

нения. Кроме того, открытой остается проблема учета других ресурсов (в особенности памяти) при определении планов выполнения запросов. Технология оптимизации в объектно-ориентированных системах также является важной областью, заслуживающей отдельного обсуждения. Кроме того, когда БД стали использоваться СППР, появилось интересное направление работы в связи с нечеткими (неточными) запросами. Существующее повышенное внимание к СППР побудило также проведение работ в области расширений SQL.

Разработка эффективных и корректных преобразований SQL-запросов является трудной задачей из-за сложности отыскания надежных метрик оценок. Таким образом, несмотря на многие годы работы, существенные проблемы остаются открытыми. Однако для того, чтобы внести вклад в области выбора оптимального плана запросов, необходимо понимание существующих подходов.

Эффект от правильной организации, стратегического и оперативного планирования развития производства трудно заранее оценить в цифрах, но очевидно, что он может превзойти затраты на реализацию СППР. Однако эффект обеспечивает не сама система, а люди, которые с ней работают. Современные аналитические системы не являются системами искусственного интеллекта, их цель — своевременно обеспечить сотрудника всей информацией, необходимой для принятия решений. А какая информация будет затребована и какое решение будет принято на ее основе, зависит только от конкретного человека.

Литература: 1. Сахаров А.А. Концепции построения и реализации информационных систем, ориентированных на анализ данных // Системы управления базами данных. 1996. №4. С.55-70. 2. Львов В. Создание систем поддержки принятия решений на основе хранилищ данных // Системы управления базами данных. 1997. №3. С.30-40. 3. Чаудхари С. Методы оптимизации запросов в реляционных системах // Системы управления базами данных. 1998. №3. С.22-46. 4. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987. 608 с.

Поступила в редколлегию 09.10.99

Рецензент: д-р техн. наук Зацеркляный Н.М.

Тянянский Сергей Станиславович, канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем и технологий Университета внутренних дел МВД Украины. Научные интересы: проектирование и поддержка баз данных с неопределенными значениями. Адрес: Украина, 61170, Харьков, ул. Блюхера, 22, кв. 159, тел. 65-47-52, 50-36-31, e-mail: k_infsis@adm.univd.kharkov.ua.

Руденко Диана Александровна, канд. техн. наук, ассистент кафедры применения ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: распределенные структуры данных, теория нечетких множеств. Адрес: Украина, 61148, Харьков, ул. Родниковая, 3, кв. 181, тел 16-86-66.

Яковлева Елена Сергеевна, курсант факультета управления и информатики Университета внутренних дел МВД Украины. Научные интересы: теория принятия решений в условиях неопределенности. Адрес: Украина, 61058, Харьков, ул. Ромена Роллана, 7, кв. 40, тел. 43-75-14.

УДК 007.001.362; 681.327.12.001.362

СИНТЕЗ НОРМАЛИЗАТОРОВ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА БАЗЕ ОДНОМЕРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

ПУТЯТИН Е.П., ЯКОВЛЕВА Е.В., ЛУЦИВ В.В.

Разрабатывается алгоритм нормализации плоских изображений путем применения методов одномерной нормализации. Для этого исследуется вопрос о формировании разложения матрицы центроаффинного преобразования в суперпозицию матриц поворота, неоднородного изменения масштаба и еще одного поворота, возможно в сочетании с зеркальным отражением. Изучаются свойства преобразования неоднородного изменения масштаба.

Под нормализацией изображения будем понимать процедуру компенсации геометрических искажений, связывающих эталонные и реальные изображения, т.е. нахождение параметров того геометрического преобразования, которое позволит привести реальное изображение к эталонному виду [1].

Рассмотрим общий случай, когда заранее не известен конкретный вид геометрического преобразования, формирующего разницу между эталонным и реальным изображениями. При этом будем считать, что

реальное изображение находится под воздействием достаточно общей аффинной группы геометрических преобразований G_a . Решив проблему центрирования обрабатываемого изображения, можем полагать, что на реальное изображение воздействует центроаффинная группа G'_a , которая описывается вещественной квадратной матрицей A с определителем, не равным нулю.

Для проведения нормализации необходимо определить параметры нормализующей матрицы, которой является обратная матрица A^{-1} .

Известно [2], что преобразования с матрицей A можно представить в виде произведения ортогональной $A_{орт}$ и симметричной A_c матриц:

$$A = A_{орт} * A_c. \quad (1)$$

Покажем, как формируется симметричная и ортогональная матрица. Будем рассматривать случай преобразования на плоскости. Пусть A — любая невырожденная матрица, описывающая невырожденное линейное преобразование в некотором ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$. Тогда преобразование, описываемое матрицей A^*A , где A^* — транспонированная матрица, будет симметричным.

