



Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Сидорову Володимиру Володимировичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Комп'ютерне моделювання довговічності елементів  
конструкцій з дефектами

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математичні моделі напружено-деформованого стану  
тіл з тріщинами

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій \_\_\_\_\_

1. Актуальність теми роботи \_\_\_\_\_

2. Постановка задачі \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз предметної області \_\_\_\_\_

4. Метод чисельного аналізу \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Здобувач \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Стрельнікова О.О.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 67 с., 1 табл., 10 рис., 1 дод., 15 джерел.

### ГІПЕРСИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ЗРОСТАННЯ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ, КРИТЕРІЙ ПЕРІСА, РОЗВИНЕННЯ ТРІЩИНИ

Об'єкт дослідження – зростання втомної тріщини під дією періодичних навантажень

Мета роботи – створення методики дослідження розвинення втомних тріщин та оцінки кількості циклів до руйнування конструктивного елемента під дією періодичних навантажень

Методи дослідження – методи граничних інтегральних рівнянь, методи скінченних та граничних елементів, методи механіки втомного руйнування .

Для дослідження розвитку тріщин в елементах конструкцій силових машин розроблено комплексні чисельні методи та комп'ютерну техніку, які забезпечують високу точність і надійність отриманих результатів. Алгоритм дослідження включає кілька ключових етапів. Спочатку визначається напружено-деформований стан елементів конструкції за заданих навантажень, що дозволяє виявити зони з найбільшою концентрацією напружень, які є потенційними місцями зародження та розвитку тріщин. У цих зонах розміщується модельна тріщина, яка відображає реалістичні умови пошкоджень.

Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщин здійснюється за допомогою чисельних методів, які включають методи скінченних і граничних елементів. Цей підхід дозволяє точно визначати поведінку тріщини під дією навантажень. Для точного розрахунку КІН використовується розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що забезпечує високу точність моделювання навіть у складних геометричних конфігураціях.

Додатково, проведено розрахунок втомної тріщини, що дозволяє визначити кількість циклів до руйнування конструкційного елемента. У якості ета-

лонного тесту розглянута тріщина у формі круга в необмеженому просторі, що дає можливість оцінити коректність і точність запропонованих методів.

Для оцінки напружено-деформованого стану і міцності елементу паротурбінного двигуна проведено детальний аналіз. Досліджено втомну поведінку цього елемента конструкції при циклічному навантаженні, що дозволяє визначити його залишковий ресурс.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості точного прогнозування залишкового ресурсу конструкцій з урахуванням тріщиноподібних дефектів. Новизна підходу полягає у використанні методів скінченних і граничних елементів для отримання уточнених оцінок залишкового ресурсу, що робить цей підхід актуальним для сучасного машинобудування та інших галузей, де важливо забезпечити довговічність та надійність конструкцій під дією циклічних навантажень.

## ABSTRACT

Introductory note: 67 pages, 1 table, 10 figures, 1 appendix, 15 sources.

### CRACK PROPAGATION, FATIGUE CRACK GROWTH, HYPER-SINGULAR INTEGRAL EQUATION, PERIS'S CRITERIA

Object of research – fatigue crack growth under the action of periodic loads.

Purpose of work – developing the methodology for studying the development of fatigue cracks and estimating the number of cycles to failure of a structural element under the action of periodic loads

Methods of research – methods of boundary integral equations, finite and boundary element methods, methods of fatigue fracture mechanics.

To study the development of cracks in the structural elements of power machines, complex numerical methods and computer technology have been developed, which ensure high accuracy and reliability of the results obtained. The research algorithm includes several key stages. First, the stress-strain state of the structural elements under given loads is determined, which allows us to identify zones with the highest stress concentration, which are potential places of crack initiation and development. A model crack is placed in these zones, reflecting realistic damage conditions.

The calculation of stress intensity coefficients (SIF) at the crack tips is carried out using numerical methods, which include finite and boundary element methods. This approach allows us to accurately determine the behaviour of the crack under the action of loads. For the accurate calculation of the SIF, the solution of hypersingular integral equations is used, which ensures high modelling accuracy even in complex geometric configurations.

Additionally, a fatigue crack calculation was performed, which allows determining the number of cycles before the structural element fails. A circular crack in an unlimited space was considered as a reference test, which allows assessing the

correctness and accuracy of the proposed methods.

A detailed analysis was performed to assess the stress-strain state and strength of a steam turbine engine element. The fatigue behaviour of this structural element under cyclic loading was studied, which allows determining its residual life.

The practical significance of the results obtained lies in the possibility of accurately predicting the residual life of structures, considering crack-like defects. The novelty of the approach lies in the use of finite and boundary element methods to obtain refined estimates of the residual life, which makes this approach relevant for modern mechanical engineering and other industries where it is important to ensure the durability and reliability of structures under the action of cyclic loads.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних позначок, одиниць і термінів .....	10
Вступ .....	11
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження .....	13
1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами .....	13
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами.....	15
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі .....	16
1.4 Постановка задач дослідження .....	17
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання .....	18
2.1 Методи теорії потенціалу .....	18
2.2 Методи сингулярних та гіперсингулярних рівнянь.....	24
2.3 Застосування методів скінченних та граничних елементів .....	35
2.4 Модифікована залежність Періса .....	40
Висновки за розділом 2 .....	43
3 Програмна реалізація .....	45
3.1 Комп'ютерний аналіз розв'язання гіперсингулярних рівнянь .....	45
3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами.....	46
3.3 Опис програми .....	47
Висновки за розділом 3 .....	48
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз .....	50
4.1 Обчислювальний експеримент для плоских областей з прямолінійними тріщинами .....	50
4.2 Обчислювальний експеримент для плоскої області з отвором.....	53
Висновки за розділом 4 .....	57

	9
Висновки .....	59
Перелік джерел посилання .....	61
Додаток А Лістинг програми .....	63

**ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ**

МКЕ – метод скінченних елементів;

МГЕ – метод граничних елементів;

ГІР – гіперсингулярні інтегральні рівняння;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;

КІН – коефіцієнт інтенсивності напружень;

$E$  – модуль пружності, МПа;

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** В зв'язку з виробленням ресурсу гідротурбінного, нафтохімічного, енергетичного обладнання на багатьох промислових підприємствах України, при його модернізації виникає питання про можливість продовження терміну служби окремих вузлів і деталей і необхідності заміни морально і фізично застарілого обладнання для забезпечення експлуатаційної надійності агрегатів в процесі подальшої експлуатації при виконанні гарантій по потужності і ККД.

Оскільки обладнання працює тривалий час, то зазвичай його елементи можуть бути послаблені різного роду мікродефектами. Розвинення цих дефектів може призвести до виходу з ладу або до повного руйнування досліджуваного конструктивного елементу. Виникає питання оцінки часу до руйнування цих елементів під дією циклічних навантажень. Аналогічна задача стосується проблем безпечного тривалого транспортування елементів конструкції за наявності реальних циклограм перевезень. Задача визначення довговічності конструкції з урахуванням тріщиностійкості полягає у визначенні часу (кількості циклів), після якого тріщина підростає до критичного розміру, і відбувається руйнування. Зазвичай заздалегідь невідомо, які саме дефекти наявні в досліджуваному елементі конструкції, оскільки не завжди мікродефекти можуть бути виявлені навіть методами ультразвукового сканування. Тому актуальним є питання вивчення впливу дефектів різної конфігурації та розмірів на довговічність конструкції з метою з'ясування найбільш небезпечних та визначення найменшого часу до руйнування. Цей час може слугувати як для оцінки залишкового ресурсу, так і для визначення термінів міжремонтного періоду обладнання.

Відомо, що невеликі тріщини, виявити які не є можливим при візуальному огляді конструкції під час ремонту, під дією знакозмінних навантажень, поступово розвиваючись, призводять до часткового або повного руйнування конструктивного елементу.

Втомні тріщини мають тенденцію розташовуватися поблизу несучих по-

верхонь. Виникають вони внаслідок корозії, інтенсивних температурних і силових навантажень. Новоутворена тріщина починає повільно рости, навіть якщо додані навантаження не перевищують номінальних значень. Далі, якщо досягається критична довжина тріщини, несучий елемент раптово отримує величезну кількість кінетичної енергії, що призводить до катастрофічного руйнування всієї конструкції. Цим пояснюється великий інтерес до вивчення втомних тріщин в останнє десятиліття.

**Мета і завдання кваліфікаційної роботи.** Метою кваліфікаційної роботи є створення методики дослідження розвинення втомних тріщин та оцінки кількості циклів до руйнування конструктивного елемента під дією періодичних навантажень. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами»;
- провести зведення задач визначення концентрації напружень в тілах з тріщинами до гіперсингулярних інтегральних рівнянь;
- проаналізувати довговічність лопатки паротурбінного двигуна з дефектами.

*Об'єктом дослідження* є зростання втомної тріщини під дією періодичних навантажень

*Предметом дослідження* є довговічність реальних енергетичних машин

**Методи дослідження.** У кваліфікаційній роботі використовуються методи граничних інтегральних рівнянь, методи скінченних та граничних елементів, методи механіки втомного руйнування.

**Публікації.** Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на конференції "Learning and Teaching: In The World After the War"[1].

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами

В зв'язку з виробленням ресурсу гідротурбінного, нафтохімічного, енергетичного обладнання на багатьох промислових підприємствах України, при його модернізації виникає питання про можливість продовження терміну служби окремих вузлів і деталей і необхідності заміни морально і фізично застарілого обладнання для забезпечення експлуатаційної надійності агрегатів в процесі подальшої експлуатації при виконанні гарантій по потужності і ККД.

Оскільки обладнання працює тривалий час, то зазвичай його елементи можуть бути послаблені різного роду мікродефектами. Розвинення цих дефектів може призвести до виходу з ладу або до повного руйнування досліджуваного конструктивного елементу. Виникає питання оцінки часу до руйнування цих елементів під дією циклічних навантажень. Аналогічна задача стосується проблем безпечного тривалого транспортування елементів конструкції за наявності реальних циклограм перевезень. Задача визначення довговічності конструкції з урахуванням тріщиностійкості полягає у визначенні часу (кількості циклів), після якого тріщина підростає до критичного розміру, і відбувається руйнування. Зазвичай заздалегідь невідомо, які саме дефекти наявні в досліджуваному елементі конструкції, оскільки не завжди мікродефекти можуть бути виявлені навіть методами ультразвукового сканування. Тому актуальним є питання вивчення впливу дефектів різної конфігурації та розмірів на довговічність конструкції з метою з'ясування найбільш небезпечних та визначення найменшого часу до руйнування. Цей час може слугувати як для оцінки залишкового ресурсу, так і для визначення термінів міжремонтного періоду обладнання.

Відомо, що невеликі тріщини, виявити які не є можливим при візуальному огляді конструкції під час ремонту, під дією знакозмінних навантажень, по-

ступово розвиваючись, призводять до часткового або повного руйнування конструктивного елемента.

Втомні тріщини мають тенденцію розташовуватися поблизу несучих поверхонь. Виникають вони внаслідок корозії, інтенсивних температурних і силових навантажень. Новоутворена тріщина починає повільно рости, навіть якщо додані навантаження не перевищують номінальних значень. Далі, якщо досягається критична довжина тріщини, несучий елемент раптово отримує величезну кількість кінетичної енергії, що призводить до катастрофічного руйнування всієї конструкції. Цим пояснюється великий інтерес до вивчення втомних тріщин в останнє десятиліття.

До теперішнього часу накопичений значний обсяг експериментальних і теоретичних досліджень закономірностей росту тріщин під дією змінних циклічних навантажень. Тріщиностійкості нафто та газопроводів присвячено дисертаційну працю [1-5].

