опору визначається формулою:

$$\vec{f} = k\eta l\vec{v}, \quad \vec{f} = 6\pi\eta r\vec{v}, \quad (2.25)$$

де  $k$  - коефіцієнт пропорційності, який залежить від форми тіла. Для кулі, якщо взяти в якості  $l$  його радіус  $r$ , коефіцієнт пропорційності дорівнює  $6\pi r$ .

Необхідно зауважити, що сила, що діє на тіло в повітряному потоці, залежить тільки від відносної швидкості рухів тіла і повітря і не залежить від того, чи рухається тіло в безвітряному повітрі або ж повітря рухається щодо нерухомого тіла (принцип відносності руху). Експериментально було встановлено, що при малих швидкостях сили опору  $F_{\text{опор}} = k_1 v$ , де  $k_1$  - коефіцієнт опору, визначається властивостями середовища і форми тіла ( $k_1 = 6\pi\eta r$ ). При більш високих швидкостях  $F_{\text{опор}} = k_2 v^2$ .

Далі, залежно від швидкості пропонуються аналітичні або числові методи розв'язання рівнянь типу (2.25) або

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_1\vec{v} \quad \text{або} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k_2 \frac{\vec{v}^3}{v}. \quad (2.26)$$

### 2.4.1 Залежність лінійної залежності від швидкості

Необхідно провести дослідження руху снаряда в разі дії сили опору середовища, лінійно залежить від швидкості руху тіла. У цьому випадку дійсне диференціальне рівняння (3.26а). Пропускаючи індекс у коефіцієнта  $k$ , потрібно переписати дані рівняння по координатним осях  $x$  і  $y$  та вказати початкові умови для координат і швидкостей:

$$\left\{ m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x, m \frac{dy}{dt} = -mg - kv_y. \right. \quad (2.27)$$

$$\text{Де } t = 0 \vec{r}_0\{0; 0\}, \text{ та } \vec{v}_0\{v_0 \cos \alpha; v_0 \sin \alpha\}. \quad (2.28)$$

Таким чином, рівняння (2.27) являються диференціальними рівняннями другого порядку із перемінними. Тоді необхідно вирішити рівняння (2.27х):

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \Rightarrow \ln v_x = -\frac{k}{m} t + C \Rightarrow v_x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \\ x(t) = -\frac{k}{m} e^{-\frac{kt}{m}} + C_2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  суть постійного інтегрування.

За початковими умовами, для  $C_1$  та  $C_2$  можна отримати:

$$0 = -\frac{m}{k} C_1 + C_2 \text{ та } v_0 \cos \alpha = C_1. \quad (2.30)$$

Тим часом закон руху по осі  $x$  і вираз  $v_x$  для горизонтальної складової швидкості руху тіла мають вигляд:

$$x(t) = \frac{m}{k} v_0 \left( -e^{-\frac{kt}{m}} \right) \cos \alpha \text{ та } v_x(t) = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} \cos \alpha. \quad (2.31)$$

Після цього потрібно зробити ті самі обчислення для рівняння (2.27у). Рішення неоднорідного рівняння для змінної  $v_y$  потрібно шукати у вигляді:

$$v_y = C e^{-\frac{kt}{m}} + At + B, \quad (2.32)$$

де  $A$ ,  $B$  і  $C$  - поки що невідомі постійні числа, які визначається так, щоб (2.32) задовольняло рівнянням (2.27у) і прирівняти коефіцієнти при однаковому ступені часу  $t$ :

$$-\frac{k}{m} C e^{-\frac{kt}{m}} + A + \frac{k}{m} \left( C e^{-\frac{kt}{m}} + At + B \right) = -g \Rightarrow A + \frac{k}{m} At + \frac{k}{m} B = -g, \\ t^0: A + \frac{k}{m} B = -g; \quad t^1: A = 0, \text{ отже } A = 0 \text{ та } B = -\frac{m}{k} g. \quad (2.33)$$

Тепер вираз (2.31) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = C e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k} g, \quad (2.34)$$

після інтегрування якого можна отримати:

$$y = -\frac{m}{k} C_1 e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k} gt + C_2, \quad (2.35)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – постійні інтегрування, які потрібно визначити, застосовуючи початкові умови:

$$v_0 \sin \alpha = C_1 - \frac{m}{k} g \text{ та } 0 = -\frac{m}{k} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) + C_2. \quad (2.36)$$