Известно [3, 4], что симметричное преобразование всегда приводится к диагональному виду путем

ортогонального преобразования базиса, где матрица перехода от старого базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e_1', e_2'\}$ состоит из собственных векторов исходной симметричной матрицы, которые для симметричного преобразования всегда ортогональны. Диагональная матрица формируется из собственных чисел (собственные значения симметрической матрицы всегда положительны [2]). Тогда симметричная матрица A^*A может быть представлена в следующем виде:

$$A^*A = T^{-1}HT,$$

где T – ортогональная матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2\}$ к базису $\{e_1', e_2'\}$, состоящая из собственных векторов матрицы A^*A ; H – диагональная матрица

преобразования масштаба $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы A^*A , которые, как указано выше, всегда положительны.

Если собственные числа равны, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$, то в качестве собственных берутся два произвольных взаимно перпендикулярных вектора.

Следовательно, матрица A имеет вид

$$A = A^{*-1}T^{-1}HT.$$

Введем матрицу $H' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$. Тогда матрица A может быть записана как

$$A = A^{*-1}T^{-1}H'H'T$$

или

$$A = (A^{*-1}T^{-1}H'T)(T^{-1}H'T),$$

где матрица $T^{-1}H'T$ будет симметричной (обозначим ее A_c), а матрица $A^{*-1}T^{-1}H'T$, исходя из разложения (1), ортогональной (ее обозначим $A_{орт}$).

Опираясь на базовое разложение (1), проведем разбиение любой матрицы на ортогональную, диагональную и ортогональную, т.е. $A = O_2 D O_1$. Здесь $O_j = T$ – ортогональная матрица, описывающая преобразование поворота на угол α_1 , либо зеркального отражения, либо их сочетания; $D = H'$ – диагональная матрица, описывающая преобразование неоднородного масштаба с параметрами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$; $O_2 = (A^{*-1}T^{-1}H'T)T^{-1}$, т.е. $O_2 = A_{орт}T^{-1}$ – также ортогональная матрица (так как произведение ортогональной матрицы на ортогональную является ортогональной матрицей), описывающая преобразование поворота на угол α_2 , либо зеркального отражения, либо их сочетания. Здесь под преобразованием зеркального отражения понимается его преобразование относительно только одной из осей декартовой системы координат (либо OX , либо OY),

имеющее вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, т.е. преобразования, изменяющие направление обхода. Два других преобразования из группы зеркальных отражений, описанных матрицами $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, рассматривать нет необходимости, так как они не

изменяют направление обхода и включаются в группу поворотов.

Поскольку диагональная матрица D формируется из корней собственных чисел симметричной матрицы A^*A , то на диагонали всегда стоят положительные элементы, и она является матрицей неоднородного изменения масштаба с коэффициентами $k_1 = \sqrt{\lambda_1}$ и

$k_2 = \sqrt{\lambda_2}$ по осям OX и OY соответственно. Следовательно, матрица D не может включать в себя преобразование зеркального отражения. Таким образом, зеркальное отражение должно включаться в ортогональные матрицы. Поэтому ортогональные матрицы O_1 и O_2 не обязательно будут являться чистым поворотом. При наличии зеркального отражения одна из них обязательно будет сочетать в себе поворот с зеркальным отражением, другая будет только поворотом. При отсутствии зеркального отражения либо две ортогональные матрицы будут просто матрицами поворотов, либо каждая из них будет представлять собой сочетание поворота с зеркальным отражением. Это зависит от того, как сформирована

ортогональная матрица $T = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, где (x_1, y_1) – координаты собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_1 матрицы A^*A ; (x_2, y_2) – координаты собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_2 этой же матрицы. Собственные векторы можно записать так, чтобы матрица T представляла собой чистый поворот.

Так как собственный вектор квадратной матрицы A^*A находится решением системы линейных уравнений [3]

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y &= 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y &= 0, \end{aligned}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – элементы симметричной матрицы A^*A ; λ – собственное число симметричной матрицы A^*A ; x, y – искомые координаты собственного вектора симметричной матрицы A^*A , то соотношение между координатами собственных векторов можно записать несколькими тождественными выражениями:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a_{12}y}{(a_{11} - \lambda)}, \quad y = -\frac{(a_{11} - \lambda)x}{a_{12}}, \\ x &= -\frac{(a_{22} - \lambda)y}{a_{21}}, \quad y = -\frac{a_{21}x}{(a_{22} - \lambda)}. \end{aligned}$$

Чтобы матрица T была чистым поворотом, первая координата x_1 собственного вектора, отвечающего собственному числу λ_1 , и вторая координата y_2 собственного вектора, отвечающего собственному числу λ_2 , должны быть равны, а следовательно, должны иметь одинаковые знаки, т.е. на диагонали такой матрицы должны стоять элементы с одинако-

выми знаками. Положительности знаков этих элементов, а именно величин x_1 и y_2 , нетрудно добиться, если для записи собственного вектора, соответствующего числу λ_1 , воспользоваться выражением

$$y_1 = -\frac{(a_{11} - \lambda)x_1}{a_{12}},$$

где x_1 положить равным 1, а для собственного вектора, отвечающего числу λ_2 , применить

$$x_2 = -\frac{(a_{22} - \lambda)y_2}{a_{21}},$$

где y_2 положить равным 1.