В [6,7] наведено опис бази даних та надано класифікацію тріщин в трубопроводах, робота присвячена оцінці залишкового ресурсу авіаційного обладнання. Новітні дослідження з теорії тріщин та включень, що утворюють скупчення, слугують фундаментом для створення сучасних технологій визначення залишкового ресурсу.

В роботі [8] вивчаються взаємодіючі поверхневі тріщини, в [6] досліджено вплив ланцюжка пор на міцність зварного шва, в [5] розглянуто крайову задачу для ланцюжка тріщин при температурному навантаженні.

Робота [9] присвячена вивченню довговічності вала гідротурбіни з поверхневими тріщинами. Цей перелік актуальних наукових праць можна продовжити, тобто існує велика кількість робіт, присвячених дослідженню довговічності конструкцій за наявності різного роду дефектів. На цей час виникла необхідність порівняльного аналізу різних модельних дефектів при визначенні довговічності елементів конструкцій.

## 1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання довговічності елементів конструкцій з дефектами

Задачі механіки руйнування сприяли інтенсивному розвитку теорії одно-мірних сингулярних рівнянь з ядром типу Коші [10]. Найповніше викладення цієї теорії було надано у [11]. Методи, розвинуті в зазначених роботах, дозволили розв'язувати багато двовимірних задач механіки руйнування. Однак відсутність ефективних методів розв'язання двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь стримувала розвиток досліджень тривимірних задач механіки руйнування для тіл з тріщинами.

Виявлено, що коли область інтегрування є напівплощиною, то задачі щодо побудови розв'язків таких рівнянь зводяться до задачі Рімана-Гільберта теорії аналітичних функцій на нескінченній прямій [12]. Відображаючи кругову область на напівплощину, отримані результати узагальнено в [13].

Технічна сторона реалізації чисельного розв'язання сингулярного рівняння не може бути обґрунтована без попереднього аналізу таких рівнянь на розв'язність. Важливо, наприклад, знати спектр власних значень розглянутих інтегральних операторів. М.В. Хай у [14] розглянув клас інтегро-диференціальних рівнянь типу ньютонівського потенціалу. Було встановлено, що символ співпадає з коефіцієнтом задачі Рімана-Гільберта, відповідної вихідному рівнянню типу ньютонівського потенціалу. Завдяки цьому М.В. Хай успішно вирішив низку питань, пов'язаних з розв'язністю задачі Рімана-Гільберта теорії аналітичних функцій, що дозволило йому довести розв'язність розглянутих ним сингулярних рівнянь. Останніми роками сингулярні інтегральні рівняння знаходять дедалі ширше застосування при розв'язанні різних практичних задач: статичних і динамічних задач теорії пружності, задач дифракції електромагнітних хвиль на провідних екранах, задач про циркуляційне та безциркуляційне обтікання тонких профілів і поверхонь [15].

### 1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Задача дослідження довговічності тіл з тріщинами формулюється як визначення залишкового ресурсу конструктивного елемента з тріщиноподібними дефектами під дією циклічних навантажень. Формально, це передбачає:

Визначення напружено-деформованого стану конструктивного елемента з тріщиною за допомогою числового розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь (ГІР), що дозволяє точно обчислити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини.

Оцінка кількості циклів до руйнування елемента на основі критерію Періса, який використовує отримані значення КІН для прогнозування втомного руйнування.

Змістовно, задача полягає в наступному:

Аналіз напружено-деформованого стану: Для дослідження довговічності конструкцій з тріщинами необхідно точно визначити, як розподіляються напруження навколо тріщини. Гіперсингулярні інтегральні рівняння забезпечують високу точність обчислень, враховуючи складність геометрії тріщини та граничних умов.

Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень: КІН є ключовими параметрами для характеристики поля напружень у вершині тріщини. Вони використовуються для оцінки схильності тріщини до поширення під дією циклічних навантажень.

Прогнозування довговічності за критерієм Періса. Критерій Періса дозволяє визначити кількість циклів до руйнування, використовуючи залежність між КІН і ростом тріщини. Цей підхід враховує втомну поведінку матеріалу та характер розвитку тріщини, що дозволяє оцінити залишковий ресурс елемента.

Практичне застосування. Застосування цього підходу до реальних конструкцій дозволяє прогнозувати їхню довговічність і залишковий ресурс, що є критично важливим для забезпечення надійності та безпеки експлуатації технічних систем.

Таким чином, формальна постановка задачі включає математичне моделювання і чисельні методи для обчислення параметрів напруженого стану, тоді як змістовна постановка зосереджується на фізичному розумінні процесів втоми та руйнування та практичній значущості отриманих результатів для інженерної практики.

#### 1.4 Постановка задач дослідження

Розглядається пружний тривимірний елемент конструкції, підданий дії зовнішнього періодичного навантаження. В зоні найбільшої концентрації напружень поміщаємо модельну тріщину. Треба визначити кількість циклів, за яке тріщина підросте до критичного розміру, та відбудеться руйнування конструктивного елемента.

Визначальними рівняннями є рівняння рівноваги пружного тіла в переміщеннях – диференціальні рівняння Ламе другого порядку в частинних похідних. Область інтегрування – це область, що зайнята пружним тілом. Для однозначного вирішення диференціальних рівнянь необхідно поставити граничні умови на поверхнях тіла та поверхнях тріщини. Після цього з використанням узагальнених потенціалів простого та подвійного шару будуються сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння, за розв'язками яких, в свою чергу, обчислюються коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Ці КІН входять в критерій Періса для обчислення кількості циклів до руйнування елемента конструкції. Критерій Періса використовується для оцінки стійкості матеріалів до росту тріщин та визначення моменту руйнування. Застосування цього критерію в рамках системного аналізу дозволяє більш точно прогнозувати довговічність конструкцій під дією циклічних навантажень.

## 2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

### 2.1 Методи теорії потенціалу

*Потенціали простого та подвійного шару та їх застосування для побудови інтегральних зображень розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа.*

Для побудови інтегральних зображень розв'язків крайових використовують методи теорії потенціалу. Саме потенціали простого та подвійного шару будуються на основі фундаментальних та сингулярних розв'язків диференціальних рівнянь та слугують як інтегральні зображення.

Нехай  $x = (x_1, x_2, x_3)$  – дві точки тривимірного евклідового простору  $E_3$ , а декартова відстань  $r$  між цими точками дорівнює

$$r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - \xi_i)^2}. \quad (2.1)$$

Розглянемо функцію

$$f(x, \xi) = \frac{1}{|x - \xi|}. \quad (2.2)$$

Будемо вважати точку  $x$  фіксованою. Тоді  $f(x, \xi)$  можна розглядати як функцію точки  $\xi$ . Очевидно, що функція  $f(x, \xi)$  розривна при  $x = \xi$ . В будь-якій області, яка не містить точки  $x$ , функція  $f(x, \xi)$  зодовольняє рівнянню Лапласа, безперервна разом зі всіма своїми довільними будь-якого порядку, а на нескінченності  $f(x, \xi)$  дорівнює  $O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$  [4]. Так само із (2.1) сингулярним рішенням рівняння Лапласа буде й похідна від (2.1) за будь-яким направлен-

ням, тобто

$$g(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{|x - \xi|} \right). \quad (2.3)$$

За сингулярними розв'язками (2.1), (2.2) можна побудувати інтегральні подання розв'язків рівняння Лапласа у вигляді потенціалів простого

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|} dS, \quad \xi \in S \quad (2.4)$$

і подвійного шару.

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS, \quad \xi \in S \quad (2.5)$$

де  $\mathbf{n}$  – нормаль до поверхні в точці  $\xi$ ;

$\gamma(\xi), \mu(\xi)$  – задані на  $S$  функції.

Зауважимо, що функції  $V$  і  $W$ , зумовлені формулами (2.3), (2.4), задовольняють рівнянню Лапласа всюди поза  $S$ .

Як показано в [8], потенціал простого шару  $V$  безперервний при переході через  $S$ ,  $V^+ = V^-$  та має розривну нормальну похідну, в той час як потенціал подвійного шару  $W$  розривається при переході через  $S$  і має безперервну нормальну похідну. Далі, обидва потенціали  $V$  і  $W$  задовольняють умовам згасання на нескінченності.

Узагальнені потенціали простого та подвійного шару теорії пружності та їх застосування при дослідженні концентрації напружень в елементах конструкцій, послаблених тріщинами.

Як зазначалося вище, задачі теорії тріщин і задачі обтікання тонких несучих поверхонь можуть бути описані подібними інтегральними рівняннями. У теорії тріщин отримано велику кількість аналітичних і чисельних розв'язків. Деякі з них використовуються в дисертації для тестування чисельних методів.

Для визначення напружено-деформованого стану тіла слугують граничні умови задачі та розв'язуюча система трьох рівнянь еліптичного типу у частинних похідних другого порядку (рівнянь Ламе).

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \quad (2.6)$$

де  $\mu = E[(2l + c)^{-1}]$  – модуль здвигу;

$\lambda = E\nu[(1 + \nu)(1 - 2c)]^{-1}$  – коефіцієнт Ламе;

$E, \nu$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Якщо перші похідні переміщень настільки малі, що їх квадратами та добутками окремих похідних можна знехтувати, то деформації представляються у формі тензора малих деформацій Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \quad (2.7)$$

Компоненти тензора напружень для пружного ізотропного тіла, схильного діям зовнішніх механічних навантажень, визначаються через компоненти  $u_i(x)$  по закону Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Отже, введемо диференціальний оператор пружних навантажень (оператор напруг класичної теорії пружності)  $Tn(\partial x, n(x)) = \left\| T_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) \right\|_{3 \times 3}$

$$T_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(x)) = \lambda n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)}, \quad (2.9)$$

$$Tn(\partial x, n(x)) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}). \quad (2.10)$$

Для спрощення запису в майбутньому будемо також використовувати наступне позначення:

$$Tn(x) = Tn(\partial x, n(x)). \quad (2.11)$$

Сформулюємо крайову задачу теорії пружності довільного тривимірного тіла, обмеженого поверхнею  $\Omega$  та ослабленого системою тріщин. Нехай на частині кордону задані кінематичні умови першого крайового завдання

$$\mu_i(x) = \mu_i l(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

На частині  $\Omega_2$  задані статичні умови навантаження, що відповідають другому крайовому завданню теорії пружності

$$X_i(x) = \delta l_i n_1(x) + \delta_2 l_i n_2(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{n}$  – напрямні зовнішньої нормалі до поверхні в точці  $x$ .

З використанням (2.10) гранична умова (2.11) приймає вигляд

$$X(x) = T_n(x), \quad X(x) = (X_1(x), X_2(x)), \quad x \in \Omega_2. \quad (2.14)$$

Наведемо фундаментальне та сингулярне рішення рівнянь теорії пружності у переміщеннях.

Нехай ізотропне пружне середовище заповнює простір  $E_3$  і в точці  $x$  діє одинична зосереджена сила, спрямована по осі  $x$ . Тоді зміщення точки  $x$  викликане зазначеною силою, обчислюється за формулою

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \right], \quad (2.20)$$

$$\|\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\|_{3 \times 3} = \|\Gamma^1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \Gamma^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \Gamma^3(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\|, \quad (2.20)$$

Введемо матрицю, яку називатимемо матрицею фундаментальних рішень Кельвіна-Сомільяни. Ця матриця симетрична і кожен її стовпець, а також рядок задовольняють рівняння статички у переміщеннях довільної точки. Якщо в точці  $\boldsymbol{\xi}$  докладено зусилля  $p$ , то можна визначити переміщення у нескінченному тілі, викликані дією цього зусилля. Нехай  $n(x)$  – довільний одиничний вектор. Для обчислення напруги в точці  $x$  у напрямку  $n(x)$  скористаємося матричним диференціальним оператором пружних напружень  $T$ .

