

УДК 621.391

А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ, Д. М. ВАВРИВ, канд. физ.-мат. наук, *Б. А. КАЛУГИН*
**СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ
ПРИ МНОГОКРАТНОМ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС**

Явление прохождения через резонанс возникает при изменении параметров внешнего сигнала или нелинейной колебательной системы вблизи значений, для которых имеет место резонансное воздей-

ствие внешнего источника на колебательную систему. Однократное прохождение через резонанс изучено достаточно хорошо [1]. В случае многократного прохождения в отличие от однократного возможен эффект стохастизации колебаний системы. Некоторые закономерности этого явления в недиссипативных системах рассмотрены [2]. Применительно к диссипативным колебательным системам такой способ возбуждения стохастических колебаний изучен теоретически и экспериментально пока недостаточно полно. Большой интерес представляет исследование данного явления на простых физических объектах. Для этого мы выбрали радиотехнический контур с нелинейным элементом. Отметим, что эти системы широко используются для экспериментальной проверки различных механизмов стохастизации колебаний. На их примере интенсивно изучается переход к стохастичности через последовательность бифуркаций удвоения периода [3].

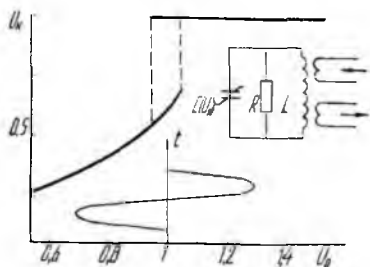


Рис. 1

Рассмотрим результаты экспериментального исследования нелинейного контура, доказывающие возможность возбуждения в системе стохастических колебаний при многократном прохождении через резонанс в результате амплитудной модуляции внешнего гармонического сигнала. Контур представлял собой (рис. 1) параллельное соединение сопротивления R , индуктивности L и нелинейной емкости C , в качестве которой использовался варикап Д901В, включенный последовательно с разделительной емкостью. Для предотвращения отпирания варикапа на него подавалось постоянное напряжение, изменением которого регулировались также собственная частота и степень нелинейности системы. Подача внешнего сигнала и регистрация колебаний в контуре осуществлялись через слабую индуктивную связь (коэффициент связи менее 0.01). Внешний сигнал изменялся во времени по закону $U_{вн} = U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, где U_0 , ω_0 — амплитуда и несущая частота колебаний; m , Ω — коэффициент и частота модуляции. Результаты эксперимента, представленные далее, соответствуют частоте малых колебаний в контуре $f = 16,95$ МГц при его добротности $Q \approx 30$. Номиналы элементов контура составляли $R \approx 20$ кОм, $C \approx 20$ пФ, $L \approx 4,4$ мкГн.

В случае отсутствия амплитудной модуляции внешнего сигнала ($m = 0$) в достаточно широком диапазоне изменения амплитуды U_0 в контуре возбуждались периодические колебания без перехода к стохастичности через последовательность удвоений их периода. При этом зависимость амплитуды возбуждаемых колебаний U_k от амплитуды внешнего сигнала U_0 (рис. 1) имела типичный для неизохронных колебательных систем гистерезисный характер, если час-

тота внешнего сигнала находилась в области гистерезиса на амплитудно-частотной характеристике контура [4]. Проведенные исследования показали, что именно такой вид амплитудной характеристики при $m = 0$ является необходимым для стохастизации колебаний в случае введения амплитудной модуляции внешнего сигнала. На рис. 2 представлена последовательность изменений спектра выходных колебаний для значений

$m = 0,11$ (позиция а), $0,31$ (б), $0,38$ (в); частота модуляции $\Omega \approx 20$ кГц. В условиях данного эксперимента стохастические колебания возбуждались начиная с $m \approx 0,30$. Процесс перехода от периодических к хаотическим колебаниям имел «жесткий» характер; предварительного обогащения спектра колебаний дискретными составляющими, характерного в случае перехода к хаосу через последовательность удвоенный периода, не отмечалось. Изменение огибающей сигнала при $m = 0,30$ отражено на рис. 1 штриховой линией, откуда следует, что стохастические колебания возбуждаются, если амплитуда внешнего модулированного колебания многократно проходит через область амплитудного гистерезиса. Увеличение коэффициента модуляции до $m \approx 0,38$ приводит к срыву стохастических колебаний и переходу в режим возбуждения периодических многочастотных колебаний. Эксперименты показали также, что существует минимальное значение частоты модуляции $\Omega_{\text{мин}} \approx 7$ кГц, ниже которого стохастизация колебаний не наблюдалась. При изменении частоты модуляции от $\Omega_{\text{мин}}$ до 200 кГц отмечался устойчивый режим возбуждения стохастических колебаний со сплошным спектром, ширина которого слабо зависела от Ω и возрастала с увеличением ширины области гистерезиса по частоте на амплитудно-частотной характеристике контура. Проведенные эксперименты позволяют сформулировать основные условия, необходимые для возникновения стохастических колебаний в нелинейном контуре при воздействии на него амплитудно-модулированного сигнала.