В результате такой записи величины x_1 и y_2 будут всегда положительны. Чтобы выполнялись все свойства ортогональной матрицы, полученные векторы необходимо нормировать. Далее под координатами собственных векторов x и y будем понимать уже нормированные координаты. Таким образом, при данном формировании матрица T , т.е. O_1 , будет представлять собой чистый поворот как при отсутствии зеркального отражения в преобразовании, задаваемом матрицей A , так и при его наличии. В случае зеркального отражения вторая ортогональная матрица O_2 будет сочетать в себе поворот и зеркальное отражение. Если же зеркальное отражение изначально отсутствует в преобразовании, задаваемом матрицей A , матрица O_2 также является чистым поворотом.

Это заключение можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= U_2 D U_1, \text{ при } \det A > 0, \\ A &= U_2 S D U_1, \text{ при } \det A < 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где U_1, U_2 — матрицы поворотов; D — диагональная матрица (матрица преобразования неоднородных масштабов); S — матрица зеркального отражения.

Итак, любое преобразование с матрицей A можно получить, выполняя последовательно поворот на угол α_1 , изменение масштаба с коэффициентами $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}$ по осям OX, OY соответственно, и еще один поворот на угол α_2 , возможно в сочетании с зеркальным отражением, если таковое присутствует изначально в преобразовании A .

Однако такое разложение с параметрами $\alpha_1, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_2$ можно получить указанным выше способом, только если заранее известен вид преобразования с матрицей A . При решении задачи нормализации, т.е. нахождения матрицы $A_n = A^{-1}$, обычно не известно, каким было преобразование A и, следовательно, хотя для матрицы A_n также имеет место разложение (2), параметры этого разложения $\alpha_{n_1}, \lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \alpha_{n_2}$ указанным выше способом найти нельзя. Сам же факт правомочности такого разложения нормализующей матрицы A_n имеет принципиальное значение для решения задачи нормализации. Параметры разложения (2) можно найти путем совместного применения свойств геометрических преобразований и методов одномерной нормализации, а затем из них получить матрицу A_n .

Рассмотрим интересное свойство преобразования масштаба по перпендикулярным направлениям на плоскости. Пусть e_1 и e_2 — два ортонормированных вектора, выходящих из центра декартовой системы координат XOY и не обязательно совпадающих с осями OX и OY . Неоднородное изменение масштаба по перпендикулярным направлениям e_1 и e_2 имеет вид

$$D_{e_1, e_2} = U^{-1} D U,$$

а в развернутой форме

$$D_{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{e_1} & 0 \\ 0 & k_{e_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

где α — угол между вектором e_1 и осью OX ; k_{e_1} — коэффициент изменения масштаба по направлению e_1 ; k_{e_2} — коэффициент изменения масштаба по направлению e_2 .

После перемножения матриц преобразование D_{e_1, e_2} выглядит следующим образом:

$$D_{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} k_{e_1} \cos^2 \alpha + k_{e_2} \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha (k_{e_2} - k_{e_1}) \\ \cos \alpha \sin \alpha (k_{e_2} - k_{e_1}) & k_{e_1} \sin^2 \alpha + k_{e_2} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Проводя преобразование масштаба с коэффициентами k_{e_1} и k_{e_2} по направлениям e_1 и e_2 соответственно, видим, что если коэффициенты изменения масштаба по двум перпендикулярным направлениям равны, т.е. $k_{e_1} = k_{e_2} = k$, то по всем остальным направлениям, проходящим через начало координат, коэффициенты изменения масштаба также равны k . Если же $k_{e_1} \neq k_{e_2}$, то коэффициенты изменения масштаба k по любому другому направлению подчиняются неравенству

$$k_{e_1} < k < k_{e_2}, \text{ при } k_{e_1} < k_{e_2}$$

или $k_{e_1} > k > k_{e_2}$, при $k_{e_1} > k_{e_2}$.

Докажем этот факт сначала для случая, когда направления e_1, e_2 совпадают с осями OX, OY . Неоднородное изменение масштаба по осям OX, OY , т.е. когда $\alpha = 0$, описывается диагональной матрицей

$$D = \begin{pmatrix} k_{e_1} & 0 \\ 0 & k_{e_2} \end{pmatrix},$$

где k_{e_1} — коэффициент изменения масштаба по оси OX , который будем обозначать k_x ; k_{e_2} — коэффициент изменения масштаба по оси OY , обозначим его k_y .

Для доказательства рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 1).

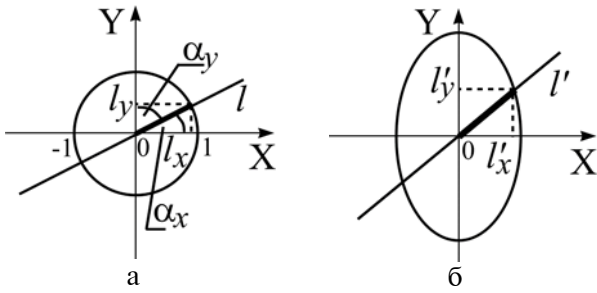


Рис.1

Здесь l – радиус, не совпадающий с направлением осей OX , OY ; l_x , l_y – его проекции на оси OX , OY соответственно.