У [6] показано, що кожен стовпчик матриць  $\Gamma$  задовольняє рівняння статички (2.19) у довільній точці крім точки  $x \in \boldsymbol{\xi}$ . Наведемо вирази для компонентів матриці  $\Gamma$

$$\Gamma_{2ij}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[ \mu\delta_{ij} + 3(\lambda + \mu) \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^3 \frac{(x_l - \xi_l)n_l(\boldsymbol{\xi})}{r^3} + \mu \left[ n_i(\boldsymbol{\xi}) \frac{(x_j - \xi_j)}{r^3} - n_j(\mathbf{x}) \frac{(x_i - \xi_i)}{r^3} \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Якщо в точці  $\boldsymbol{\xi}$  є скачок зміщень  $\alpha$  то переміщення у нескінченному тілі,

обумовлені наявністю такого розриву, можуть бути обчислені за формулою,  $u = (x, \mu) = \Gamma(x - \mu)$ .

За фундаментальним та сингулярним рішенням системи (2.11) побудуємо інтегральні уявлення рішень у вигляді узагальнених потенціалів теорії пружності простого та подвійного шару.

Нехай  $S$  – довільна розімкнена поверхня Ляпунова,  $\rho$  та  $\alpha$  – задані на  $S$  вектор–функції. Згідно [6] назвемо  $V$  узагальненим потенціалом простого шару, а  $W$  узагальненим потенціалом подвійного шару (першого роду). Як показано у [7, 9], властивості потенціалів (2.24), (2.25) аналогічні властивостям відповідних гармонійних потенціалів.

Так, потенціал (2.24) може бути визначений безпосередньо в точках поверхні  $S$ , причому його граничні значення при прагненні точки спостереження до  $S$  по  $n^+$  і  $n^-$  збігаються і дорівнюють прямому значенню. Отже, узагальнений пружний потенціал простого шару є вектор-функцію, безперервну у всьому просторі. На нескінченності потенціал  $V(x)$  прагне до нуля, як  $1/|x|$ . Зазначимо, що гармонійний і узагальнений пружний потенціал подвійного шару зручно використовувати при вирішенні крайових завдань на розімкнених поверхнях, коли функція розривна (стрибок зсувів на тріщині, перепад тисків на несучій поверхні), а її нормальна похідна безперервна (самоврівноважена навантаження складова швидкості на поверхні, що несе).

Для зведення крайової задачі теорії пружності (2.21) для тіла з розрізами до інтегральних рівнянь використовуємо інтегральні уявлення. Саме за допомогою узагальненого потенціалу подвійного шару можна визначити переміщення, зумовлені стрибком зміщень протилежних точок поверхонь тріщини (потенціал простого шару не дає стрибка зсувів), і задовольнити умови рівності навантажень на берегах тріщини внаслідок безперервності оператора напруги.

Зазначимо, що використання гармонійних чи узагальнених потенціалів простого і подвійного шару як інтегральні уявлення рішення відповідних завдань передбачає застосування формул Гріна чи Соміліани (для просторової за-

вдання теорії тріщин). Ця обставина дозволяє обійти труднощі, що виникають при використанні даних формул (справедливих на замкнених поверхнях) при інтегруванні області, обмеженою двома близькими поверхнями. Саме такими областями зазвичай імітуються тріщини.

## 2.2 Методи сингулярних та гіперсингулярних рівнянь

Інтегральні зображення, побудовані на основі використання гармонічних або узагальнених потенціалів простого та подвійного шарів, містять різного роду сингулярності.

Загальний вигляд інтегрального оператора є таким

$$\int_S \mu(P) K(P, P_0) dS \quad (2.26)$$

Тут функція  $\mu(P)$  є невідомою густиною, функція двох змінних  $K(P, P_0)$  є ядром інтегрального оператора. Область інтегрування  $S$  може бути відрізком, частиною кривої, частиною площини або поверхні. Точки  $P, P_0$  є точкою інтегрування та точкою спостереження (колокації), відповідною. Якщо при  $P = P_0$  функція  $K(P, P_0)$  є необмеженою, то вказаний вище інтеграл має особливість і називається сингулярним. Існують різного роду особливості в ядрах інтегральних операторів.

Зазвичай ядра залежать від декартової відстані між точками  $P, P_0$ , яка в двовимірному просторі зображається формулою

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}, \quad P = (x_1, x_2), \quad P_0 = (x_1^0, x_2^0) \quad (2.27)$$

а в тривимірному, відповідно, є

$$r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}, \quad P = (x_1, x_2, x_3) \quad (2.28)$$

Якщо  $K(P, P_0) = A \ln r$ , де  $A$  – стала або обмежена функція від  $r$ , то кажуть що інтеграл має логарифмічну особливість, а відповідно інтегральне рівняння називається інтегральним рівнянням з логарифмічною особливістю.

Якщо  $K(P, P_0) = \frac{A}{r^\alpha}$ , де  $A$  – стала або обмежена функція від  $r$ ,  $\alpha < n$ , де  $n$  – розмірність простору, в якому розглядається задача, то зазначений вище інтеграл має слабку особливість, а відповідне інтегральне рівняння називається сингулярним інтегральним рівнянням зі слабкою особливістю.

Якщо  $\alpha = n$ , то наведений інтеграл існує лише в сенсі Коші, а якщо  $\alpha > n$ , то інтеграл існує лише в узагальненому сенсі, як узагальнена функція або як граничне значення [10]. При цьому інтеграл називається гіперсингулярним. а відповідне інтегральне рівняння – гіперсингулярним інтегральним рівнянням. В цьому дослідженні ми використовуємо визначення гіперсингулярного інтегралу як граничного значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару (узагальненого потенціалу подвійного шару).

Побудова аналітичного розв'язку гіперсингулярного інтегрального рівняння для деяких просторових задач

До цього завдання можна звести визначення стаціонарного поля температур в тілі з тріщиною, розрахунок безциркуляційного обтікання круглої (еліптичної) платівки ідеальної рідини, що стискається, визначення концентрації напруг у тілі, ослабленого тріщиною нормального відриву у вигляді кола або еліпса.

Проведемо дослідження гіперсингулярного інтегрального оператора на колі. Розглянемо

$$\iint_S \frac{f(x, y) \Gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^3}; \quad \gamma(\xi) = f(x, y) \Gamma(x, y). \quad (2.29)$$

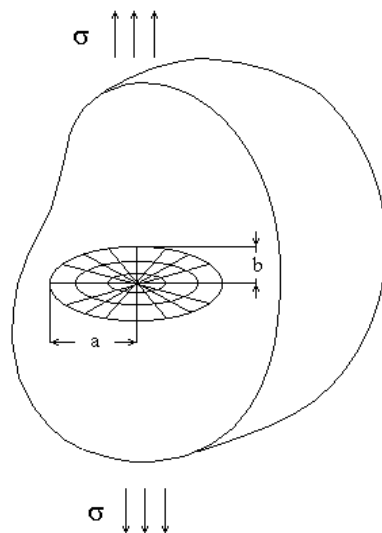


Рисунок 2.1. Тривимірне тіло з розрізом

Нехай  $S$  – коло радіусу  $R$ . Розглянемо точки, що лежать на колі, координати яких задовольняють рівнянню  $x^2 + y^2 = R^2$ . Нехай  $(x_0, y_0)$  є внутрішньою точкою кола, тобто її координати задовольняють нерівності  $x_0^2 + y_0^2 < R^2$ . Розглянемо наступний інтеграл:

$$\iint_S \frac{f(x, y)\Gamma(x, y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^3}, \quad (2.30)$$

де

$$\Gamma(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (2.31)$$

Цей інтеграл слід розуміти як наступну межу

$$\iint_S \frac{f(x, y)\Gamma(x, y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^3},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \iint_{S/S_\varepsilon} \frac{f(x,y)\Gamma(x,y)dxdy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^3} - \frac{2\pi\Gamma(x_0,y_0)}{\varepsilon} \right). \quad (2.32)$$

У полярних координатах маємо

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \rho \cos \phi, \quad y - y_0 = \rho \sin \phi, \\ dxdy &= \rho d\rho d\phi, \quad x_0 = \rho_0 \cos \phi_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \phi_0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Тоді аналізований інтеграл набуває вигляду

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{\rho(\phi)} \frac{\Gamma \rho d\phi}{\rho^3}. \quad (2.34)$$

Знайдемо  $\rho(\phi)$ , вирішуючи відповідне квадратне рівняння

$$-\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + \sqrt{R^2 - \rho_0^2 \sin^2(\phi - \phi_0)}. \quad (2.35)$$

Нехай  $f(x,y) \equiv 1$ . Після перетворень, зробивши заміну  $u = \rho + \rho_0 \cos \phi$ , згідно [11] встановимо, що аналізований інтегральний оператор переводить одиницю в  $-\pi^2$ . Подібними міркуваннями отримаємо, що інтегральний оператор перекладає функцію  $f(x,y) = x + iy$  у функцію  $\frac{-3\pi^2}{2}(x_0 + iy_0)$ .

Візьмемо  $f(x,y) = z^n = (x + iy)^n$ . Так як

$$z^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z_0^{n-k} (z - z_0)^k, \quad (2.36)$$

то обчислення зводиться до розгляду інтегралів виду

$$\iint_S \frac{(z - z_0)^{n+2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^3}. \quad (2.37)$$

Перейшовши до полярних координат (2.16) і зробивши відповідні перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} e^{i(n+2)\phi} \int_{\varepsilon}^{-\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) + \sqrt{R^2 - (\rho_0 \sin(\phi - \phi_0))^2}} \rho^{n+2} \times \\ & \times \frac{\sqrt{R^2 - \rho_0^2 \sin^2(\phi - \phi_0) - (\rho + \rho_0 \cos(\phi - \phi_0))^2}}{\rho^3} \rho d\rho = \dots = \\ & = e^{(n+2)i\phi_0} \int_0^{\pi} e^{(n+2)i\phi} d\phi \int_{-\sqrt{R^2 - \rho_0^2 \sin^2 \phi}}^{\sqrt{R^2 - \rho_0^2 \sin^2 \phi}} (u - \rho_0 \cos \phi)^n \sqrt{R^2 - \rho_0^2 \sin^2 \phi - u^2} du. \quad (2.38) \end{aligned}$$

Нехай тепер

$$a = \sqrt{R^2 - \rho_0 \sin^2 \phi}; \quad b = \rho_0 \cos \phi. \quad (2.39)$$

Обчислимо інтеграл виду:

$$\int_{-a}^a (u - b)^n \sqrt{a^2 - u^2} du. \quad (2.40)$$

Скориставшись формулою бінома Ньютона, отримаємо

$$\int_{-a}^a (u - b)^n \sqrt{a^2 - u^2} du = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k b^k \int_{-a}^a u^{n-k} \sqrt{a^2 - u^2} du. \quad (2.41)$$

Оскільки інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку дорівнює нулю, то будемо розглядати лише інтеграли з парним ступенем підінтегрального множника. Зробивши заміну змінної інтегрування  $\frac{a}{u} = \sin t$ , отримаємо

$$\int_0^1 v^{2m} \sqrt{1-v^2} dv = \frac{\pi(2m-1)!!}{(2m+2)2(2m)!!}, \quad (2.42)$$

де використано стандартне позначення для подвійного факторіалу  $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$ . Остаточно маємо:

$$\int_{-a}^a (u-b)^n \sqrt{a^2-u^2} du = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(n,m) a^{2(m+1)} b^{n-2m}, \quad (2.43)$$

$$m = \frac{n-2k}{2}; \quad c(n,m) = C_n^{2k} \frac{(n-2k-1)!!}{(n-2k)!!} \frac{\pi}{n-2k+2} \quad n=2k, \quad (2.44)$$

$$m = \frac{n-2k+1}{2}; \quad c(n,m) = -C_n^{2k-1} \frac{(n-2k)!!}{(n-2k+1)!!} \frac{\pi}{n-2k+3} \quad n=2k+1. \quad (2.45)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{R^2-\rho_0^2 \sin^2 \phi}}^{\sqrt{R^2-\rho_0^2 \sin^2 \phi}} (u-\rho_0 \cos \phi)^n \sqrt{R^2-\rho_0 \sin^2 \phi-u^2} du = \\ & = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(n,m) (R^2-\rho_0 \sin^2 \phi)^{m+1} (\rho_0 \cos \phi)^{n-2m}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Застосовуючи формулу бінома Ньютона, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(n, m) e^{(n+2)i\phi_0} \rho_0^{n-2m} \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j (-1)^j R^{2(m-j+1)} \rho_0^{2j} \times \int_0^\pi e^{(n+2)i\phi} \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi d\phi. \quad (2.47)$$

Властивість інтеграла має вигляд

$$\int_0^\pi \cos(n+2)\phi \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi d\phi. \quad (2.48)$$

З урахуванням властивостей поліномів Чебишева обчислення інтегралу зводиться до обчислення тривіального інтегралу  $\int_0^\pi d\phi$ , який, очевидно, дорівнює

$\pi$ . Уявна частина інтеграла з аналогічних міркувань звертається до нуля.

