

В. В. ОБЧАРЕНКО, канд. техн. наук, В. И. АИТЮФЕЕВ, канд. техн. наук,
Н. П. МАКАРУЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

В работе [1] решена обобщенная внутренняя задача электродинамики для слоя, в которой в качестве граничного условия выступает требование равенства нулю нормальной составляющей вектора Умова—Пойнтинга $\vec{\Pi}$. Получено восемь различных видов колебаний электромагнитного поля. Среди них встретились и новые разновидности гармонических полей. В частности, обнаружены колебания с частотой, не зависящей от толщины слоя, она может быть произвольной, а вектор $\vec{\Pi} = \vec{0}$ в любой точке области, занимаемой полем. В других вариантах переменных полей вектор $\vec{\Pi} = \vec{0}$ только на границе S слоя.

Условие $\vec{\Pi}|_S = \vec{0}$ выполняется лишь при идеальных стенках границы области, т. е. когда хотя бы один из параметров σ' , ϵ' , μ' — проводимость, диэлектрическая и магнитная проницаемости стенок — равен бесконечности. В противном случае $\vec{\Pi}|_S \neq 0$, энергия выходит из слоя, колебания затухают. Затухание может сопровождаться качественными изменениями картины распределения поля в слое. В статье исследуются пространственно-временные переходные процессы в слоистой структуре. Их изучение сопряжено с известными математическими трудностями. Цель исследования: разработать эффективный метод решения соответствующей задачи Коши с условиями сопряжения и выделить те собственные решения однородной электродинамической задачи, затухание которых происходит без качественного изменения их формы. Такие решения будем называть устойчивыми по форме. Практическое значение последних состоит в возможности их реализации.

Рассматривается случай непроводящих стенок ($\sigma' = 0$). В качестве начального условия берется распределение электромагнитного поля в слое в момент $t' = 0$, соответствующее произвольным собственным колебаниям, полученным в работе [1]. Фактические расчеты переходных процессов выполнены для собственных колебаний, у которых на границе S тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю.

Постановка задачи. Пусть плоский слой имеет толщину d , а стенки, ограничивающие его, простираются в обе стороны до бесконечности. Диэлектрическую и магнитную проницаемости обозначим через ϵ , μ в слое и ϵ' , μ' в стенках. Предположим, что всюду проводимость $\sigma = 0$. Выберем декартову систему координат так,

чтобы границы слоя были перпендикулярны оси Ox' и имели координаты $x'=0$ и $x'=d$. Введем безразмерные переменные $x = x'/d$, $t = t'/c/d$, где $c = (\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu)^{-1/2}$.

Требуется найти зависящее только от x , t электромагнитное поле \vec{E} , \vec{H} в слое и в стенках для $t > 0$, если при $t = 0$ поле задано и отлично от нуля только в слое. Легко проверить, что в случае зависимости электромагнитного поля от одной пространственной переменной x , составляющие $E_x = \text{const}$, $H_x = \text{const}$. Будем искать поля с нулевыми константами. Для остальных компонент поля в слое из уравнений Максвелла получаем независимые системы дифференциальных уравнений (ДУ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -W \frac{\partial H_z}{\partial t}; & \frac{\partial E_z}{\partial x} &= W \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\frac{1}{W} \frac{\partial E_y}{\partial t}; & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \frac{1}{W} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1), \quad (2)$$

Здесь $W = \left(\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon} \right)^{1/2}$; ϵ_0 , μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Заменяя в ДУ (1), (2) W на $W'c/c'$, где $W' = \left(\frac{\mu_0 \mu'}{\epsilon_0 \epsilon'} \right)^{1/2}$,

$c' = (\epsilon_0 \epsilon' \mu_0 \mu')^{-1/2}$, получаем уравнения для поля в стенках.