Подвергнем окружность преобразованию неоднородного изменения масштаба D и предположим, что для его параметров k_x , k_y выполняется неравенство $k_y > k_x$.

В результате преобразования окружность перейдет в эллипс, представленный на рис. 1, б, а ее радиус l в P . Необходимо показать, что величина k_l – коэффициент изменения масштаба радиуса l , будет находиться в следующих пределах:

$$k_y > k_l > k_x.$$

Запишем, как формируется коэффициент k_l :

$$k_l = \frac{\|l'\|}{\|l\|},$$

где $\|l\|$ – длина радиуса до преобразования D ; $\|l'\|$ – длина радиуса после преобразования D .

Величины $\|l\|$, $\|l'\|$ определяются следующим образом:

$$\|l\| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y},$$

$$\|l'\| = \sqrt{l_x'^2 + l_y'^2} = \sqrt{(k_x l_x)^2 + (k_y l_y)^2} = \sqrt{(k_x \cos \alpha_x)^2 + (k_y \cos \alpha_y)^2}$$

Сравним сначала величину k_l с параметром k_y , т.е. поставим знак неравенства между следующими величинами:

$$k_y, \quad \frac{\sqrt{(k_x \cos \alpha_x)^2 + (k_y \cos \alpha_y)^2}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y}}.$$

Выполним над ними некоторые преобразования:

$$k_y \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y}, \quad \sqrt{(k_x \cos \alpha_x)^2 + (k_y \cos \alpha_y)^2}$$

(данное преобразование не изменит знак неравенства, так как знаменатель величины справа всегда положителен),

$$k_y \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y}, \quad k_y \sqrt{\left(\frac{k_x}{k_y} \cos \alpha_x\right)^2 + (\cos \alpha_y)^2}.$$

Введем величину $z = \left(\frac{k_x}{k_y}\right)^2$. По предположению $k_y > k_x$, следовательно, $z < 1$.

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y}, \quad \sqrt{z \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y}, \\ & \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y, \quad z \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y, \\ & \cos^2 \alpha_x, \quad z \cos^2 \alpha_x. \end{aligned}$$

Поскольку $z < 1$, то $\cos^2 \alpha_x$ после умножения на z уменьшится и можно сделать вывод, что знак неравенства приобретает вид $>$, т.е. больше.

Таким образом, величина k_y , при условии $k_y > k_x$ всегда будет больше любого другого коэффициента изменения масштаба по прямой, проходящей через начало координат: $k_y > k_l$, при $k_y > k_x$.

Аналогично проводится доказательство для сравнения коэффициента k_l с параметром k_x в предположении $k_y > k_x$, а также сравнение k_l с параметрами k_x , k_y в предположении $k_y < k_x$.

Если же $k_y = k_x$, то величина z будет равна единице и неравенства переходят в равенства, т.е.

$$k_y = k_l = k_x, \text{ при } k_x = k_y.$$

Рассмотрим случай, когда направления, по которым производится неоднородное изменение масштаба, не совпадает с осями OX , OY . Такое изменение масштаба представляет собой комбинацию поворота на угол α , который совместит направление e_l с осью OX , неоднородного изменения масштаба с коэффициентами k_{e_1} , k_{e_2} по осям OX , OY и поворота на угол $(-\alpha)$. Из этих трех преобразований только диагональное влияет на изменение масштаба. Следовательно, достаточно рассмотреть коэффициенты изменения масштаба по всем направлениям только для диагонального преобразования, что уже сделано выше.

Утверждение. При преобразовании масштаба по направлениям e_1, e_2 коэффициенты изменения масштаба по этим направлениям k_{e_1} , k_{e_2} обладают наибольшим и наименьшим значениями, на остальных направлениях такие коэффициенты принимают промежуточные значения между k_{e_1} , k_{e_2} ; в случае равенства коэффициентов k_{e_1} , k_{e_2} коэффициенты изменения масштабов по всем направлениям принимают равные значения.

Из утверждения следует, что, зная максимальное и минимальное изменение масштаба и по каким направлениям они произошли (эти направления должны быть перпендикулярны), можно восстановить само преобразование D_{e_1, e_2} .

Поскольку матрица A_c представляет собой растяжение или сжатие относительно взаимно перпендику-

лярных осей, что и есть преобразование D_{e_1, e_2} , можно сделать следующий вывод.

Следствие 1. Если известны направления, по которым коэффициенты изменения масштабов принимают максимальное и минимальное значения, то можно восстановить симметричную матрицу A_c из разложения (1) или матрицы D и U_1 из разложения (2). После этого эталонное и входное изображения будут отличаться только ортогональным преобразованием. Из [5] известно, что каким бы ни было аффинное преобразование плоскости, существуют два взаимно перпендикулярных вектора, образы которых тоже взаимно перпендикулярны. Заметим также, что в разложениях (1) и (2) присутствуют составляющие, отвечающие либо за масштабирование по взаимно перпендикулярным осям, либо за ортогональные преобразования, которые не изменяют масштаб изображения, из чего можем сделать еще один вывод.