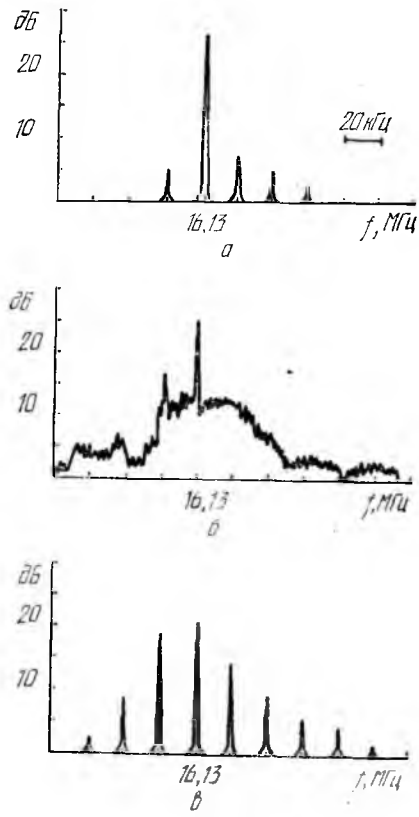


Рис. 2

1. Несущая частота ω_0 и амплитуда U_0 внешнего сигнала в случае $m = 0$ должны выбираться из условия обеспечения гистерезисной амплитудной характеристики контура.

2. При изменении амплитуды сигнала во времени ($m \neq 0$) должна перекрываться область гистерезиса на этой характеристике, но коэффициент модуляции m не должен превышать некоторого максимального значения.

3. Частота модуляции Ω должна превышать некоторое минимальное значение.

Эти закономерности прослеживались достаточно хорошо при исследовании разных контуров в различных диапазонах частот (от нескольких килогерц до десятков мегагерц).

Для объяснения основных закономерностей возбуждения стохастических колебаний, обнаруженных в эксперименте, рассмотрим следующую математическую модель этой системы. Известно, что заряд q нелинейной емкости, включенной в колебательный контур, изменяется во времени в соответствии с нелинейным дифференциальным уравнением типа неавтономного уравнения Дуффинга. Ограничиваясь кубическим членом в разложении зависимости $q(u)$, характеризующей нелинейные свойства емкости, по степеням напряжения u и проводя усреднение этого уравнения, приходим к укороченным уравнениям для амплитуды a и фазы v колебаний в контуре:

$$\frac{da}{dt} = -\alpha a + A(t) \sin v; \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \Delta + \beta a^2 + \frac{A(t)}{a} \cos v, \quad (1a)$$

где α , β определяются диссипацией и нелинейностью системы; Δ — расстройка между частотой малых колебаний и несущей частотой внешнего сигнала; $A(t)$ — огибающая внешнего воздействия, $A(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t)$. Связь этих величин с параметрами исходного нелинейного дифференциального уравнения хорошо известна [4]. Поскольку непосредственное аналитическое исследование системы (1) встречает определенные трудности, будем проводить ее анализ, моделируя внешнее воздействие последовательно

стью δ -импульсов: $A(t) \rightarrow B(t) = B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, $T = 2\pi/\Omega$. Такая модель сохраняет основную особенность исходного процесса — многократное прохождение резонанса, изменяется лишь характер самого прохождения. Подобные модели широко используются при исследовании стохастического поведения динамических систем [2; 5], позволяя существенно упростить анализ исходной системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к дискретному отображению.

Перейдем в системе (1) к переменным $u = a \cos v$, $v = a \sin v$ и произведем замену $A(t) \rightarrow B(t)$:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u - [\Delta + \beta(u^2 + v^2)]v; \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v + [\Delta + \beta(u^2 + v^2)]u + B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2a)$$

Решение этой системы уравнений при $B = 0$ имеет вид

$$u(t) = e^{-\alpha t} [u_0 \cos \psi(t) - v_0 \sin \psi(t)]; \quad (3)$$

$$v(t) = e^{-\alpha t} [u_0 \sin \psi(t) + v_0 \cos \psi(t)], \quad (3a)$$

где $\psi(t) = \Delta t + \beta(u_0^2 + v_0^2)(1 - e^{-2\alpha t})/2\alpha$; u_0, v_0 — значения u, v в начальный момент времени $t = 0$.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений (2) к дискретному отображению. Для этого проинтегрируем (2) по бесконечно малой окрестности времени в момент действия n -го δ -импульса

$$u(nT + 0) - u(nT - 0) = 0 \quad (4), \quad v(nT + 0) - v(nT - 0) = B. \quad (4a)$$

На промежутке между моментами действий n -го и $(n+1)$ -го δ -импульсов $B(t) = 0$. Тогда, используя (3), запишем

$$u((n+1)T - 0) = e^{-\alpha T} [u(nT + 0) \cos \psi(T) - v(nT + 0) \sin \psi(T)]; \quad (5)$$

$$v((n+1)T - 0) = e^{-\alpha T} [u(nT + 0) \sin \psi(T) + v(nT + 0) \cos \psi(T)]. \quad (5a)$$