Отметим, что любое электромагнитное поле, зависящее только от одной пространственной переменной x , удовлетворяет уравнениям $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{H} = 0$. Снабдим все поля в области $x < 0$ одним штрихом, а в области $x > 1$ — двумя. Тогда начальные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}'(x, 0) &= \vec{E}''(x, 0) = \vec{0}; & \vec{H}'(x, 0) &= \vec{H}''(x, 0) = \vec{0}; \\ \vec{E}(x, 0) &= \vec{e}(x); & \vec{H}(x, 0) &= \vec{h}(x). \end{aligned}$$

Условия сопряжения полей на границе выглядят так:

$$\begin{aligned} \vec{E}'(0, t) &= \vec{E}(0, t); & \vec{E}(1, t) &= \vec{E}''(1, t); \\ \vec{H}'(0, t) &= \vec{H}(0, t); & \vec{H}(1, t) &= \vec{H}''(1, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Следует также добавить требование финитности по x электромагнитного поля при любом фиксированном $t > 0$, вытекающее из конечности скорости распространения электромагнитного поля.

Решение задачи. Системы уравнений (1), (2) могут решаться независимо друг от друга, причем общее решение задачи (1) может быть получено из решения задачи (2) заменой y на z , z на y , W , W' на $-W$, $-W'$. Применив к уравнениям (1), (2) преобразо-

вание Лапласа, запишем для слоя и стенок следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_z^i}{\partial x} &= W[p \hat{H}_y^i - h_y(x)]; & \frac{\partial \hat{E}_z^a}{\partial x} &= W' \frac{c}{c'} p I I_y^a; \\ & (4) & & (5) \\ \frac{\partial \hat{H}_y^i}{\partial x} - \frac{1}{W} [p \hat{E}_z^i - e_z(x)], & & \frac{\partial \hat{H}_y^a}{\partial x} &= \frac{c}{c'} \frac{p}{W'} \hat{E}_z^a. \end{aligned}$$

Общее решение системы обыкновенных ДУ (5) имеет вид

$$\hat{E}_z^a(x, p) = W' \frac{c}{c'} [\hat{A}^a(p) e^{\lambda' x} - \hat{B}^a(p) e^{-\lambda' x}];$$

$$\hat{H}_y^a(x, p) = \hat{A}^a(p) e^{\lambda' x} + \hat{B}^a(p) e^{-\lambda' x},$$

где $\lambda' = pc^2/c'$; $\hat{A}^a(p)$, $\hat{B}^a(p)$ — произвольные функции от p . Так как оригиналы, соответствующие членам с $e^{\lambda' x}$ ($e^{-\lambda' x}$), представляют собой волны, распространяющиеся в отрицательном (положительном) направлении вдоль оси Ox , для удовлетворения требования финитности по x решений системы (5) необходимо принять равным нулю: для области $x < 0$ коэффициент при $e^{-\lambda' x}$; для $x > 1$ коэффициент при $e^{\lambda' x}$.

В результате имеем

$$\hat{E}_z^a(x, p) = W' \frac{c}{c'} \hat{A}'(p) e^{\lambda' x}; \quad \hat{H}_y^a(x, p) = \hat{A}'(p) e^{\lambda' x} \quad \text{при } x < 0;$$

$$\hat{E}_z^a(x, p) = -W' \frac{c}{c'} \hat{B}'(p) e^{-\lambda' x}; \quad \hat{H}_y^a(x, p) = \hat{B}'(p) e^{-\lambda' x} \quad \text{при } x > 1.$$

Общее решение неоднородной системы ДУ (4) имеет вид

$$\hat{E}_z^i(x, p) = W [\hat{A}(p) e^{px} - \hat{B}(p) e^{-px} - P(x, p)];$$

$$\hat{H}_y^i(x, p) = \hat{A}(p) e^{px} + \hat{B}(p) e^{-px} - Q(x, p), \quad (6)$$

$$\text{где } P(x, p) = \int_0^x [h_y(\xi) \operatorname{ch} p(x - \xi) + W e_z(\xi) \operatorname{sh} p(x - \xi)] d\xi; \quad (7)$$

$$Q(x, p) = \int_0^x [h_y(\xi) \operatorname{sh} p(x - \xi) + W e_z(\xi) \operatorname{ch} p(x - \xi)] d\xi. \quad (8)$$