Следствие 2. Любое изображение, подвергнутое преобразованию с матрицей A , где A не является чистым ортогональным преобразованием, чистым преобразованием подобия или их сочетанием, имеет две прямые, проходящие через начало координат и взаимно перпендикулярных друг к другу, на которых коэффициенты изменения масштабов принимают максимальное и минимальное значения. Если же преобразование с матрицей A представляет собой ортогональное преобразование или преобразование подобия, или их сочетание, то на всех прямых входного изображения, проходящих через координаты $(0,0)$, коэффициенты изменения масштабов имеют равные значения. И наоборот, если коэффициенты изменения масштабов по всем направлениям равны, то преобразование с матрицей A есть либо ортогональное преобразование, либо преобразование подобия, либо их сочетание.

Именно этот факт предлагается использовать для решения задачи нормализации.

Теперь, используя приведенные выше разложения и следствия из утверждения, перейдем к решению задачи нормализации, т.е. к получению нормализующей матрицы A_n .

Вспользуемся подходом одномерной нормализации [6]. Она заключается в том, что сначала находятся параметры нормализации ограничений изображения на некоторые прямые, а затем из них получают параметры нормализации всего изображения.

В зависимости от вида преобразования, вызвавшего искажения, рассматриваются ограничения на различные виды прямых. Так как в нашем случае предполагается, что входное изображение находится под воздействием центраффинного преобразования, то ограничение следует рассматривать на прямые семейства S_0 [6]. S_0 представляет собой семейство прямых, проходящих через начало координат. Такой выбор обусловлен тем свойством центраффинного преобразования, что прямые, проходящие через на-

чало координат, переходят в (вообще говоря, другие) прямые, также проходящие через координаты $(0,0)$.

Таким образом, ограничение входного изображения на прямую, проходящую через начало координат, отличается от соответствующего ему ограничения эталонного изображения только коэффициентом изменения масштаба по прямой k , а расположение соответствующих прямых входного и эталонного изображений отличается углом α . Параметры k и α будут параметрами одномерной нормализации.

На какие именно прямые из семейства S_0 рассматривать ограничения эталонного изображения и искать соответствующие им ограничения входного изображения, зависит от того, как будут использоваться параметры одномерной нормализации.

В работе [7] приводился пример нахождения параметров нормализующей матрицы A_n на основе совместного применения одномерной нормализации и разложения матрицы центраффинного преобразования в суперпозицию матриц простых преобразований DXU , где U -матрица поворота, X -матрица косога сдвига вдоль оси OX , D -матрица неоднородного масштаба.

Теперь рассмотрим способ нормализации изображений, основанный на применении одномерной нормализации, разложений (1) либо (2) и утверждения.

Запишем разложение (2) матрицы A_n в развернутом виде для случая, когда исходная матрица A не включает в себя зеркальное отражение:

$$\begin{pmatrix} a_{n11} & a_{n12} \\ a_{n21} & a_{n22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{n2} & \sin \alpha_{n2} \\ -\sin \alpha_{n2} & \cos \alpha_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{nx} & 0 \\ 0 & k_{ny} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_{n1} & \sin \alpha_{n1} \\ -\sin \alpha_{n1} & \cos \alpha_{n1} \end{pmatrix},$$

где α_{n1} – параметр первого поворота; α_{n2} – параметр второго поворота; k_{nx} – коэффициент изменения масштаба по оси OX ; k_{ny} – коэффициент изменения масштаба по оси OY , откуда запишем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} a_{n11} &= k_{nx} \cos \alpha_{n1} \cos \alpha_{n2} - k_{ny} \sin \alpha_{n1} \sin \alpha_{n2}, \\ a_{n12} &= k_{nx} \sin \alpha_{n1} \cos \alpha_{n2} + k_{ny} \cos \alpha_{n1} \sin \alpha_{n2}, \\ a_{n21} &= -k_{nx} \cos \alpha_{n1} \sin \alpha_{n2} - k_{ny} \sin \alpha_{n1} \cos \alpha_{n2}, \\ a_{n22} &= -k_{nx} \sin \alpha_{n1} \sin \alpha_{n2} + k_{ny} \cos \alpha_{n1} \cos \alpha_{n2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметры α_{n1} , α_{n2} , k_{nx} , k_{ny} можно получить с помощью одномерной нормализации. Сначала для того, чтобы определить коэффициенты изменения масштабов по всем прямым из семейства S_0 , каждой прямой эталонного изображения из этого семейства найдем соответствующую прямую входного изображения, т.е. каждой прямой с номером i эталонного изображения найдем соответствующую прямую j входного изображения, после этого рассмотрим коэффициенты изменения масштабов k_i ($i=1..n$, n -количество рассматриваемых прямых на эталонном изображении) для каждой пары соответствующих прямых i

и j . Так как нам необходимо получить параметры нормализующей матрицы A_n , т.е. параметры обратного преобразования, в дальнейшем будем работать не с коэффициентами прямого преобразования k_i , а с

коэффициентами k_{nj} , где $k_{nj} = \frac{1}{k_i}$ (здесь j – номер прямой входного изображения, i – номер прямой эталонного изображения; соответствующей прямой j входного изображения).