Таким чином, знаходимо шуканий інтеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \cos(n+2)\phi \sin^{2j} \phi \cos^{n-2m} \phi d\phi = \\ & = \pi \sum_{t=0}^{n+2} \frac{T_{n+2}(1)_t j!! (2j-1)!! (n-2m+t-1)!!}{((n-2m+t)!!)^2}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Отримаємо остаточно

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{(z-z_0)^{n+2} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3} = \\ & = z_0^{n+2} \pi^2 \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^{n+j} C_n^{n-2m} C_{m+1}^j \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)(2m)!!} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{t=0}^{n+2} \frac{T_{n+2}(1)_t j!! (2j-1)!! (n-2m+t-1)!!}{((n-2m+t)!!)^2}. \quad (2.50).$$

Таким чином, побудовано аналітичні рішення для гіперсингулярного рівняння у тривимірній ділянці з розрізом у вигляді кола.

Перейдемо до загальної постановки задачі для плаского розрізу. У тривимірному просторі із розрізом у вигляді плоскої області потрібно визначити функцію, що задовольняє всюди поза  $S$  рівняння Лапласа, за наступної граничної умови на  $S$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}^\pm}. \quad (2.51)$$

Шукатимемо функцію  $\Phi(\mathbf{x})$ , є рішенням поставленої задачі, у вигляді потенціалу подвійного шару за областю  $S$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS. \quad (2.52)$$

Як зазначалося в підрозділі 2.1, потенціал подвійного шару всюди поза  $S$  задовольняє рівняння Лапласа, на нескінченності умові Зоммерфельда; а при переході через потенціал терпить розрив і має безперервну нормальну похідну, якщо щільність  $\Gamma(\xi)$  має похідні, що задовольняють умову Гельдера. Вибір такого уявлення для функції забезпечує можливість отримання перепаду тисків на несучій поверхні при вирішенні завдань про взаємодію пружних пластин з рідиною. Таким чином, якщо як інтегральне подання рішення поставленої задачі вибрати потенціал подвійного шару, то для повного вирішення задачі залишається лише задовольнити граничну умову (2.18).

Завдання, що розглядається, зводиться до вирішення гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} dS = f(\mathbf{x}). \quad (2.53)$$

Нехай область  $S$  є еліпсом  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

Отримаємо аналітичне рішення гіперсингулярного інтегрального рівняння (2.19) із правою частиною  $f(x) = 1$ .

Якщо щільність перетворюється на нуль на межі області інтегрування і має похідні, що задовольняють умові Гельдера всюди всередині області  $S$ , то рівнянню (2.19) можна надати таку форму:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{(\text{grad} \Gamma, \mathbf{r})}{r^3} dS = 1, \quad \mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0), \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (2.54)$$

Шукатимемо рішення рівняння (2.20) у вигляді

$$\Gamma(x, y) = C \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (2.55)$$

Обчислимо приватні похідні функції  $\Gamma(x, y)$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = -\frac{C}{a^2} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = -\frac{C}{a^2} \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (2.56)$$

і підставимо отримані вирази рівняння (2.20). Перейдемо до полярних координат. Рівняння еліпса у введеній системі полярних координат набуде вигляду

$$\rho = -\frac{P}{K} + \sqrt{\frac{P^2}{K^2} + M}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (2.57)$$

де

$$P = \frac{x_0}{a^2} \cos \phi + \frac{y_0}{b^2} \sin \phi, \quad (2.58)$$

$$K = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2},$$

$$M = \left( 1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right) / K. \quad (2.59)$$

У полярній системі координат отримаємо

$$\Gamma(\rho, \phi) = C \sqrt{K} \sqrt{\frac{P^2}{K^2} + M - \left( \rho + \frac{P}{K} \right)^2}. \quad (2.60)$$

Величини  $K$  та  $M$  тут і вище не залежать від  $\rho$ .

Введемо такі позначення:  $\tau_0 = P/K$ ,  $l = \sqrt{\tau_0^2 + M}$ . Тоді розглянуте сингулярне рівняння (2.19) у полярних координатах набуде вигляду

$$-\frac{C}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{K}} \int_0^{-\tau_0+l} \frac{P + K\rho}{\rho \sqrt{l^2 - (\rho + \tau_0)^2}} d\rho = 1. \quad (2.61)$$

Розглянемо перший доданок у лівій частині (2.61). Оскільки  $P(\phi) = -P(\phi + \pi)$ ;  $K(\phi) = K(\phi + \pi)$ , маємо

$$S_1 = -\frac{C}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P d\phi}{\sqrt{K}} \int_0^{-\tau_0+l} \frac{1}{\rho \sqrt{l^2 - (\rho + \tau_0)^2}} d\rho =$$

$$= -\frac{C}{4\pi_0} \frac{\pi P d\phi}{\sqrt{K}} \left[ \int_0^{-\tau_0+l} \frac{1}{\rho \sqrt{l^2 - (\rho + \tau_0)^2}} d\rho - \int_0^{-\tau_0-l} \frac{1}{\rho \sqrt{l^2 - (\rho - \tau_0)^2}} d\rho \right]. \quad (2.62)$$

Після перетворень отримаємо

$$S_1 = -\frac{C}{4\pi_0} \frac{\pi P d\phi}{\sqrt{K}} \int_{-l}^l \frac{1}{(\rho - \tau_0) \sqrt{l^2 - u^2}} du = 0,$$

бо внаслідок нерівності  $-\sqrt{\tau_0^2 + M} < \tau_0 < \sqrt{\tau_0^2 + M}$  внутрішній інтеграл (2.62) дорівнює нулю (як показано, наприклад, в [11]).

Перетворивши аналогічно другий доданок (2.62), встановлюємо

$$S_2 = -\frac{C}{4\pi_0} \frac{\pi}{\sqrt{K}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{l^2 - u^2}} du = -\frac{C}{4} \frac{\pi}{\sqrt{K}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{K} d\phi = -\frac{C}{2ab} \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi} d\phi.$$

Звідси випливає, що  $S_2$  виражається через повні еліптичні інтеграли другого роду. Визначивши постійну  $C$  із рівності  $S_1 + S_2 = 1$ , знаходимо аналітичне рішення для гіперсингулярного рівняння в ділянці з розрізом у вигляді еліпса

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} -\frac{2b}{E(e)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; & e = \sqrt{1 - b^2/a^2}; \quad a > b \\ -\frac{2a}{E(e)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; & e = \sqrt{1 - a^2/b^2}; \quad a < b, \end{cases}$$

де  $e$  – ексцентриситет еліпса.

Отримуємо аналітичне рішення для кола з радіусом  $R$

$$\Gamma(x, y) = -\frac{4}{\pi} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (2.63)$$

Таким чином, отримано низку аналітичних розв'язків просторового гіперсингулярного інтегрального рівняння. Ці розв'язки є необхідними для тестування числових методів.

### 2.3 Застосування методів скінченних та граничних елементів

Розроблено ефективний метод розв'язання гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Цей метод полягає у наступному.

Зобразимо розв'язок гіперсингулярного рівняння (2.18) у вигляді  $\Gamma_k = \sum_{l=1}^N d_k w_l$ . Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N_1} d_i^k a_{ij} = b_j^k, \quad a_{ij} = \iint_S N w_i(x, y) w_j(x, y) dx dy, \quad b_j^k = \iint_S w_k(x, y) w_j(x, y) dx dy. \quad (2.64)$$

$$w_k(x, y) = w_{im}(x, y) = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}.$$

Елементи матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.24) є чотири-кратними інтегралами, що мають слабкі особливості. Елементи матриці перетворено до вигляду, зручного для чисельної реалізації [8]. Позначимо

$$\Omega_i = \text{grad} \Gamma_i \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{h} = \iint_S \frac{\Omega_i}{r} d\sigma.$$

Розглянемо елемент матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь в (2.64), маємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_j(x_0, y_0) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_0} dS = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{rot}(\Gamma_j \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS - \frac{1}{4\pi} \iint_S (\text{grad}(\Gamma_j \times \mathbf{h}), \mathbf{n}) dS. \quad (2.65)$$

Скористуємося рівностями

$$\Gamma_i \text{rot} \mathbf{h} = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad} \Gamma_i \times \mathbf{h}, \quad \Gamma_i \text{grad} \Phi = \text{rot}(\Gamma_i \mathbf{h}) - \text{grad} \Gamma_i \times \mathbf{h}. \quad (2.66)$$

До першого доданку в правій частині рівності (2.26) застосуємо формулу Стокса. Внаслідок того, що базисні функції дорівнюють нулю на границі області, встановлюємо, що цей доданок дорівнює нулю. Другий доданок перетворимо, використовуючи формулу для подвійного векторного добутку і вираз для  $\mathbf{h}$ . Після перетворень отримаємо

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \iint_S \frac{(\text{grad} \Gamma_i, \text{grad} \Gamma_j)}{r} dS dS_0, \quad \Gamma_i = \Gamma_i(x, y); \quad \Gamma_j = \Gamma_j(x_0, y_0). \quad (2.67)$$

Для обчислення внутрішніх інтегралів використовуємо метод дискретних особливостей.

Метод скінченних елементів (МСЕ) широко застосовується для чисельного аналізу механічних напружень у твердих тілах, зокрема для моделювання тріщин і визначення концентрації напружень. Основна ідея методу полягає у розбитті досліджуваного об'єкта на невеликі, прості за формою елементи (скінченні елементи), у межах яких визначаються наближені значення напружень і деформацій.

Універсальність: МСЕ може застосовуватися до широкого спектра задач, включаючи складні геометричні форми та неоднорідні матеріали. Висока точність у глобальних розрахунках: МСЕ дозволяє отримати деталізовану картину напружено-деформованого стану у всьому об'ємі моделі. Можливість моделювання складних умов навантаження і контактних задач. Існують численні про-

грамні пакети для реалізації МСЕ, які спрощують побудову сіток та проведення розрахунків.

Разом з тим, МСЕ має й ряд недоліків:

Точність результатів сильно залежить від якості та щільності сітки, особливо в області навколо тріщин. Для точного опису тріщин потрібне спеціальне оброблення, таке як використання спеціальних елементів чи адаптивної сітки.

Для задач із тонкими розрізами або складними дефектами потрібна велика кількість елементів, що підвищує обчислювальну вартість.

Порівняння з методом граничних елементів (МГЕ)

Метод граничних елементів (МГЕ) працює шляхом дискретизації тільки поверхні тіла, що значно знижує розмірність задачі. Це робить його ефективним для моделювання тріщин, де концентрація напружень зосереджена навколо вузької області.

Переваги МГЕ полягають у такому. МГЕ потребує дискретизації лише поверхні, що знижує обчислювальну складність, забезпечує точні розрахунки у вузьких областях, таких як вершини тріщин. Завдяки меншій кількості невідомих МГЕ може бути ефективнішим для задач з обмеженою кількістю тріщин.