Для нахождения четырех неизвестных функций $\hat{A}'(p)$, $\hat{A}(p)$, $\hat{B}'(p)$, $\hat{B}(p)$ используем уравнения сопряжения (3):

$$\hat{A}'(p) = 2 [P(1, p) + \gamma Q(1, p)] / R(p); \quad (9)$$

$$\hat{A}(p) = \hat{A}'(p) (1 + \gamma) / 2; \quad \hat{B}(p) = \hat{A}'(p) (1 - \gamma) / 2; \quad (10)$$

$$\hat{B}'(p) = e^{\lambda'} \{P(1, p) [(1 + \gamma) e^p + (1 - \gamma) e^{-p}] - Q(1, p) [(1 + \gamma) e^p - (1 - \gamma) e^{-p}]\} / R(p).$$

Здесь $R(p) = (1 + \gamma)^2 e^p - (1 - \gamma)^2 e^{-p}$, $\gamma = W'/W$.

Если в общем решении (4) применить интегралы с пределами от x до 1, то можно получить для коэффициента $\hat{B}'(p)$ выражение, аналогичное (9):

$$\hat{B}'(p) = 2e^{\lambda'} [P_1(1, p) - \gamma Q_1(1, p)] / R(p),$$

где $P_1(1, p) = \int_0^1 [h_y(\xi) \operatorname{ch} p\xi - W e_z(\xi) \operatorname{sh} p\xi] d\xi;$

$$Q_1(1, p) = \int_0^1 [-h_y(\xi) \operatorname{sh} p\xi + W e_z(\xi) \operatorname{ch} p\xi] d\xi.$$

Частный случай. Используем решения [1]. Для любого из них компоненты поля E_z, H_y описываются формулами

$$E_z(x, t) = W \{a \cos [\omega(t + x) + \alpha] - b \cos [\omega(t - x) + \beta]\}; \quad (11)$$

$$H_y(x, t) = a \cos [\omega(t + x) + \alpha] + b \cos [\omega(t - x) + \beta]. \quad (12)$$

Здесь a, b, α, β — вещественные константы, подчиняющиеся определенным условиям, выделяющим различные классы решений. Исходя из (11), (12), записываем

$$e_z(x) = E_z(x, 0) = W [a \cos(\omega x + \alpha) - b \cos(\omega x - \beta)];$$

$$h_y(x) = H_y(x, 0) = a \cos(\omega x + \alpha) + b \cos(\omega x - \beta).$$

При таких начальных функциях интегралы $P(x, p), Q(x, p)$ (см. соотношения (7), (8)) равны

$$P(x, p) = aI^+(x, p) + bI^-(x, p); \quad Q(x, p) = aI^+(x, p) - bI^-(x, p), \quad (13)$$

где $I^+(x, p) = \frac{\cos \alpha}{p^2 + \omega^2} (-\lambda \cos \omega x + \omega \sin \omega x + p e^{px}) +$

$$+ \frac{\sin \alpha}{p^2 + \omega^2} (\lambda \sin \omega x + \omega \cos \omega x - \omega e^{px});$$

$$I^-(p, x) = \frac{\cos \beta}{p^2 + \omega^2} (p \cos \omega x + \omega \sin \omega x - p e^{-px}) +$$

$$+ \frac{\sin \beta}{p^2 + \omega^2} (p \sin \omega x - \omega \cos \omega x + \omega e^{-px}).$$

Используя выражения (13) в формуле (9), определяем

$$\hat{A}'(p) = \frac{2}{R(p)(p^2 + \omega^2)} \{ (1 + \gamma) a \cos \alpha (-p \cos \omega + \omega \sin \omega + p e^p) +$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 + \gamma) a \sin \alpha (\rho \sin \omega + \omega \cos \omega - \omega e^{\rho}) + \\
 & + (1 - \gamma) b \cos \beta (\rho \cos \omega + \omega \sin \omega - \rho e^{-\rho}) + \\
 & + (1 - \gamma) b \sin \beta (\rho \sin \omega - \omega \cos \omega + \omega e^{-\rho}) \}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь $\omega = \pi n$, $n \in N$.

С целью упрощения выкладок дальнейшие вычисления проведем для первой группы решений [1], которые характеризуются равенствами $b = a$, $\beta = \alpha$. Кроме того, положим $\alpha = 0$, $E_y = 0$, $H_z = 0$. Этого достаточно, чтобы проиллюстрировать особенности вычисления оригиналов в рассматриваемой ситуации, а также получить представление о характерных чертах колебаний и затухании электромагнитного поля в слое. Отметим, что на результаты вычислений существенно влияет значение параметра a .