Возможны два случая. В первом коэффициенты k_{nj} от прямой к прямой плавно изменяются, и дискретная функция, значениями которой являются коэффициенты k_{nj} , а аргументами – номера прямой входного изображения, принимает максимальное и минимальное значения.

На рис.2 приведен пример возможного вида функции изменений коэффициентов масштабов по прямым из S_0 .

Направления, задаваемые прямыми $j_{n_{\max}}$ и $j_{n_{\min}}$, перпендикулярны друг к другу и являются направлениями, по которым должно проводиться преобразование неоднородного масштаба с коэффициентами $k_{n_{\max}}$, $k_{n_{\min}}$. Если прямую $j_{n_{\max}}$ путем поворота на угол α_{n_1} совместить с направлением OX , а соответственно прямую $j_{n_{\min}}$ с направлением OY , то коэффициенты $k_{n_{\max}}$, $k_{n_{\min}}$ окажутся параметрами диагонального преобразования:

$$D = \begin{pmatrix} k_{n_x} & 0 \\ 0 & k_{n_y} \end{pmatrix}, \text{ где } k_{n_x} = k_{n_{\max}}, k_{n_y} = k_{n_{\min}}.$$

Таким образом, три параметра α_{n_1} , k_{n_x} , k_{n_y} найдены, остается определить параметр второго поворота α_{n_2} .

Для его нахождения отыщем ограничение на прямую входного изображения, соответствующее ограничению эталонного изображения на прямую, совпадающую с осью OX , и угол между ними. На рис.3,б приведен пример входного изображения, полученного из эталонного (рис.3,а) путем центроаффинного преобразования, не содержащего в себе зеркального отражения.

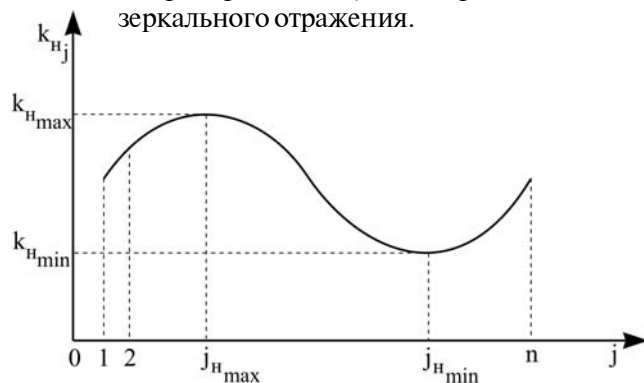


Рис. 2

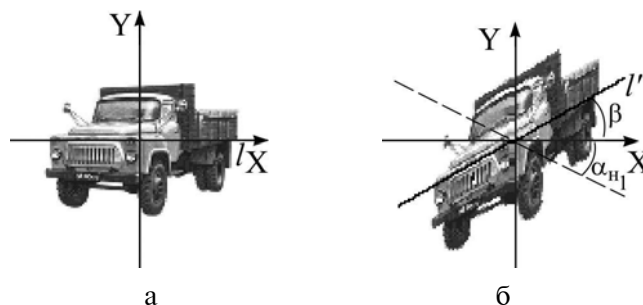


Рис.3

Здесь l – прямая на эталонном изображении, совпадающая с осью OX ; l' – прямая на входном изображении, ограничение изображения на которую соответствует ограничению эталонного изображения на прямую l ; α_{n_1} – угол, найденный в результате одномерной нормализации и представляющий собой величину отклонения прямой, по которой нормализующий коэффициент масштаба принимает максимальное значение, от оси OX ; β – угол между прямой l' и осью OX .

Таким образом, после проведения одномерной нормализации, в результате которой найдены значения параметров α_{n_1} , k_{n_x} , k_{n_y} , и поиска соответствующих прямых l и l' , что есть определением угла β , параметр второго поворота α_{n_2} может быть найден по формуле

$$\alpha_{n_2} = \arctg \left(\frac{k_{n_{\min}}}{k_{n_{\max}}} \operatorname{tg}(\beta - \alpha_{n_1}) \right),$$

где $k_{n_{\max}}$ – максимальный нормализующий коэффициент масштаба по прямой, проходящей через начало координат; $k_{n_{\min}}$ – минимальный нормализующий коэффициент масштаба по прямой, проходящей через начало координат; α_{n_1} – угол наклона прямой, по которой нормализующий коэффициент масштаба принимает значение $k_{n_{\max}}$; β – угол отклонения ограничения входного изображения на прямую, соответствующего ограничению эталонного изображения на ось OX , от оси абсцисс входного изображения.