Тепер є можливість записати закон руху по осі  $y$  і вираз  $v_y$  для вертикальної складової швидкості:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{m}{k} \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) \left( -e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{m}{k} gt \text{ та} \\ v_y(t) &= \left( v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k} g \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{m}{k} g. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для того, щоб отримати рівняння траєкторії, потрібно вирішити рівняння (2.29) по відношенню часу  $t$  і поставити в перше рівняння (2.31) (тобто виключити час з цих рівнянь):

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\frac{kt}{m}} &= \frac{k}{mv_0 \cos \alpha} x \Rightarrow -\frac{m}{k} t = \ln \left( 1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \alpha} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{m}{k} \ln \frac{mv_0 \cos \alpha}{mv_0 \cos \alpha - kx} \\ y &= \left( t g \alpha + \frac{mg}{kv_0 \cos \alpha} \right) x + \frac{m^2}{k^2} g \ln \left( 1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

#### 2.4.2 Розрахунок квадратичної залежності від швидкості

Далі потрібно розглянути рух снаряда в разі дії сили опору середовища, у той час, коли він квадратично залежний від швидкості руху тіла (3.26а). Пропускаючи індекс у коефіцієнта  $k$ , потрібно переписати диференціальні рівняння по координатним осям  $x$  і  $y$  та вказати початкові умови (3.28) для координат і швидкостей:

$$\left\{ m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x^2, m \frac{dy}{dt} = -mg - kv_y^2. \right. \quad (2.39)$$

Потім потрібно двічі інтегрувати диференціальне рівняння (3.33х) з роздільними змінними:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{v_x^2} = -\frac{m}{k} dt \Rightarrow -\frac{1}{v_x} = -\frac{k}{m} t - C \Rightarrow v_x = \frac{1}{C + \frac{kt}{m}} \Rightarrow dx = \frac{1}{C + \frac{kt}{m}} dt \Rightarrow \\ x = \frac{m}{k} \ln \ln (C_1 + C_2 t) \text{ та } v_x = \frac{m}{k} \frac{C_2}{C_1 + C_2 t} \end{aligned} \quad (2.40)$$

де постійні інтегрування  $C_1$  та  $C_2$  визначаються з початкових умов (2.38):

$$C_1 = 1 \text{ та } C_2 = \frac{k}{m} v_0 \cos \alpha, \quad (2.41)$$

що дозволяє остаточно записати рівняння руху вздовж осі  $Ox$ :

$$x = \frac{m}{k} \ln \ln \left( 1 + \frac{k}{m} v_0 t \cos \alpha \right) \text{ та } v_x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{m + k v_0 t \cos \alpha}. \quad (2.42)$$

Дослідження руху тіла, яке є кинутим під кутом до горизонту у середовищі, де опір квадратично залежить від швидкості руху, дає можливість простежити за тим, що відбувається, коли цей опір все більше зменшується (див. рис. 2.15): у запропонованій теорії існує принцип відповідності - коли в завданні руху тіла в середовищі коефіцієнт опору приймається за 0, тоді виходить рух тіла матеріальної точки.