Итак, при $b = a$, $\beta = \alpha = 0$ выражение (14) принимает вид

$$\hat{A}'(\rho) = \hat{g}(\rho) [e^{\rho/2} - (-1)^n e^{-\rho/2}] (1 - \gamma). \quad (15)$$

Здесь
$$\hat{g}(\rho) = \frac{2a\rho\gamma}{[\rho^2 + (\pi n)^2] [(1 + \gamma)e^{\rho/2} - (-1)^n e^{-\rho/2}] (1 - \gamma)}.$$

С помощью (10), (15) находим изображения полей внутри слоя:

$$\hat{E}_z^i(x, \rho) = W \left\{ -\frac{2a\pi n}{\rho^2 + (\pi n)^2} \sin n\pi x + \hat{g}(\rho) [e^{-\rho x_1} - (-1)^n e^{\rho x_1}] \right\};$$

$$\hat{H}_y^i(x, \rho) = \frac{2a\rho}{\rho^2 + (\pi n)^2} \cos \pi n x - \hat{g}(\rho) [(-1)^n e^{\rho x_1} + e^{-\rho x_1}],$$

где $x_1 = x - 1/2$. Для оригиналов соответственно имеем

$$\begin{aligned}
 H_y^a(x, t) &= \eta(t + x_2 + 1/2) g(t + x_2 + 1/2) - \\
 & - (-1)^n \eta(t + x_2 - 1/2) g(t + x_2 - 1/2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^i(x, t) &= W [-2a \sin n\pi x \sin n\pi t + \eta(t - x_1) g(t - x_1) - \\
 & - (-1)^n \eta(x + t_1) g(x + t_1)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_y^i(x, t) &= 2a \cos n\pi x \cos n\pi t - \eta(t - x_1) g(t - x_1) - \\
 & - (-1)^n \eta(t + x_1) g(t + x_1). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Здесь $\eta(x)$ — единичная функция, $x_2 = xc/c'$.

Для вычисления оригинала функции $\hat{g}(\rho)$ введем вспомогательную функцию

$$\hat{h}(\rho) = \frac{\rho}{\rho^2 + (\pi n)^2} \cdot \frac{e^{-\rho}}{(-1)^n \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - e^{-\rho}},$$

которая имеет простые полюсы в точках $p = \pm i\pi n$, $p_m = \ln|x| + i\pi n$, где m пробегает все четные и нечетные целые числа, если $(-1)^n(1-\gamma) > 0$ ($(-1)^n(1-\gamma) < 0$), $\kappa = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$. Применение теоремы разложения [2] к изображению $\hat{h}(p)$ дает $h(\theta) = f(\theta) + h_1(\theta)$,

где слагаемое $f(\theta) = \frac{1-\gamma}{2\gamma} \cos n\pi\theta$ отвечает сумме вычетов в точках $p = \pm i\pi n$, а

$$h_1(\theta) = \frac{1}{2} (1-\gamma)^2 \sum_m \frac{p_m e^{p_m \theta}}{p_m^2 + (\pi n)^2} \begin{cases} -(1-\gamma^2)^{-1}, & n = 2k + 1; \\ (2\gamma)^{-1}, & n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

соответствует сумме вычетов в точках $p = p_m$. Функция $p\hat{h}(p)e^{p\theta} \rightarrow 0$, когда $|p| \rightarrow \infty$ по любому направлению, кроме $\arg p = \pm \pi/2$ для $\forall \theta \in (0, 1)$. Следовательно [3, с. 65], контурный интеграл от функции $\hat{h}(p)e^{p\theta}$ по окружности $|p| = R$ при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, откуда следует, что $h_1(\theta) = -f(\theta)$ для $\theta \in (0, 1)$. За пределами этого интервала функция $h_1(\theta)$ продолжается по правилу

$$h_1(\theta_1 + s) = |x|^s h_1(\theta_1) \begin{cases} (-1)^s, & (-1)^n(1-\gamma) < 0; \\ 1, & (-1)^n(1-\gamma) > 0, \end{cases}$$