Недоліки МГЕ є такими. МГЕ менш ефективний для задач із сильно неоднорідними матеріалами чи складними внутрішніми структурами. Формулювання гіперсингулярних інтегральних рівнянь для задач із тріщинами може бути математично складним. Для нелінійних задач та задач із великими деформаціями МГЕ може виявитися менш зручним.

МСЕ є потужним і універсальним методом, особливо ефективним для задач із складними геометриями та матеріалами. Проте для задач із тріщинами, де важлива локальна концентрація напружень, МГЕ може виявитися ефективнішим завдяки своїй здатності точно моделювати вузькі області з меншою кількістю елементів.

Порівняння отриманих числових результатів з розрахунками інших дослідників та аналітичними результатами

Розглянуто тестовий приклад, зосереджуючись на центральній тріщині у фо-

рмі пенні в необмеженому тілі, що піддається рівномірному навантаженню, Рис.2.1. Для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень використовуються різні чисельні методи, включаючи методи кінцевих і граничних елементів. Потім результати порівнюються з аналітичним рішенням, що дозволяє визначити оптимальну кількість необхідних скінченних елементів.

Проаналізовано тріщину у формі пензі радіусом  $R$  при одновісному розтягу  $\sigma$ . ВЕМ використовується для моделювання тріщини в необмеженому тривимірному просторі за допомогою двох формулювань на основі гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Перше формулювання відноситься до рівняння (2.61).

Для чисельного моделювання параметри  $R = 0.005t$  та  $\sigma = 1$  були обрані МПа. Дискретизація поверхні  $S$  на граничні елементи проілюстрована на рисунку 1а). Загальна кількість плоских трикутників і чотирикутників, використаних у чисельному розв'язуванні рівняння (2.67), становила 9326. Інтервал  $[0, \pi]$  поділявся на 120 одновимірні граничні елементи. Аналітичний розв'язок рівняння (2.67) з правою частиною було отримано в [7]. Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) є ключовими параметрами, які описують поля напружень та переміщень поблизу вершини тріщини. Вони є важливими у прогнозуванні поширення тріщин і потенційного руйнування конструкції. Для випадку тріщин у формі круга лише коефіцієнт інтенсивності напружень необхідний для точного опису стану деформації у вершині тріщини. Аналітичний вираз для кругової тріщини радіусом  $R$  при одновісному розтягуванні  $\sigma$  визначається як  $K$  [7]. У контексті теорії гіперсингулярних інтегральних рівнянь [12] цю КІН можна виразити через компоненти вектора зміщення.

Результати в таблиці 2.1 демонструють точність і надійність як FEM, так і ВЕМ в оцінках. КІН розраховується в різних точках уздовж контуру тріщини, що відповідають різним кутам  $\varphi$ , як показано на малюнку 2.2 а).

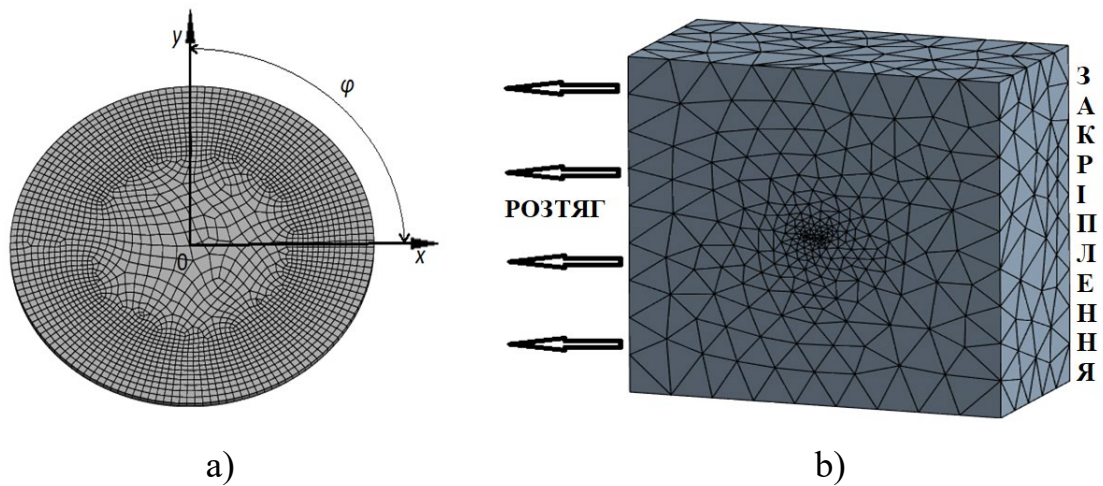


Рисунок 2.2 – а) МГЕ дискретизація б) МСЕ дискретизація

Таблиця 2.1 Порівняння безрозмірних  $K_I / \sigma\sqrt{R}$  числові  
та аналітичні оцінки

Кути	Аналітичні значення	МГЕ, двовимір- не ГР	МГЕ, одновимі- рне ГР	МСЕ
15	1.1283	1.1322	1.1299	1.1422
30	1.1283	1.1295	1.1284	1.1421
60	1.1283	1.1284	1.1283	1.1420
90	1.1283	1.1283	1.1283	1.1420

У таблиці 2.1 представлені числові результати для  $K_I$ , отримані з використанням розв'язків рівнянь (2.27) і (2.27), і порівнює їх із чисельним розв'язком з МСЕ. Аналіз розглядає тріщину у формі пенні всередині прямокутного зразка, як показано на малюнку 2.2 а). Сітка скінченних елементів складається з 439264 елементів, причому половина сітки показана на рис. 2.2 б).

Варто відзначити, що найбільш точні результати досягаються за допомогою одновимірного МГЕ. Однак обмеження цього методу полягає в його обмеженні лише круговими та еліптичними областями інтегрування.

## 2.4 Модифікована залежність Періса

Ще не так давно конструктори та інженери вважали, що наявність тріщин є неприпустимою в будь-якому відповідальному елементі конструкції. Проте, реальні матеріали завжди мають різні мікродефекти, які виникли або при виготовленні, або при експлуатації конструктивного елементу. Нові теоретичні дослідження в області розвитку втомних тріщин привели до зміни погляду на можливість роботи конструкції при наявності дефектів. Мова тепер йде про оцінку довговічності, працездатності, залишкового ресурсу елементів конструкцій з тріщинами. В даний час, коли велика частина енергетичного обладнання України практично вичерпала свій нормативний ресурс, проблеми оцінки залишкового ресурсу є особливо актуальними.

В останні роки прийшло також розуміння того, що розвиток втомних тріщин є основною причиною катастрофічних руйнувань, серед яких зазначимо аварії на залізничному транспорті, руйнування турбо і гідрогенераторів, аварії літаків і вертольотів та ін. В гідротурбінах втомні тріщини мають тенденцію розташовуватися поблизу несучих поверхонь. Виникають вони внаслідок корозії, інтенсивних температурних і силових навантажень. Новоутворена тріщина починає повільно рости, навіть якщо додані навантаження не перевищують номінальних значень. Далі, якщо досягається критична довжина тріщини, несучий елемент раптово отримує величезну кількість кінетичної енергії, що призводить до катастрофічного руйнування всієї конструкції. Цим пояснюється великий інтерес до вивчення втомних тріщин в останнє десятиліття.

Основна мета таких досліджень полягає в ретельному аналізі поведінки конструкції з тріщинами для запобігання їх небезпечного зростання і в розробленні ефективної методики для раннього діагностування дефектів. Встановлення послідовності заміни застарілого гідротурбінного обладнання, визначення термінів міжремонтних періодів також вимагають ретельного вивчення поведінки конструкцій при наявності втомних тріщин. Беручи до уваги те, що в процесі експлуатації елементи гідротурбін підпадають під вплив ряду факторів,

пов'язаних з їх роботою (корозія, кавітація, ерозія) відзначимо, що навантаження на елементи енергетичного обладнання, а також напруження і деформації в них не можуть бути визначені шляхом використання простих аналітичних залежностей. Іншими словами, поведінка енергетичного обладнання не може бути описана за допомогою якоїсь однієї математичної моделі. З розвитком сучасних обчислювальних методів і появою комп'ютерів нового покоління стало можливим розробити достовірні методики оцінки ймовірності руйнування конструкцій з дефектами. Стало можливим і дослідження тріщин різної конфігурації, ланцюжків тріщин, дефектів в околиці конструктивних вирізів, зовнішніх і внутрішніх несучих поверхонь конструктивних елементів.

Втомна довговічність, що обумовлена числом циклів до руйнування при змінних напругах, складається з числа циклів до зародження тріщини і числа циклів її поширення. Час досягнення тріщиною критичних розмірів залежить від рівня напружень в зоні виникнення тріщини, її орієнтації по відношенню до діючих змінних напружень, механічних властивостей основного металу, а також від її розмірів (довжини і глибини). Цей час і служить для визначення довговічності конструкції і термінів міжремонтного періоду.

Задача полягає у визначенні часу, після закінчення якого тріщина підростає до критичного розміру, і відбувається руйнування елемента конструкції. Після проведення ремонтних робіт тріщини заварюють згідно відповідним нормативам [6]. За нормами приймання зварних швів гідротурбінного обладнання [6] дефекти з діаметром 3 мм і менше не враховуються. Фіксації підлягають дефекти з діаметром 4 мм і більше. Допускаються окремі дефекти з діаметром до 6мм включно, в кількості 20 дефектів на один зварний шов, а також ланцюжки дефектів з діаметром до 4 мм загальною протяжністю 300мм на один зварний шов.

Таким чином, виникла необхідність розв'язання такої задачі. Треба дослідити напружено-деформований стан (НДС) елементу проточної частини гідротурбіни і визначити зони найбільшої концентрації напружень. Далі слід розглянути задачу про зростання внутрішньої тріщини, яка спочатку мала розмір, від-

повідний нормам контролю, або практично нульовий, під дією навантаження, отриманого в результаті розрахунку НДС. Необхідно з'ясувати, за яку кількість циклів тріщина підросте до розміру, що перевищує допустимий за нормами контролю. Вважаються допустимими такі ланцюжки мікротріщин, в яких відстань між дефектами становить не менше 7 см, [7]. Доцільно розглянути задачу про зменшення відстані між тріщинами в різних ланцюжках в процесі циклічного навантаження, тобто з'ясувати за яку кількість циклів дефекти в ланцюжку підростуть до неприпустимих розмірів. Необхідність дослідження таких ефектів диктується наявністю заварених тріщин.

До теперішнього часу накопичений значний обсяг експериментальних і теоретичних досліджень щодо закономірностей росту тріщин під дією циклічно змінних навантажень [1-4]. Перші дослідники брали в якості основних параметрів, відповідальних за поширення втомної тріщини, номінальне значення прикладеного напруження і довжину тріщини. Залежності такого роду не могли претендувати на універсальність, так як в них ігнорувалося відмінність між номінальним і дійсним напруженнями, відповідальними за зростання тріщини. Для визначення кількості циклів до руйнування використана модифікована залежність Періса [8], в якій застосовані різні співвідношення для різних діапазонів зміни коефіцієнта інтенсивності напружень. Ця залежність подана формулою

$$\frac{dl}{dN} = \begin{cases} 10^{-20} & \Delta K < \Delta K_{th} \\ C(\Delta K)^m & \Delta K_{th} < \Delta K < K_{1c} \\ 10^3 & \Delta K > K_{1c} \end{cases} \quad (2.70)$$

Тут  $l$  – характерний розмір дефекту, наприклад довжина або радіус ( $dl$  – зміна довжини);  $N$  – кількість циклів до руйнування;  $\Delta K_{th}$  – поріг втоми;  $K_{1c}$  – критичний коефіцієнт інтенсивності напружень;  $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ ,  $K_{max}$ ,  $K_{min}$  – максимальний і мінімальний коефіцієнти інтенсивності напружень за один цикл

навантаження;  $m$  – показник ступеня кривої втоми;  $C$  – характерна константа кривої втоми.