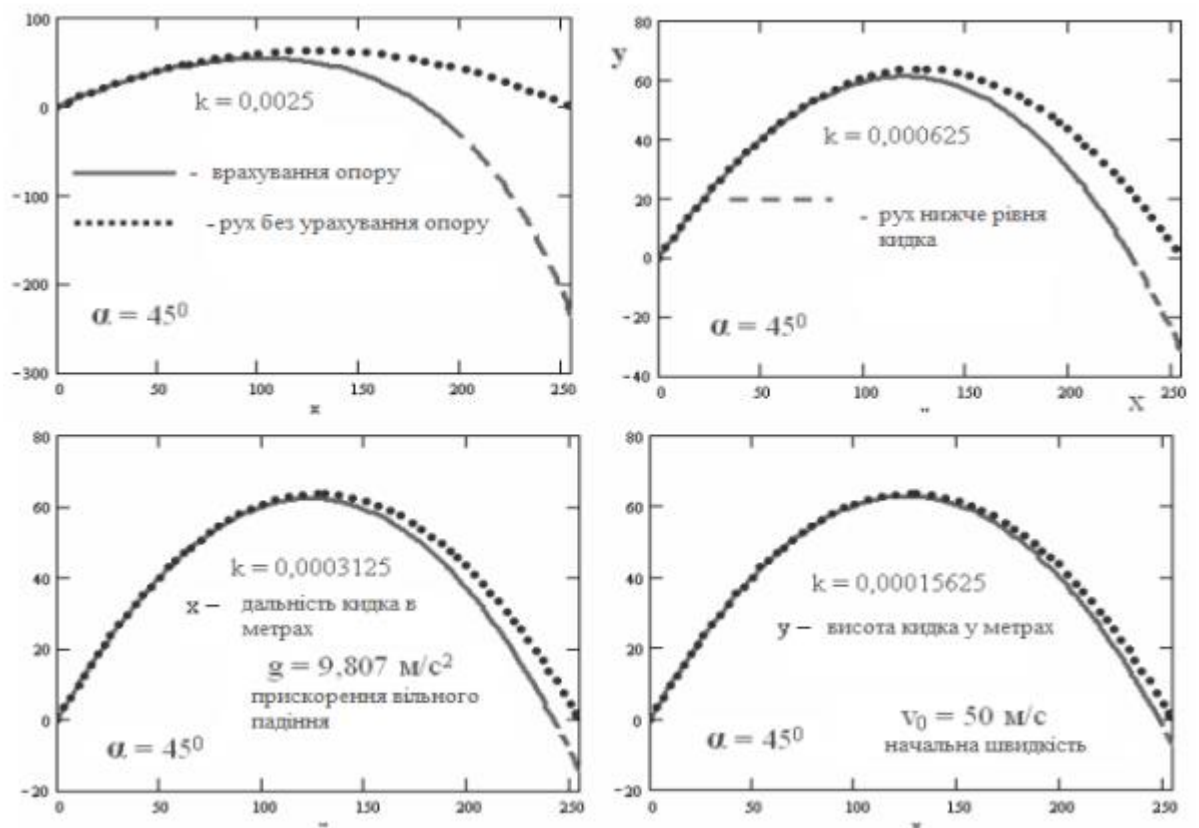


Рисунок 2.8 - Обертання тіла навколо нерухомої осі

#### 2.4.3 Врахування залежності від модуля швидкості

Раніше було описане припущення, що в натуральному вираженні сили опору залежність від швидкості руху снаряда розкладається за координатами по порядку, що дозволяє перейти до диференціальних рівнянь (2.27x), (2.27y), (2.33x), (2.33y) із перемінними. Насправді в натуральному вираженні сили опору, окрім напрямлення

швидкості необхідно враховувати модуль швидкості, а не проекції швидкості. Для того, щоб уточнити цю обставину, необхідно спроектувати силу опору в будь-якій точці траєкторії на координатні осі (див. рис. 3.9).

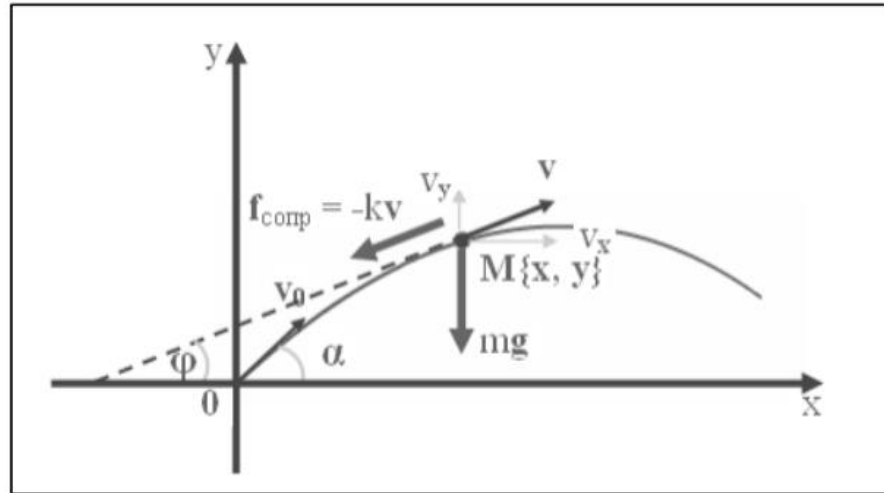


Рисунок 2.9 - Залежність від модуля швидкості

$f = -kv \Rightarrow f_x = -kvsin\varphi$ , де  $\varphi$  - це кут, який складає вектор швидкості з позитивним напрямом осі абсцис, а  $v = \sqrt{v_x^2} + \sqrt{v_y^2}$  - модуль швидкості, за таким розрахунком:

$$\begin{aligned} tg\varphi &= \frac{v_y}{v_x}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+v_y^2/v_x^2}} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{v_x}{v}, \\ \sin\varphi &= \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{v_y/v_x}{\sqrt{1+v_y^2/v_x^2}} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{v_y}{v}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

### 3 ФОРМУВАННЯ ВИМОГ ДО ПРОГРАМНОЇ СИСТЕМИ

Ціллю роботи є реалізація системи, що дозволяє створювати симуляції стрільби та зовнішньої балістики у віртуальній реальності із заданими параметрами навколишнього середовища та симульованої зброї. Програма має мету демонстрації візуалізації зовнішньої балістики кулі та покращення навичок користувачів.