где $s = 0, 2, 4, \dots$; $\theta_1 \in (0, 1)$. Тогда

$$h_1(\theta) = -|x|^s f(\theta) \begin{cases} (-1)^s, & (-1)^n(1-\gamma) > 0; \\ 1, & (-1)^n(1-\gamma) < 0, \end{cases} \quad s < \theta < s + 1.$$

Поскольку $\hat{g}(p) = (-1)^n 2a\gamma e^{p/2} \hat{h}(p)/(1-\gamma)$, получим

$$g(\theta) = \eta(\theta - 1/2) f_1(\theta) \begin{cases} 1 - (-1)^s |x|^s, & (-1)^n(1-\gamma) > 0; \\ 1 - |x|^s, & (-1)^n(1-\gamma) < 0. \end{cases}$$

Здесь $-\frac{1}{2} + s < \theta < \frac{1}{2} + s$; $f_1(\theta) = (-1)^k \begin{cases} \sin n\pi\theta, & n = 2k + 1; \\ \cos n\pi\theta, & n = 2k. \end{cases}$

На рис. 1 представлен график функции $g(\theta)$ при $n=1$ для $\gamma=5$ (магнитные стенки) и $\gamma=0,2$. В предельных случаях имеем

$$g(\theta) = \eta(\theta - 1/2) a \sin \pi\theta [1 - (-1)^s] \times \\ \times \left(-\frac{1}{2} + s < \theta < \frac{1}{2} + s \right) \text{ при } \gamma \rightarrow \infty; \quad (17)$$

$$g(\theta) \equiv 0 \text{ при } \gamma = 0. \quad (18)$$

На рис. 2 показаны кривые распределения магнитного поля в слое $H'_y(x, t)$ для различных моментов времени, построенные по

формулам (16), (17), ($n=1, \gamma \rightarrow \infty$). В соответствии с выражениями (16), (18), в другом предельном случае $\gamma \rightarrow 0$ начальное колебание с течением времени остается невозмущенным и описывается непрерывной функцией. Таким образом, собственные колебания электрического типа (с $l_z(0)=l_z(1)=0$) являются устойчивыми по форме для диэлектрических стенок ($\gamma < 1$) и неустойчивыми по форме для магнитных стенок ($\gamma > 1$).

Повторяя приведенные вычисления для \vec{H} -поля, нетрудно убедиться в том, что эволюция переходного процесса с изменением γ от 0 до бесконечности будет противоположной, т. е. форма колебаний устойчива только при $\gamma > 1$. Когда γ велико, происходит медленное уменьшение амплитуды колебаний при неизменной форме, если мало, то затухание колебаний сопровождается искажениями их формы, показанными на рис. 2.

Полученные результаты указывают на некоторые естественные условия согласования вида электромагнитного поля со

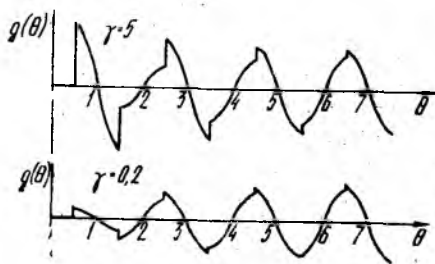


Рис. 1

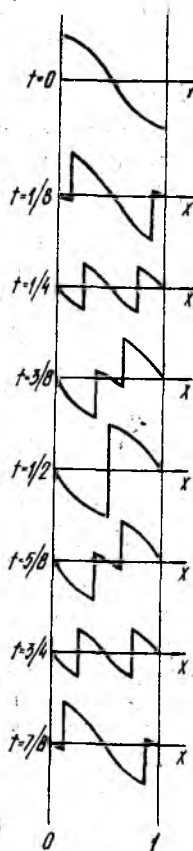


Рис. 2

стенками резонатора, при которых последние оказывают слабое влияние на форму колебаний, — это \vec{E} -поле в случае диэлектрических стенок и \vec{H} -поле в случае магнитных.

Список литературы: 1. Овчаренко В. В., Антюфеев В. И., Макарущенко Н. П. Одномерная обобщенная внутренняя задача электродинамики // Радиотехника. 1988. Вып. 84. С. 21—26. 2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973. 736 с. 3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., 1965. 780 с.

Поступила в редколлегию 17.02.87