У подальших розрахунках прийнято, що

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} = -1. \quad (2.71)$$

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min} = 2K_{\max}. \quad (2.72)$$

Число циклів до руйнування визначається інтегруванням співвідношення

$$dN = \frac{1}{C} (\Delta K)^{-m} dl, \quad \Delta K_{th} < \Delta K < K_{IC}. \quad (2.73)$$

Зазначимо, що за  $\Delta K < \Delta K_{th}$  тріщини не розвиваються, а при  $\Delta K > K_{IC}$  відбувається лавиноподібний розвиток тріщини, що веде до руйнування елемента конструкції.

Таким чином, маємо таку формулу для обчислення критичного числа циклів:

$$N = \frac{1}{C} \int_{l_0}^{l_1} (\Delta K)^{-m} dl, \quad \Delta K = 2K_{\max}, \quad (2.74)$$

де  $l_0, l_1$  – початкова та кінцева довжини тріщини.

## Висновки за розділом 2

Побудовані аналітичні розв'язки гіперсингулярних рівнянь, що описують поведінку тривимірних середовищ з плоскими розрізами у вигляді кола та еліп-

са, є важливим кроком для глибшого розуміння механіки тріщин у складних конструкціях. Ці розв'язки були створені з метою їх подальшого застосування при виконанні тестових розрахунків, що забезпечує верифікацію числових методів. Виконано детальне порівняння числових та аналітичних результатів для двовимірних та тривимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь, яке демонструє високу точність узгодження між даними. Це свідчить про ефективність розроблених числових методів і дозволяє з упевненістю застосовувати їх у практичних інженерних задачах.

Особливу увагу приділено розгляду модифікованої залежності Періса, яка дозволяє більш точно моделювати процеси руйнування та розповсюдження тріщин у конструкційних елементах під дією навантажень. Отримані дані є надійним підґрунтям для проведення комп'ютерного моделювання процесів розповсюдження тріщин в елементах конструкцій, що дозволяє прогнозувати поведінку матеріалів під час експлуатації. Це особливо актуально для аналізу динамічних процесів, які відбуваються при роботі гідротурбінного обладнання, де точне передбачення виникнення та розвитку тріщин є критично важливим для забезпечення довговічності та безпечної експлуатації.

## 3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

### 3.1 Комп'ютерний аналіз розв'язання гіперсингулярних рівнянь

Методи комп'ютерного аналізу ГІР включають в себе:

#### 1. Методи колокації

Методи колокації є одним з найпоширеніших чисельних підходів для розв'язання інтегральних рівнянь, включаючи гіперсингулярні. Суть методу полягає у тому, що інтегральне рівняння дискретизується, і розв'язок знаходиться шляхом апроксимації функції у вибраних точках, які називаються вузлами колокації. Рівняння дискретизується в скінченній кількості вузлів. Вибираються базисні функції, і апроксимація функції-пробного розв'язку налаштовується таким чином, щоб задовольнити рівняння у всіх вузлах колокації. Як недолік слід відмітити складнощі із вибором точок колокації. Для гіперсингулярних рівнянь необхідно ретельно обирати вузли, щоб уникнути нестабільності та великої похибки.

#### 2. Метод Гальоркіна

Цей метод є більш загальним і часто виявляється ефективнішим для розв'язання гіперсингулярних рівнянь, особливо коли сингулярність суттєво впливає на поведінку розв'язку. Розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації базисних функцій. Інтегральне рівняння проектується на підпростір, породжений цими функціями, і результат порівнюється з правою частиною рівняння через скалярний добуток. Це призводить до системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів лінійної комбінації. У випадку гіперсингулярних рівнянь важливо правильно вибрати базисні функції, які можуть враховувати поведінку сингулярностей, таких як спеціальні поліноми чи функції, що мають асимптотичні властивості, подібні до шуканого розв'язку. Метод Гальоркіна добре підходить для задач з сильно сингулярними ядрами через можливість використання ортогональних базисів, що мінімізує похибки проєкції, але він може бути складнішим у реалізації та потребує точного обчислення інтегралів з сингулярностями.

### 3. Методи граничних елементів (МГЕ)

Метод граничних елементів є ще одним потужним підходом для розв'язання інтегральних рівнянь, включаючи гіперсингулярні рівняння, які виникають у задачах теорії потенціалу, еластичності, акустики тощо. МГЕ перетворює задачу, що визначається на об'ємній області, на задачу, визначену лише на її межі. Це суттєво зменшує розмірність задачі і дозволяє ефективніше працювати з рівняннями, що містять гіперсингулярні ядра.

Для обробки сингулярних та гіперсингулярних інтегралів в МГЕ застосовують спеціальні техніки регуляризації або відомі аналітичні рішення для окремих випадків, що дозволяють зменшити вплив сингулярностей на чисельний результат. МГЕ зменшує розмірність задачі на одну (з 3D до 2D або з 2D до 1D), що приводить до меншої кількості невідомих і значного зменшення обчислювальних витрат. Це особливо корисно для задач з нескінченними областями або для зовнішніх задач, але МГЕ вимагає більш складних алгоритмів для обчислення сингулярних інтегралів, а також детального розуміння теоретичних аспектів гіперсингулярних рівнянь. Для обробки гіперсингулярних інтегралів використовуються також чисельні методи, такі як методи регуляризації, техніки глибокого зображення або спеціальні інтеграційні схеми.

Вибір методу залежить від конкретної задачі, її геометрії, фізичних властивостей середовища, а також обчислювальних ресурсів. Ці методи є основними підходами до числового розв'язання гіперсингулярних рівнянь, кожен з яких має свої переваги та недоліки залежно від конкретних вимог задачі.

#### 3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання

##### довговічності елементів конструкцій з дефектами

На першому етапі здійснюється дослідження напружено-деформованого стану елемента конструкції без тріщини. Далі створюється геометрична модель конструкції.

Визначаються фізико-механічні властивості матеріалу конструкції.

Для розв'язання задачі використовується метод скінченних елементів (МСЕ). Це складається з таких етапів:

- генерується сітка скінченних елементів для моделювання конструкції;
- розв'язується задача статички для визначення напружено-деформованого стану;
- отримуються поля напружень і деформацій для всього тіла.

Після розрахунку аналізуються результати для виявлення зон із найбільшими концентраціями напружень. Визначаються потенційні місця утворення дефектів (тріщин) на основі критерію міцності. Далі проводиться введення модельної тріщини. У визначеній зоні з високими напруженнями вводиться модель тріщини.

Проводиться підготовка до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння, для цього геометрія тріщини уточнюється, забезпечуючи адекватну дискретизацію для подальшого аналізу та визначаються відповідні граничні умови на краях тріщини. Після цього відбувається розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння методом граничних елементів. Використовується метод граничних елементів для розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння, що описує поле напружень і переміщень навколо тріщини.

Останнім етапом здійснюється оцінка довговічності на основі критерію Периса. Проводиться розрахунок кількості циклів до руйнування. Проводиться аналіз впливу тріщини на залишкову міцність конструкції.

Цей алгоритм дозволяє детально моделювати процес утворення і росту тріщин у конструкції, а також оцінювати довговічність конструкцій з дефектами, що виникають під дією циклічного навантаження.

### 3.3 Опис програми

Розроблено пакет програм DAMAGE для визначення довговічності еле-

менту конструкції з тріщиною на мові програмування VISUAL FORTRAN.

Як вхідні дані, використовуються геометричні розміри елемента. Це довжина, ширина та товщина зразка. Вводяться також механічні характеристики матеріалу: модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, границя міцності, критичний коефіцієнт концентрації напружень. Далі працює підпрограма STATIC, яка визначає напруження та деформації конструктивного елемента. Передбачена можливість вводу цих деформацій та напружень у якості вхідних даних, якщо застосовується інший програмний пакет, наприклад, ANSYS. Внаслідок визначення полів напружень визначаються координати точки, де рівень напружень максимальний. Далі здійснюється введення геометричних параметрів тріщини, значення критичних розмірів тріщини. Передбачені такі види тріщин. Це поодинокі тріщина в плоскому тілі у вигляді прямолінійного відрізка, ланцюжок тріщин в плоскому тілі, тріщина біля отвору в плоскому тілі, кругова тріщина в тривимірному тілі.

Вибір тріщини залежить від того, яка теорія розглядається для опису конструктивного елемента: двовимірний або тривимірний. За параметром `iscracktype` обирається процедура для визначення КІН. Це процедури `ISOLCRACK`, `CRACKCGAIN`, `CRACKHOLE`, `CRACKCIRCLE`. Значення критичних розмірів тріщини вводяться також за параметром `cracktype`. Після цього в головній програмі `DAMAGE` здійснюється визначення кількості циклів до руйнування елемента.

### Висновки за розділом 3

Створено спеціалізований програмний пакет `DAMAGE` на мові програмування `Visual Fortran` для оцінки довговічності конструкційних елементів з тріщинами.

Реалізовано можливість введення геометричних параметрів елемента та механічних характеристик матеріалу, що дозволяє адаптувати програму до ши-

рокого спектра задач.

Програма має модульну структуру.

Застосовано підпрограму STATIC, що розроблено в ІЕМС НАН України, для визначення напружень та деформацій конструктивного елемента. Програма DAMAGE дозволяє використовувати як власні розрахунки, аналітичні розв'язки, так і результати з інших програмних пакетів, таких як ANSYS.

Передбачено введення деформацій та напружень як вхідних даних для більшої гнучкості у використанні різних програмних інструментів.

Реалізовано підтримку різних типів тріщин, включаючи поодинокі тріщини, ланцюжки тріщин, тріщини біля отворів та кругові тріщини у тривимірних тілах.

Передбачено вибір відповідної процедури для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) залежно від типу тріщини та теорії, що використовується (двовимірна або тривимірна). Ці процедури засновані на розв'язанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що описано у пункті 3.1.

Головна програма DAMAGE забезпечує визначення кількості циклів до руйнування елемента з використання критерію Періса, що дозволяє проводити оцінку довговічності конструкційних елементів з урахуванням розвитку тріщин.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для плоских областей з прямолінійними тріщинами

### Поодинокі тріщина

Визначено кількість циклів до руйнування елементів робочого колеса гідротурбіни. Передбачалося, що елемент конструкції, що розглядається, схильний до дії циклічного навантаження з амплітудним значенням  $\sigma$  і частотою  $\omega=3,45$ гц. Розрахунок проводився для початкових розмірів дефекту від 0,003 до 0,0075м. На рис. 3.1 представлені результати чисельного розрахунку часу  $t$  (у роках) підростання внутрішніх ізольованих дефектів різної початкової довжини до неприпустимих за нормами контролю для різних рівнів навантаження  $\sigma$ .

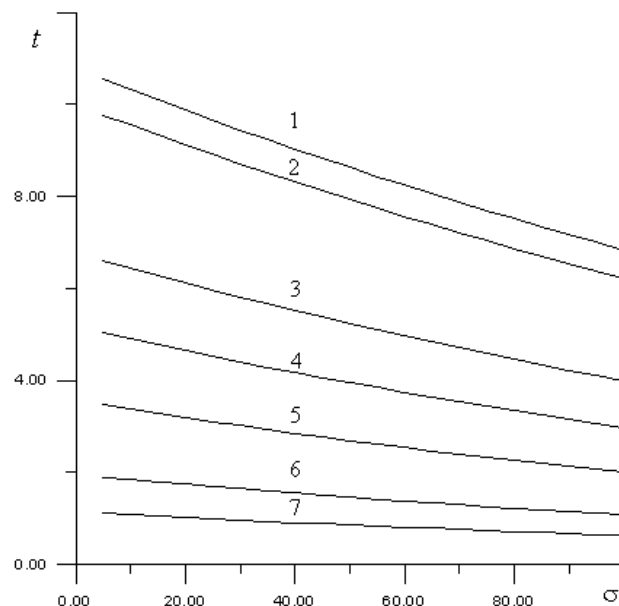


Рисунок 4.1. Зростання ізольованих дефектів.