Основний функціонал програми описані нижче

#### 3.1 Загальні відомості

Програмна система є тренажером-симулятором у віртуальній реальності з потенціалом для гейміфікації за принципом шутера тирового типу, оскільки загальні механіки взаємодії доволі подібні. Як симулятор, програмна система повинна надавати високореалістичну симуляцію та наближену до реальності взаємодію зі зброєю, для досягнення якої використовується технологія віртуальної реальності[10].

Система також надає можливість редагувати середовище симуляції для спостереження за його впливом на результат чи для виконання спеціальних вправ, як, наприклад, влучна стрільба на дальні дистанції за різних атмосферних умов.

Програмна система розрахована на аудиторію 18+, яка зацікавлена у вивченні зовнішньої балістики або набутті навичок влучної стрільби на середні чи дальні дистанції, наприклад в порядку проходження військової служби.

Для розробки програмної частини були використані такі технології – Unreal Engine 4 для рендерінгу оточення у віртуальній реальності, та Blender для створення моделей зброї. Фізична модель зовнішньої балістики реалізована мовою програмування C++

### 3.2 Опис функціоналу

Програмна система надає два режими симуляції: тренажер у віртуальній реальності та контрольовану симуляцію для РС на кшталт автоматичної стійки для балістичного тестування.

Перший режим дозволяє отримати досвід стрільби, наближений до реальності



Рисунок 3.1 – гра у жанрі shooter для гарнітури Oculus Quest

Такий інтерфейс, хоч і надає ефект присутності, має певні недоліки, коли мова йде про повторюваність результатів стрільби та вивчення впливу середовища на поведінку кулі[11].

Для цього система має другий, демонстраційний режим – він надає можливість точно задати параметри як середовища – висоту над рівнем моря, вологість повітря, швидкість та напрям вітру, так і зброї – кут пострілу, балістичні характеристики зброї та патрону. Також цей режим має надавати змогу спостерігати за рухом кулі у реальному часі, відображаючи траєкторію руху та кінетичну енергію кулі на даний момент руху.

### 3.3 Інструменти програмної реалізації

C++ – універсальна мова програмування високого рівня з підтримкою багатопоточного програмування та відносно високою швидкістю .

Blueprint - це система візуального скриптингу, який являється візуальним інтерфейсом для створення елементів на ігровому рушії Unreal Engine. Ця система є надбудовою над класичним C++ і працює за допомогою віртуальної машини, що дозволяє скоротити час компіляції, проте негативно впливає на оптимізацію алгоритмів, що потребують значного навантаження[12].

Unreal Engine - ігровий рушій, що розробляється та підтримується компанією Epic Games. Використовує мови програмування C++ та Blueprints і надає доступ до високоякісних засобів рендерінгу трьохвимірних середовищ, у тому числі для віртуальної реальності, а також розширюваних бібліотек фізичної симуляції, що дозволяє уникнути написання зайвого коду при відображенні кулі у середовищі рушія[13].

### 3.4 Інструменти апаратної реалізації

Для реалізації даної системи було обрано платформу PC та шолом віртуальної реальності Oculus Rift як основний пристрій вводу/виводу завдяки можливості винести обчислення рендерінгу та симуляції на комп'ютер, що дає більшу гнучкість взаємодії та кращий рендерінг тривимірного середовища, порівняно з повністю портативними гарнітурами[14].

Ще одним фактором у виборі стала ергономіка його контролеру, що приблизно повторює механізм роботи вогнепальної зброї для кращого ефекту занурення.



Рисунок 3.2 – контролер Oculus Touch

Oculus Touch є найбільш придатним базовим контролером для даної цілі з точки зору зручності, проте не єдиним. Технічно, для коректної роботи системи вирішальним фактором є наявність у контролера шести ступеней свободи – відслідковування його переміщення у тривимірному просторі відносно контрольних станцій чи самої гарнітури, та відслідковування зміни нахилу по трьом осям. Отже, програмне забезпечення може бути запущене і на, наприклад, HTC Vive, проте з меншим рівнем інтуїтивності та комфорту.

Також можлива додаткова модифікація контролерів, як Oculus, так і інших систем, за допомогою спеціальних макетів-насадок, щоб краще передати тактильні відчуття і вагу зброї. Подібні насадки можуть бути як куплені додатково, так і роздруковані на 3Д-принтері.

Фіксація насадки може відбуватися як за допомогою магнітів (див. рис. 3.3), так і за допомогою резинових чохлаів, в залежності від потреб та вподобань.



Рисунок 3.3 – макет-насадка на контролер Oculus Touch з магнітним кріпленням

Для поліпшення реалістичності, може бути розроблений спеціальний контролер для імітації окремих моделей зброї, щоб відтворювати конкретні габарити, точну поведінку рухомих елементів та віддачу, проте подібна розробка має відбуватися з дозволу та за консультацією з компетентними органами.

#### 4 ВИКОРИСТАННЯ ДОСЛІДЖЕНИХ МЕТОДІВ

Виходячи з інформації, що була отримана під час дослідження балістики, було розроблено клас `UAdvProjectileMovementComponent` на основі класу калькулятора балістичної фізики `UProjectileMovementComponent`, що міститься в `Unreal Engine` та в базовому вигляді має методи обчислення руху тіла кинутого під кутом до горизонту.

Цей калькулятор було розширено з урахуванням опору середовища і характеристик самої кулі. Наприклад, виходячи з результатів дослідження, сила опору повітря дорівнює  $F_c = -kv^{\rightarrow}$ . Згідно основного закону динаміки, а отже прискорення, спричинене силою опору буде дорівнювати  $a = g^{\rightarrow} - k/m * v^{\rightarrow}$

Положення кулі у просторі у певний момент часу та зміна її швидкості задаються наступними формулами, де  $\vec{r}(t)$  – радіальний вектор положення,  $\vec{v}(t)$  – вектор швидкості,  $dt$  – різниця порівняно з останнім моментом часу

$$\begin{aligned}\vec{r}(t + dt) &= \vec{r}(t) + \vec{v}(t) dt \\ \vec{v}(t + dt) &= \vec{v}(t) + \left( \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v}(t) \right) dt\end{aligned}\tag{4.1}$$

В умовах надзвукових швидкостей, залежність опору повітря від власне швидкості має нелінійний характер, що пов'язане з особливостями фізики повітряних потоків при перетині звукового бар'єру.

Зазвичай крива залежності  $k = f(|\vec{v}|)$  вираховується при тестуванні боєприпасу, тому в симуляції вона отримується разом з іншими характеристиками кулі

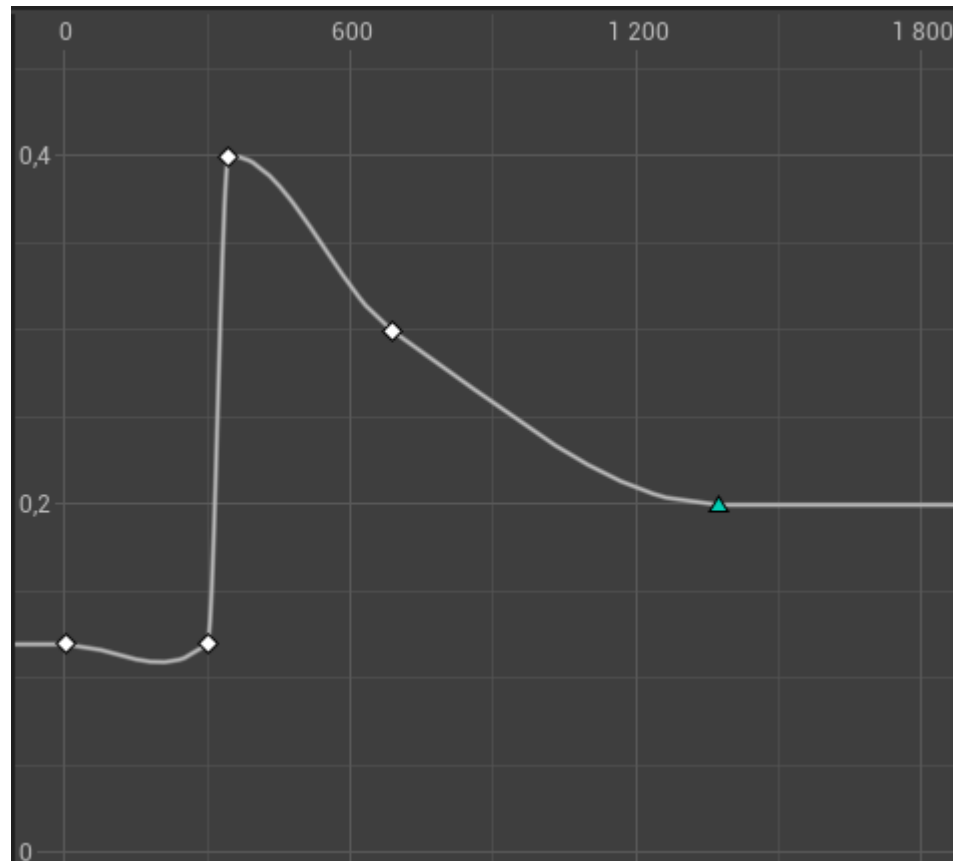


Рисунок 4.1 – крива залежності коефіцієнту опору від швидкості еталонної кулі типу G7

Оскільки симуляція проводиться в реальному часі, важливо врахувати різницю в обчислювальних потужностях різних комп'ютерів. Спеціально для подібних випадків рушій Unreal Engine має глобальну функцію `GetWorld()->GetDeltaSeconds()`, що дозволяє отримати різницю в часі між ітераціями симуляції. Тому при відтворенні траєкторії кулі в реальному часі обчислювальна здатність комп'ютера впливатиме не на точність результату, а на роздільну здатність – тобто, чим потужніше комп'ютер, тим більше точок траєкторії буде прораховано.

Для обчислення опору середовища  $c_d$ , використовується наступна формула:

$$C_d = \frac{2F_d k(v)}{\rho v^2 A} \quad (4.2)$$

Де  $F_d$  – сила опору (Н),

$\rho$  – густина повітря (кг/м<sup>3</sup>),

$k$  – коефіцієнт гіперзвукового опору,

$v$  – швидкість кулі (м/с),

$A$  – ефективна площа контактної поверхні кулі (м<sup>2</sup>), зазвичай вказана у характеристиках боєприпасу.

Також варто врахувати, що рушій зберігає відстані в сантиметрах, а не в метрах, тому відстані чи швидкості, отримані з рушія мають бути додатково переведені в систему СІ

Для візуалізації траєкторії використовується функція DrawLine(), яка розроблена за допомогою скриптової мови Blueprints.

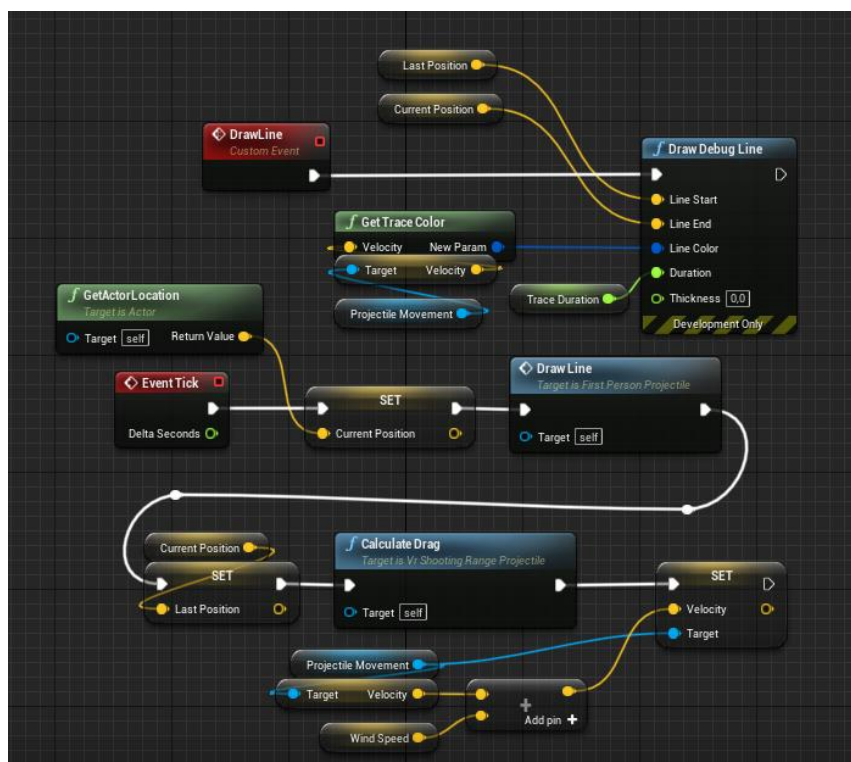


Рисунок 4.2 – функція DrawLine

Вона спрацьовує на кожну ітерацію алгоритму симулятора по прорахованим точкам траєкторії.