Обозначая $u_n = u(nT - 0)$, $v_n = v(nT - 0)$ и учитывая (4), (5), получаем связь между значениями u_n, v_n , взятыми в моменты времени, непосредственно предшествующие действиям двух последовательных δ -импульсов:

$$u_{n+1} = e^{-\alpha T} [u_n \cos \psi_n - (v_n + B) \sin \psi_n]; \quad (6)$$

$$v_{n+1} = e^{-\alpha T} [u_n \sin \psi_n + (v_n + B) \cos \psi_n], \quad (6a)$$

где

$$\psi_n = T(\Delta + \beta\mu[u_n^2 + (v_n + B)^2]), \quad \mu = \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{2\alpha T}. \quad (7)$$

Полученное отображение (6) является точным следствием исходных дифференциальных уравнений (2), при его выводе никаких ограничений на параметры системы (2) не накладывалось.

Известно [5], что необходимым условием возникновения стохастического поведения величин u_n, v_n является наличие растяжения элемента фазового объема ($\delta u_n, \delta v_n$) в каком-либо направлении в окрестности неподвижной точки отображения (6). Для выяснения условий, приводящих к этому, запишем уравнения, определяющие

щие неподвижные точки u_* , v_* отображения (6), следующие из соотношений $u_{n+1} = u_n \equiv u_*$, $v_{n+1} = v_n \equiv v_*$

$$u_*^2 = v_*^2 = e^{-2\alpha T} [u_*^2 + (v_* + B)^2]; \quad (8)$$

$$\arctg \frac{v_*}{u_*} = \arctg \frac{v_* + B}{u_*} + \psi_*. \quad (8a)$$

Собственные значения матрицы $\|Q_{ij}\| = \left\| \frac{\partial \omega_{n+1}^i}{\partial \omega_n^j} \right\|$, $i, j = 1, 2$, где

$\omega_n^1 = u_n$, $\omega_n^2 = v_n$, в неподвижной точке имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \operatorname{sgn}(\varphi) \exp(-\alpha T \pm \operatorname{Arch}|\varphi|).$$

Здесь

$$\varphi = \sqrt{1 + \xi^2} \cos(\Delta T + \xi + \arctg \xi); \quad \xi = \beta \mu T [u_*^2 + (v_* + B)^2];$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Для растяжения элемента фазового объема необходимо, чтобы модуль одного из собственных чисел λ_{\pm} превышал единицу. Это возможно при $|\varphi| > \operatorname{ch} \alpha T$ (9).

Принимая условие (9) в качестве критерия стохастичности в рассматриваемой системе, можно объяснить основные закономерности, наблюдавшиеся в эксперименте. Для выполнения условия (9) необходимо выполнение неравенства $\sqrt{1 + \xi^2} > \operatorname{ch} \alpha T$ (10), что возможно лишь при достаточно больших ξ . Согласно (8) значение ξ равно нулю при $B = 0$ и растет с увеличением B . Это объясняет первое из полученных в эксперименте условий стохастичности, поскольку гистерезисный характер амплитудной характеристики возможен лишь при достаточно больших амплитудах внешнего сигнала. Из (10) также следует существование минимальной частоты модуляции внешнего воздействия. Действительно, с уменьшением Ω (с увеличением T) правая часть (10) растет экспоненциально, левая — линейно, следовательно, при достаточно малых Ω условие (10) заведомо не выполняется. Далее, в силу зависимости φ от $\cos(\Delta T + \xi + \arctg \xi)$ из (9) вытекает существование зон стохастичности, определяемых условием $\Delta T + \xi + \arctg \xi \approx m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, чередующихся с зонами устойчивости, определяемых соотношением $\Delta T + \xi + \arctg \xi \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$. Возможно, что в эксперименте при изменении коэффициента модуляции m от 0,30 до 0,38 наблюдалось прохождение одной такой зоны стохастичности. Наличие других зон, не отмечавшихся в эксперименте, связано, вероятно, с отмеченными особенностями используемой математической модели.

Таким образом, дискретное отображение (6) объясняет основные закономерности возникновения стохастических колебаний в не-

линейном колебательном контуре, выявленные в процессе экспериментальных исследований. Для количественного описания этих закономерностей требуется, по-видимому, более точно учесть закон изменения амплитуды, действующего на систему внешнего сигнала.

Список литературы: 1. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах.— К. : Б. и., 1955.— 284 с. 2. Чириков Б. В., Шепелянский Д. Л. Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса.— Новосибирск, 1980.— 26 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т ядерной физики; 80—211). 3. Переход к хаосу в нелинейном осцилляторе при импульсном периодическом воздействии / Б. П. Безручко, С. П. Кузнецов, Е. П. Селезнев, Е. Е. Яворская // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике.— Саратов, 1983.— Т. 2.— С. 36—44. 4. Основы теории колебаний / В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин.— М. : Наука, 1978.— 392 с. 5. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем.— М. : Наука, 1984.— 272 с.

Поступила в редколлегию 22.01.86