Цифрами 1-7 на рис. 3.1 позначені криві, що відповідають наступним початковим розмірам дефекту: 0.003, 0.0035, 0.0045, 0.0055, 0.0065, 0.007, 0.0075м. Розглядався матеріал із характеристиками  $N_G = 10^8$ ;  $m = 3.95$ ;

$K_{1c} = 30 \text{ МПа} / \text{м}^{1/2}$  (сталь 06Х12НЗД). Максимально допустимим приймалися такі розміри дефекту: для першого класу 0.006м; для другого – 0.008м.

### Ланцюжок тріщин

Розв'язано задачу визначення числа циклів до руйнування елемента конструкції, ослабленого ланцюжком тріщин (рис.4.2). Саме такі дефекти вважаються найбільш небезпечними [6,7].

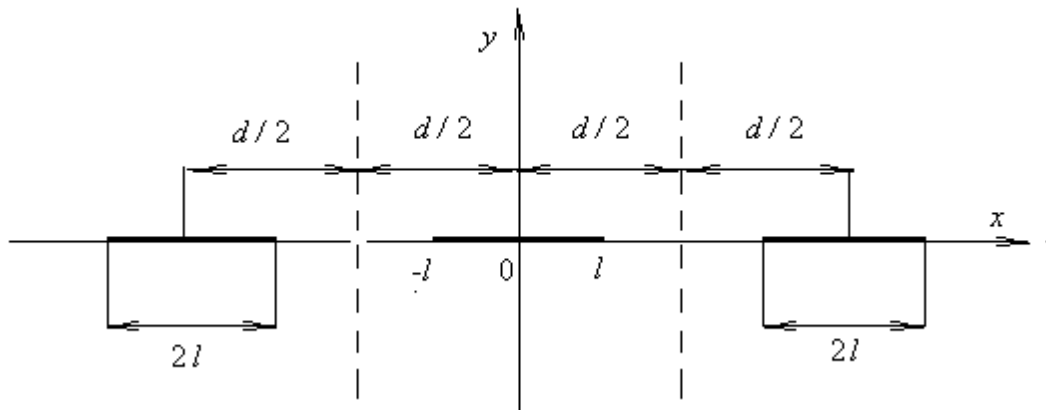


Рисунок 4.2. Періодична система тріщин в елементі конструкції.

Досліджено елемент конструкції з періодичною системою колінеарних тріщин, береги яких навантажені довільним несамоврівноваженим розтягуючим навантаженням  $p$ . В цьому випадку отримано гіперсингулярне інтегральне рівняння, що описує поведінку системи тріщин [7,9]

$$\int_{-l}^l \Gamma(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - x_0 - kd)^2} dx = p(x_0); p(x_0) = \frac{1}{2} (\sigma_y^+ + \sigma_y^-) / M; M = -\frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)}. \quad (4.2)$$

В [7, 10] показано, що розв'язок рівняння цього має вигляд

$$\Gamma(\phi) = p \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi l / d)} - \sqrt{\text{tg}^2(\pi l / d) - \text{tg}^2(\phi / 2)}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2(\pi l / d)} + \sqrt{\text{tg}^2(\pi l / d) - \text{tg}^2(\phi / 2)}} \right|; \quad \phi = \arccos x. \quad (4.3)$$

Для коефіцієнта інтенсивності напружень з використанням цієї формули встановлено [9], що

$$k_1 = \sigma \sqrt{\frac{d}{\pi} \tan \frac{\pi l}{d}}.$$

Тут  $d$  і  $l$  – це відстань між центрами тріщин в ланцюжку і напівдовжина тріщини, відповідно (рис. 3.2). Число циклів до руйнування визначено інтегруванням співвідношення Періса

$$dN = \frac{1}{C} (\Delta K - \Delta K_{th})^{-m} dl, \quad \Delta K_{th} < \Delta K < K_{1C} \quad (4.1)$$

Відзначено, що при  $\Delta K < \Delta K_{th}$  тріщини не розвиваються, а при  $\Delta K_{th} > K_{1C}$  відбувається лавиноподібний розвиток тріщин, що призводить до руйнування.

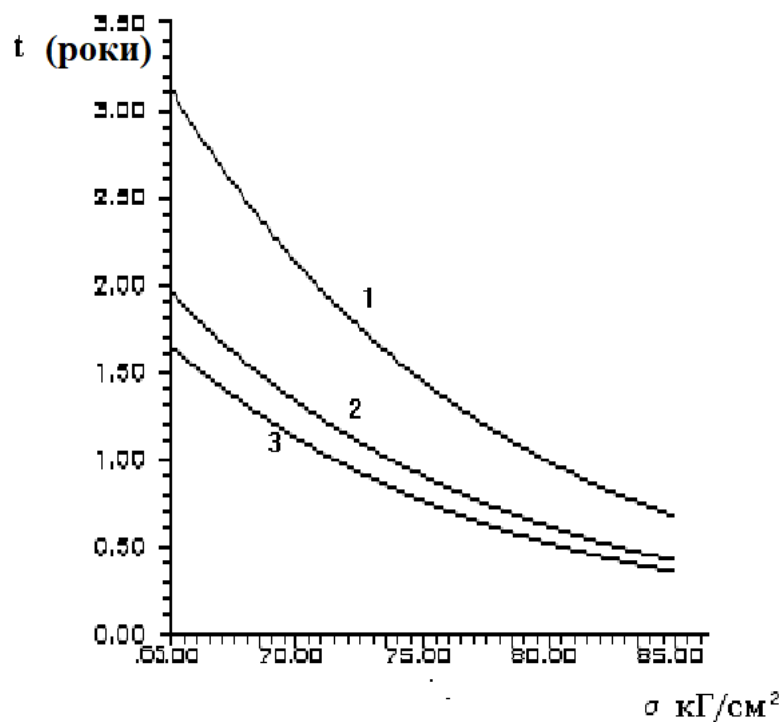


Рисунок 4.3. Зростання дефектів в ланцюжку

З аналізу результатів бачимо, що наявність ланцюжка веде до більш швидкого руйнування. Методика дозволила з'ясувати, за яку кількість циклів дефекти в ланцюжку підростуть до неприпустимих розмірів. Такі розрахунки необхідно проводити для визначення тривалості міжремонтних і міжоглядових періодів. Отримані дані свідчать про обґрунтованість рекомендацій та технічних вимог до зварних швів в гідравлічних турбінах.

#### 4.2 Обчислювальний експеримент для плоскої області з отвором

Розглядаються плоскі елементи конструкцій з отворами, що знаходяться під дією знакозмінного навантаження розтягування – стиснення у напрямку, перпендикулярному до лінії розташування тріщин. Передбачається, що модельна тріщина розташована вздовж контуру. Нехай  $L_i (i = 1, 2, \dots, K)$  – контури, що обмежують аналізований елемент. Використовуємо метод інтегральних рівнянь [20]. Позначимо невідомі густини на контурі  $L_0$  як  $\alpha_1, \alpha_2$ , а на контурах  $L_i (i = 1, 2, \dots, K)$  як  $\beta_i, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, K)$ . Нехай  $n_1^j, n_2^j (j = 0, 1, 2, \dots, K)$  – компоненти внутрішніх одиничних нормалей до контурів, що розглядаються. Вважаємо, що елемент конструкції знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень.

Задача визначення концентрації напружень в елементі конструкції з технологічним отвором радіуса  $r$  і двома симетричними тріщинами (рис. 4.3), що виходять на межу отвору, зводиться до сингулярного рівняння [11]

$$\int_0^1 K(x, \xi) \alpha_2(\xi) d\xi = \pi S_{22}, \quad (4.4)$$

де

$$\begin{aligned}
K(x, \xi) &= P(x, \xi) + S(x, \xi), \\
P(x, \xi) &= \frac{1}{x - \xi} + \frac{\lambda}{1 + \lambda\xi} + \frac{2(\xi^2 + 4x\xi - x^2) + 2\lambda\xi(\xi^2 + 9x\xi + 6x^2)}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda x)(x + \xi + \lambda x\xi)^3} + \\
&\quad + \frac{2\lambda^2 x\xi(4\xi^2 + 12x\xi + 3x^2) + 9\lambda^3 x^2\xi^2(\xi + x) + 3\lambda^4 x^3\xi^3}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda x)(x + \xi + \lambda x\xi)^3}, \\
S(x, \xi) &= \frac{\lambda}{2(1 + \lambda\xi)} + \frac{\lambda[3x^2 - 2x\xi - \xi^2 + \lambda(x^3 - x^2\xi - 7x\xi^2 - \xi^3)]}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda x)(x + \xi + \lambda\xi)^2} - \\
&\quad - \frac{\lambda[\lambda^2 x\xi(3\xi^2 + 8x\xi + x^2) + 3\lambda^3 x^2\xi^2(\xi + x) + \lambda^4 x^3\xi^3]}{2(1 + \lambda\xi)^2(1 + \lambda x)(x + \xi + \lambda\xi)^2} \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Маємо  $\lambda = l / R$ . Числове рішення сингулярного рівняння (2.27) отримано з використанням 80 граничних елементів з постійною апроксимацією щільності всередині елементів. Визначивши невідому функцію  $\alpha_2$ , знаходимо коефіцієнти інтенсивності напруг за формулою

$$k_1 = \frac{G}{2\pi(1 - \nu)} \left( n_1^0 S_{12} + n_2^0 S_{22} \right) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_2(x)}{\sqrt{r}}, \tag{4.6}$$

де  $r$  – відстань між вершиною тріщини та точкою спостереження,  $G$  – модуль зсуву,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Обчислимо кількість циклів навантаження за формулою Періса для зазначеного дефекту, якщо довжина тріщини змінюється від початкового значення  $l_0$  до кінцевого значення  $l_1 = 0.005$  м або до значення, яке неприпустимо з погляду критерію  $K_{Ic}$ , отримаємо  $N = 1102$ . Зазначимо, що отримані дані не враховують показників циклічного напруження до утворення початкових тріщин втоми. Тому цікавить оцінити кількість циклів до появи втомних тріщин для розглянутого дефекту (симетричні тріщини, що виходять край технологічного отвору). Розглядалася пластина з центральним отвором, виготовлена із сталі з такими механічними та геометричними характеристиками: щільність  $\rho = 7850$

кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , довжина пластини  $L = 1$  м, ширина  $b = 0.4$  м, товщина  $h = 0.01$  м, радіус отвору  $R = 0.1$  м, рис. 4.4. Основною характеристикою матеріалу, яка використовується для опису його здатності опору процесу багатоциклової втоми, є крива Велера (крива втоми). Для даного матеріалу ця крива у логарифмічній шкалі показана на рис. 4.6.