В залежності від швидкості кулі, а отже і від її кінетичної енергії на даний момент часу, колір лінії змінюється від червоного (кінетична енергія на момент пострілу) до білого (вільне падіння)

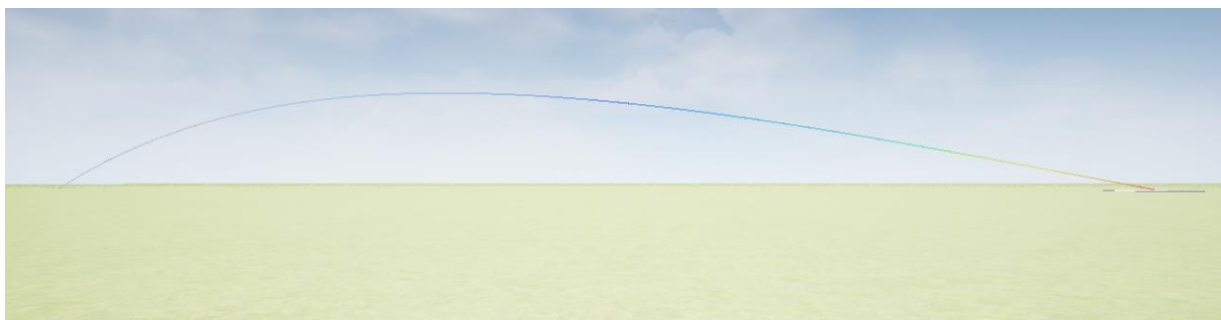


Рисунок 4.3 – повна траєкторія польоту кулі

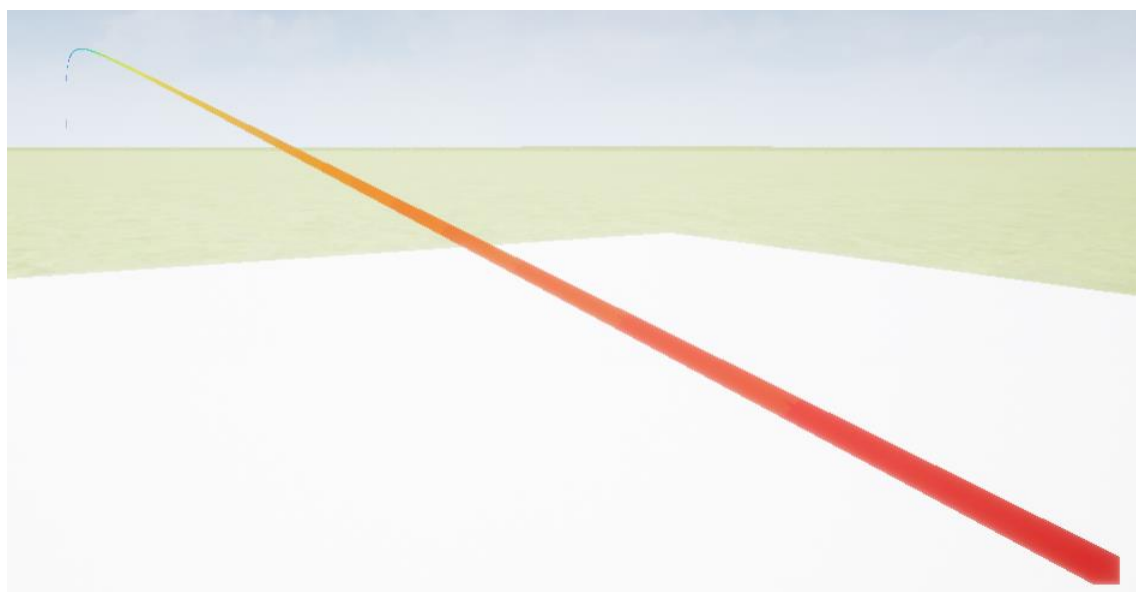


Рисунок 4.4 – градієнт швидкості на початку траєкторії

Симуляція також має опціональне відтворення дульного розсіювання снарядів, в залежності від конкретних потреб. Наприклад, під час вправ, наближених до реальності, матиме сенс враховувати подібні похибки. В демонстраціях балістики на прикладі умовно-ідеальної зброї – ні. Конус розсіювання залежить від характеристик, власне зброї, і може бути налаштований так, щоб дорівнювати нулю.

Для реалізації випадкового розсіювання у даному симуляторі використовується нормальний розподіл Гаусса, щоб забезпечити відносту рідкість максимального відхилення.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.3)$$

Де  $\mu$  – середнє значення (математичне очікування, або ж відсутність відхилення),  
 $\sigma$  – середньоквадратичне відхилення)

## ВИСНОВКИ

Під час роботи над магістерською роботою було розроблено систему, що дозволяє створювати симуляції стрільби та зовнішньої у віртуальній реальності із заданими параметрами навколишнього середовища та симульованої зброї, записувати симуляції для подальшого аналізу.