Подставив параметры α_{n_1} , α_{n_2} , k_{n_x} , k_{n_y} в формулы (3), получим параметры нормализующей матрицы A_n . После этого возможно проводить нормализацию входного изображения преобразованием с матрицей A_n . Такая нормализация одновременно компенсирует все геометрические искажения. Разложение (2) можно применять также для последовательной нормализации, где параметры α_{n_1} и k_{n_x} , k_{n_y} определяются как и в предыдущем случае. Параметр α_{n_2} вычис-

ляется уже после применения преобразований U_1 и D путем непосредственного нахождения угла отклонения ограничения входного изображения, соответствующего ограничению эталонного изображения на ось OX , от оси абсцисс входного изображения, т.е. при последовательной нормализации $\alpha_{n_2} = \beta$.

Возможен второй случай, когда после поиска соответствующих прямых и коэффициентов k_{nj} оказывается, что найденные коэффициенты k_{nj} равны между собой, т.е. $k_{nj} = k_{nl} = k_n$ ($j \neq l$), и дискретная функция изменений коэффициентов масштабов по прямым j имеет вид, представленный на рис. 4.

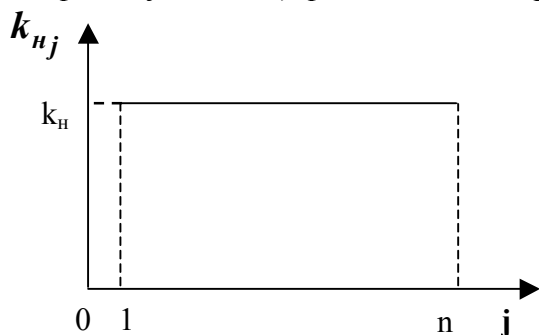


Рис. 4

В этом случае коэффициенты k_n выступают параметрами диагонального преобразования

$$D = \begin{pmatrix} k_{nx} & 0 \\ 0 & k_{ny} \end{pmatrix}, \text{ где } k_{nx} = k_{ny} = k_n, \text{ которое при}$$

равных параметрах является однопараметрическим, называемым преобразованием подобия, и его матрица обозначается K ($D = K = \begin{pmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_n \end{pmatrix}$).

Из следствия 2 вытекает, что исходное преобразование с матрицей A представляет собой либо ортогональное преобразование, либо преобразование подобия, либо их сочетание. Предположим, что в матрице A преобразование зеркального отражения отсутствует. Тогда будем считать, что преобразование с матрицей A сочетает в себе преобразования подобия и чистых поворотов.

Поскольку при преобразовании подобия коэффициенты изменений масштабов по всем направлениям равны, то последовательность применения преобразований с матрицами U_1, D, U_2 , входящими в разложение (2), не имеет значения. Таким образом, конечный результат не зависит от того, что сначала выполнялось, поворот, а затем масштабирование, или наоборот. В этом случае повороты U_1 и U_2 можно слить в один поворот U и преобразование с матрицей A_n будет двухпараметрическим и иметь следующее разложение:

$$A_n = UK \text{ или } A_n = KU.$$

Параметром матрицы K будут выступать коэффициенты k_n . Параметр матрицы поворота U -угол α_n определяется, как и в первом случае, путем нахождения угла отклонения между ограничением эталонного изображения на ось OX и соответствующим ему ограничением входного изображения.

Аналогично, для нормализации можно использовать разложение (1), последовательность действий для нахождения параметров этого разложения мало отличается от описанной выше.

Перейдем теперь к вопросу о наличии в первоначальном преобразовании с матрицей A зеркального отражения, которое нетрудно выявить путем сравнения эталонного и входного изображений.

Для примера рассмотрим рис. 5. На рис. 5, а представлено эталонное изображение, а рис. 5, б содержит входное изображение, полученное из эталонного центроаффинным преобразованием, содержащим зеркальное отражение.

Зеркальное отражение можно обнаружить следующими действиями: на эталонном изображении из центра проводятся 2 луча (m_1 и m_2); на входном изображении находятся ограничения, соответствующие ограничениям эталонного изображения на лучи m_1 и m_2 , затем проводятся лучи m_1' и m_2' соответственно; сравниваются направления кратчайших обходов от луча m_1 к лучу m_2 на эталоне и от луча m_1' к лучу m_2' на входном изображении. В случае совпадения направлений обходов принимается решение об отсутствии в преобразовании с матрицей A , а следовательно, и в нормализующем преобразовании с матрицей A_n , зеркального отражения. Если же направления противоположны, то зеркальное отражение имеет место.