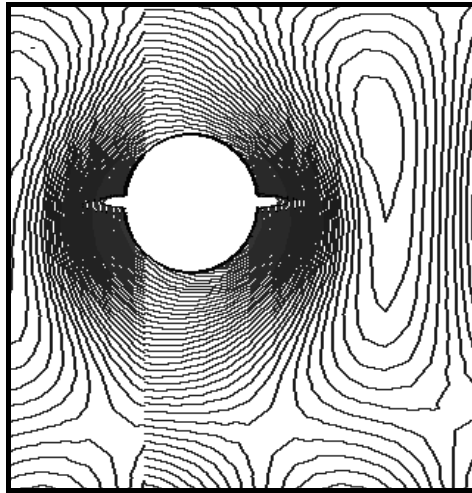


Рисунок 4.4 – Тріщини біля отвору

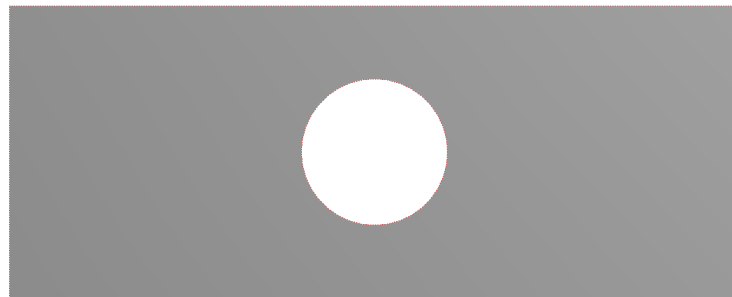


Рисунок 4.5 – Пластина з отвором

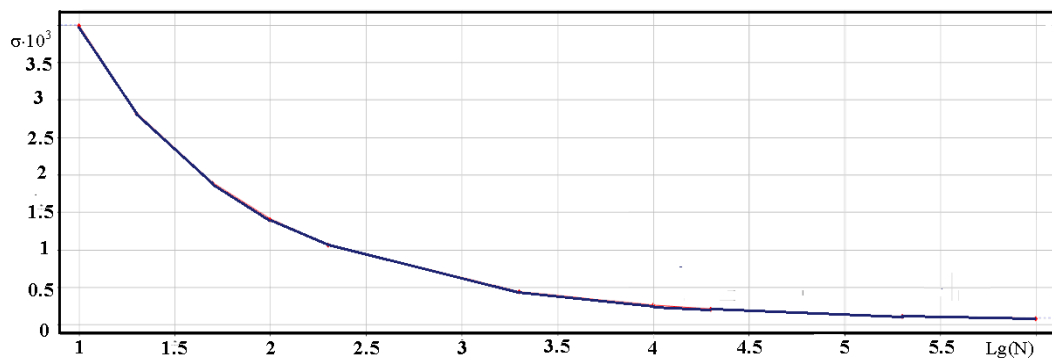


Рисунок 4.6 –  $\sigma$ - $N$  крива втоми

Розглянуто розтягування пластини у горизонтальному напрямку зусиллями  $10^6$  Н. Розподіл еквівалентних по Мізесу напружень в матеріалі пластини відображено на рис. 4.7. Максимальне напруження становило 108.7 МПа. Найбільші напруження спостерігалися на межі кругового отвору.

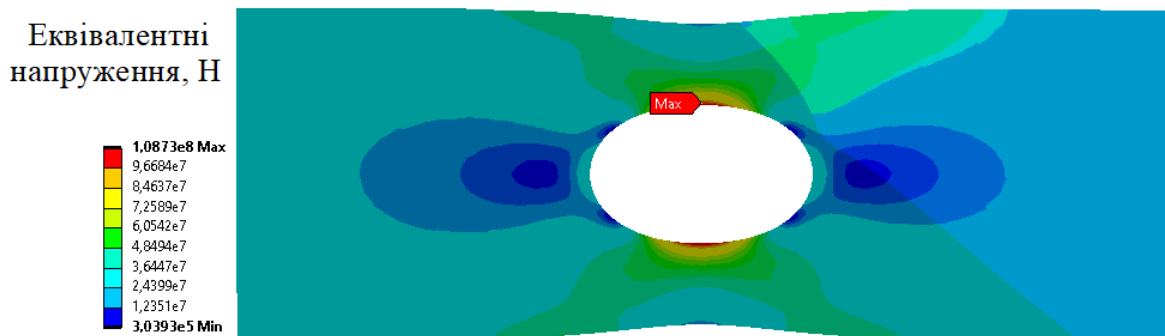


Рисунок 4.7 – Еквівалентне за Мізесом напруження в пластині

Розрахунок на багатоциклову втому показав, що найменша кількість циклів до руйнування спостерігається на межі кругового отвору, у тих же областях, де досягаються найбільші напруження, що показав статичний розрахунок (рис. 4.7).

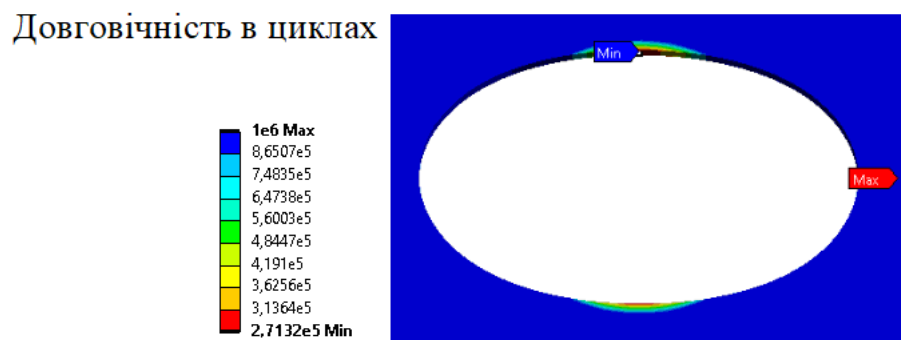


Рисунок 4.8 – Кількість циклів до руйнування елемента конструкції

При розрахунку на циклічну втому конструкція навантажувалася за синусоїдальним законом з амплітудами  $\pm 108.7$  МПа и частотою 1 Гц. Розрахунок

показав, що мінімальна кількість циклів до руйнування становить  $N = 271300$ . Вище було показано, що для елемента конструкції, що розглядається, розвиток втомної тріщини від початкового розміру тріщини  $l_0 = 0.0002$  м до максимально допустимого розміру  $l_1 = 0.0047$  м відбувається за 1102 цикли, що істотно менше числа циклів навантаження при розрахунку на багатоциклову втому. Таким чином, основний внесок в оцінку ресурсу робить показник циклічного напруження, тобто кількість циклів навантаження до появи втомлених тріщин. Знаючи загальну кількість циклів до руйнування (в даному випадку 272402) і частоту навантаження, визначаємо час до руйнування елемента конструкції. Отримані дані дозволяють оцінити безпеку транспортування елемента конструкції за наявності реальних циклограм перевезення.

#### Висновки за розділом 4

Розвинені теорія і метод розрахунку довговічності елементів конструкцій з тріщинами в умовах дії навантажень, що циклічно змінюються, є ключовими для підвищення надійності та безпечності складних інженерних систем. Запропонована методика розрахунку заснована на застосуванні методів теорії потенціалу та граничних інтегральних рівнянь, що забезпечує високий рівень точності при моделюванні напружено-деформованого стану конструкційних елементів з тріщинами. Такий підхід дозволяє враховувати складні геометричні форми та властивості матеріалів, що є критично важливими для точного прогнозування розвитку тріщин під дією циклічних навантажень.

Методика дозволяє ефективно оцінювати довговічність елементів гідротурбінного обладнання, яке знаходиться під впливом постійних змін навантажень та ослаблене тріщинами. Це має особливе значення для таких елементів, як зварні колеса радіально-осьових гідротурбін, де циклічні навантаження можуть викликати поступове накопичення пошкоджень і призводити до розвитку тріщин, що в кінцевому підсумку впливає на експлуатаційну надійність облад-

нання. Застосування розробленої методики дозволяє проводити детальний аналіз довговічності таких елементів, сприяючи прийняттю більш обґрунтованих рішень щодо їх обслуговування та заміни, а також підвищенню загальної ефективності експлуатації гідротурбінних систем.

## ВИСНОВКИ

Одержані результати демонструють високу точність і надійність моделювання довговічності елементів конструкцій, що відповідає сучасним науковим і технічним стандартам у галузі механіки руйнування та комп'ютерного інжинірингу.

Запропоновані методи розрахунку та аналізу підтверджуються числовими експериментами, результати яких узгоджуються з відомими аналітичними розв'язками та даними інших авторів, що свідчить про відповідність сучасним науковим уявленням про поведінку матеріалів під дією циклічних навантажень. В роботі використано метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

Розроблені методики та програмне забезпечення вже знаходять застосування у галузі енергетичного машинобудування, зокрема для оцінки довговічності елементів гідротурбінного обладнання на ВАТ «Українські енергетичні машини»

Можливості впровадження результатів дослідження є перспективними для використання в авіаційній, автомобільній та будівельній галузях, де питання довговічності конструкцій мають вирішальне значення.

Наукова значущість роботи полягає у розробці ефективної методики моделювання та аналізу довговічності. Науково-технічна значущість виражається у можливості підвищення надійності та безпеки експлуатації складних інженерних об'єктів, що знижує ризик аварій та подовжує термін їх експлуатації.

Соціально-економічна значущість роботи полягає у зниженні витрат на ремонт та обслуговування критичних інфраструктур, а також у підвищенні безпеки громадськості.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення методології для більш складних геометричних форм конструкцій, врахування анізотропних та гетерогенних матеріалів, а також моделювання тріщин, що виникають при різних температурних умовах.

Доцільно продовжувати роботи з розробки ефективніших числових алго-

ритмів, що дозволять ще швидше та точніше оцінювати довговічність складних конструкцій, та будуть використані при моніторингу стану обладнання

Перспективним є дослідження впливу різних типів навантажень на поведінку матеріалів з метою подальшого удосконалення методики прогнозування руйнування.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Сидоров В. В., III Міжнародна науково-практична конференція «*Навчання і викладання: у світі після війни*» (м. Харків, 08 листопада 2024 р.) : зб. матеріалів конференції. Харків : Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, 2024. С.
2. Гавриленко А. М., Острогляд В. О. Моделювання тріщин у матеріалах методом кінцевих елементів. Київ : Наукова думка, 2020. 250 с.
3. Троян В.В., Кіндрась Б.П. Моделювання тріщиностійкості високоміцних бетонів, здатних до самоущільнення. *В'язучі бетони та добавки*. 2021. С. 34–37.
4. Литвиненко О. В. Механіка руйнування та довговічність конструкцій. Харків : ХНУРЕ, 2018. 320 с.
5. Сидоренко І. А., Шевченко Т. В. Теорія тріщин у механіці матеріалів. Львів : ЛНУ, 2019. 275 с.
6. Lino Maia, Influence of Shrinkage Reducing admixtures on distinct SCC mix compositions. *Construction and Building Materials*. 2012. №35. P. 304 – 306.
7. Philippe Turcry, Cracking Tendency of Self-Compacting Concrete Subjected to Restrained Shrinkage. *Experimental Study and Modeling*. 2006. № 18. P. 46 – 54.
8. Alavi, A. H., Olesen, J. H. Computational Modelling of Cracks in Concrete Structures. *Engineering Fracture Mechanics*. 2018. №11. P. 86 – 89.
9. Baker, J., Lattimer, B. A. Finite Element Modelling of Structural Integrity in Engineering Applications. *Journal of Structural Integrity and Maintenance*. 2020. №2. P. 212 – 217.
10. Lee, J. H., Kim, D. H. Crack Propagation Analysis in Structural Components Using Finite Element Methods. Sao Paulo: “Elsevier”. 2019. 45 p.
11. Luu, T. Q., Tran, H. H. Computational Methods for Predicting the Durability of Structural Elements with Defects. Sao Paulo: “Elsevier”. 2019. 71 p.
12. Bantia V., Mukherjee S. On stresses and line integrals in the presence of cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1982. P. 151 – 161.

13. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of discrete Vortex. Miami: CRC Press. 1993. 234 p.
14. Bonnet M., G. Maier, Polizzotto C. Symmetric Galerkin boundary element method. *HAL Open Science*. 1998. P. 669 – 703.
15. Chang Y.P. , Kang C.S., Chen D.J. The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1973. P. 1905 – 1918.
16. Chawla M.M., Ramarkrishnan T.R. Modified Gauss-Jacoby quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals. *BIT Numerical Mathematics*. 1974. P. 317 – 323.