Розробка велась з використанням рушія Unreal Engine 4. Фізична симуляція балістики була реалізована з використанням мови програмування C++. Також використовувалося середовище розробки Visual studio для редагування коду C++.

Розроблене програмне забезпечення є лише прототипом та в поточному стані не може використовуватися в реальних умовах у зв'язку з недостатнім тестуванням на відповідність вимогам цільових користувачів.

У майбутньому у рамках даної системи є можливість створення додаткових функцій, які, згідно опитуванням та результатам тестувань, проведених серед цільової аудиторії, будуть вважатися бажаним або необхідним доповненням до існуючих можливостей.

Програмний продукт дозволяє виконувати такі базові функції, як створення карт для симуляції, симуляція пострілу з вогнепальної зброї, відстежування траєкторії кулі.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Maj. John Plaster *Ultimate Sniper: An Advanced Training Manual For Military And Police Snipers*. Paladin Press, 2007 – 540 с.
2. <https://bisimulations.com/products/vbs3>
3. Mitch McCaffrey *Unreal Engine VR Cookbook: Developing Virtual Reality with UE4*. Addison-Wesley Professional, 2017 – 406 с.
4. Robert Forker *Ammo & Ballistics 6th Edition: For Hunters, Shooters, and Collector*. Safari Press, 2017 – 544 p.
5. Смит Д. *Элементарные шаблоны проектирования.*: Пер. с англ. — М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2013. — 304 с.
6. Grant Palmer *Physics for Game Programmers*, Apress, 2005 – 457 с.
7. John Blain *The Complete Guide to Blender Graphics*. CRC Press, 2017 – 557 с
8. Chowdhury K. *Mastering Visual Studio 2017*. New York, 2017. 466 с.
9. Граве І. П., *Внутрішня балістика. Піродінаміка*, в. 1-4, Л., 1933-37
10. *Навчання C ++ шляхом створення ігор з UE4 by William Sherif (Автор) 344 стор.* February 24, 2015
11. *Unreal Engine розробки ігор за допомогою Blueprints. 354 стор.* автор: Нікола Валкасара . 29, 2015.
12. Uzayr S. b. *Using Blueprints. Mastering Unreal Engine*. Boca Raton, 2022. P. 87–134. URL: <https://doi.org/10.1201/9781003214731-3> (date of access: 13.03.2022).
13. Clagett R. *After the echo: A survival guide for police & military snipers*. Shawnee Mission, Kan : Varro Press, 2003. 147 p.
14. Matthews C. W. *Shoot Better II: Balistics Tables*. Bill Matthews, 1990.
15. Smelyakov K., Chupryna A., Kolisnyk M., Ponomarenko O. *Search by Image Engine Using Local Feature Detectors // 2020 IEEE Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream), 30 April 2020, Vilnius, Lithuania.* – P. 1-4. DOI: 10.1109/eStream50540.2020.9108884

16. Oleksandr Topchii, Oleksandr Samantsov, Oksana Mazurova, Mariia Shirokopetleva. A Study of Optimization Models for Creation of Artificial Intelligence for The Computer Game in The Tower Defense Genre // Problem of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T'2020), Kharkiv, Ukraine.- 6-9, October 2020. doi: 10.1109/PICST51311.2020.9468057
17. I.D. Gorbenko, A.N. Alekseychuk, O.G. Kachko, M.V. Yesina, S.O. Kandy V.A. Ponomar. Calculation of general parameters for NTRU Prime Ukraine of 6-7 levels of stability USA Telecommunications and Radio Engineering, 2019. – Volume 78, Issue 4 – P. 327-340. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v78.i4.40
18. Oleksandr Ponomarenko, Kirill Smelyakov, Anastasiya Chupryna, Dariia Tovchyrechko and Igor Ruban. Local feature detectors performance analysis on digital image Smelyakov, K. , Tovchyrechko, D., Ruban, I., Chupryna, A., Ponomarenko, O. 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference: Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2019 - Proceedings, 2019, c. 644-648, 9061331
19. V. Golyan, N. Golyan, K Halchenko. Synthesis of a VHDL-model of Gas Discharge Circuit of Gas Laser 2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers CAOL\*2019 with Scientific Workshop “Data Science in Modern Optoelectronics and Lasers Engineering, Sozopol, Bulgaria. – 2019. – P. 570-573