Таким образом, если зеркальное отражение обнаружено, от него рекомендуется избавиться на первом же шаге, применив ко входному изображению преобразование зеркального отражения вида $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или

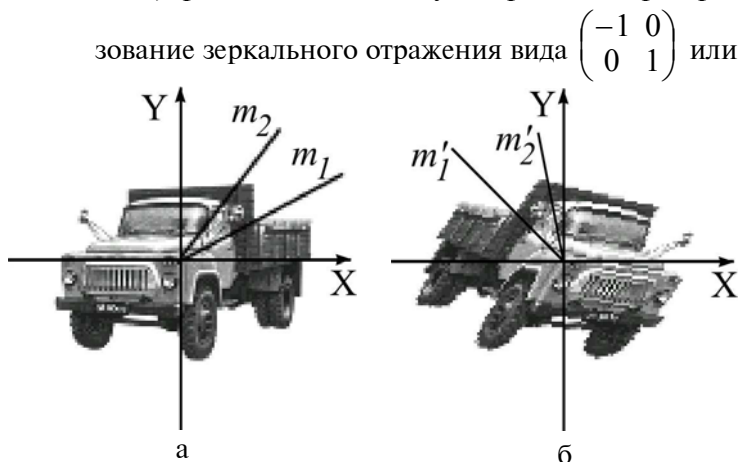


Рис. 5

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. После этого последовательность действий для определения параметров матрицы A_n будет такая же, как описано выше, за исключением того, что под входным будем понимать изображение, полученное из входного изображения путем применения преобразования зеркального отражения.

Заключение

Итак, в данной работе на основе методов одномерной нормализации разработан алгоритм нормализации плоских изображений для общего случая, когда заранее не известен вид геометрического преобразования, формирующего разницу между эталонным и входным изображениями.

В основу общего алгоритма положено исследование разложения матрицы центроаффинного преобразования в суперпозицию матриц поворота, неоднородного изменения масштаба и еще одного поворота, возможно в сочетании с зеркальным отражением. Рассмотрено свойство преобразования неоднородного изменения масштаба по взаимно перпендикулярным направлениям, заключающегося в максимальном и минимальном изменении коэффициентов масштаба по этим направлениям.

Особое внимание уделено вопросу присутствия зеркального отражения, его обнаружению методом одномерной нормализации.

Литература: 1. *Путятин Е.П.* Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990. 320с. 2. *Акивис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Наука, 1969. 352с. 3. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1964. 608с. 4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц М.: Наука, 1969. 368с. 5. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1969. 698с. 6. *Путятин Е.П., Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Исследование инвариантных прямых и их применение в алгоритмах нормализации изображений // АСУ и приборы автоматики. № 109. 7. *Путятин Е.П., Яковлева Е.В., Любченко В.А.* Разложение матрицы центроаффинного преобразования для нормализации изображений // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 4. С. 91-94.

Поступила в редколлегию 05.11.99

Рецензент: д-р техн. наук Сироджа И.Б.

Путятин Евгений Петрович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой информатики ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: обработка и распознавание изображений. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-19.

Яковлева Елена Владимировна, аспирант кафедры информатики ХТУРЭ. Научные интересы: обработка и распознавание изображений. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-19. E-mail: jakovleva@altavista.net

Луцив Вячеслав Валериевич. Научные интересы: компьютерная графика, разработка высокопроизводительных алгоритмов обработки графической информации. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-19. E-mail: lslav@altavista.net

УДК 621.391

ГЕНЕРАЦИЯ УЗКОПОЛОСНЫХ ИМИТАЦИОННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ТИХОНОВ В.А., РУСАНОВСКИЙ Д.Е., ТИХОНОВ Д.В.

Разрабатываются методы генерации стационарных случайных процессов по заданным параметрам СПМ с помощью авторегрессионных формирующих фильтров. Показывается связь параметров АР модели и характеристик процесса, таких как центральная частота и ширина полосы по уровню 0,5 СПМ. Особый интерес представляет методика получения случайных процессов, содержащих один и более максимумов в СПМ. Приведенные примеры АР моделирования имитационных процессов подтверждают предложенный метод.

Модель авторегрессии (АР) применяется для решения двух основных задач: получения вероятностных характеристик случайного процесса по заданной выборке и формирования реализаций случайного процесса, когда его характеристики заданы. Обычно в научной литературе основное внимание уделяется решению первой задачи. Между тем, широкое применение методов статистического моделирования требует, как правило, предварительного получения имитационного процесса. Используемые для этих целей методы не обладают достаточной гибкостью и простотой. Конструктивные свойства модели АР

дают возможность сравнительно простыми способами получить имитационные случайные процессы с заданными статистическими характеристиками. В качестве таковых можно использовать ширину полосы и центральную частоту спектральной плотности мощности (СПМ), частоту осцилляций и коэффициент демпфирования корреляционной функции имитируемого процесса. Кроме этого, можно получать случайные процессы с заданными видами корреляционной функции и СПМ.

В основу модели АР положена корреляция отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым конечным или бесконечным числом отсчетов в предыдущие моменты времени. В уравнении АР текущий отсчет представляется взвешенной суммой предыдущих с некоторыми коэффициентами веса [1]:

$$x_t = \sum_{j=1}^p \Phi_j x_{t-j} + a_t, \quad (1)$$

где Φ_j – коэффициенты АР; a_t – некоррелированные случайные отсчеты, называемые ошибкой предсказания; p – порядок модели АР.

Из (1) видно, что построение модели АР случайного процесса сводится к определению порядка p , нахождению коэффициентов АР и дисперсии ошибки предсказания с помощью системы $p + 1$ уравнений Юла-Уокера: