

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)

Кафедра Фізичних основ електронної техніки
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

МЕТОДИ ОПТИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА РОЗПІЗНАННЯ
ОБРАЗІВ
(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи ФТОІм-18-1
Ткаченко В. А.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка»
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо -наукова)

Освітня програма «Фотоніка та оптикоінформатика»
(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. каф. ФОЕТ Курський Ю.С.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____
(підпис)

Мачехін Ю.П.
(прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)
Кафедра Фізичних основ електронної техніки
(повна назва)
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 152 «Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка»
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма «Фотоніка та оптоінформатика»
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____

(підпис)

« _____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ

НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Ткаченку Володимиру Андрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Методи оптичної ідентифікації та розпізнання образів

затверджена наказом університету від " 30 " жовтня 2019 р. № 1577 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 17 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи література з методів ідентифікації та розпізнання образів, метод вейвлет-аналізу, кореляційний метод, метод фрактального аналізу

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі 1 Аналіз типових постановок задач класифікації об'єктів. 2 Розгляд та аналіз методів виявлення та ідентифікації об'єктів. 3 Розробити систему ідентифікації оптичних приладів спостереження на основі моделі ідентифікації оптичних приладів спостереження.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

Схема оптична структурна (Л1) – прилад для пошуку прихованої оптики

Демонстраційний матеріал – 12шт.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Інформаційно-тематичний пошук та огляд літературних джерел з оптичної ідентифікації та розпізнання образів	04.11.19 – 11.11.19	Виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	12.11.19 – 13.11.19	Виконано
3	Дослідження методів оптичної ідентифікації та розпізнання образів	14.11.19 – 20.11.19	Виконано
4	Аналіз можливостей вдосконалення систем ідентифікації	21.11.19 – 30.11.19	Виконано
5	Оформлення пояснювальної записки	01.12.19 – 10.12.19	Виконано
6	Оформлення графічних та демонстраційних матеріалів	11.12.19 – 15.12.19	Виконано
7	Проходження нормоконтролю і отримання рецензії	16.12.19 – 19.12.19	

Дата видачі завдання 03 листопада 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. каф. Курський Ю.С.
(підпис) (посада, прізвище ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка атестаційної роботи: 64 с., 10 рис., 1 табл., 2 додатки, 21 джерело.

АНАЛІЗ, ОБРАЗ, ОБ'ЄКТ, ІДЕНТИФІКАЦІЯ, КЛАСИФІКАЦІЯ, ФРАКТАЛ, РОЗПІЗНАВАННЯ

Об'єкт дослідження – методи ідентифікації та розпізнання образів.

Мета роботи – проаналізувати методи виявлення та ідентифікації об'єктів, та розглянути можливі напрямки розвитку.

Методи дослідження – вивчення та аналіз літератури, порівняння, чисельні методи оптимізації, чисельні методи рішення диференціальних рівнянь.

Поставлено та розв'язано задачу аналізу методів оптичної ідентифікації та розпізнання образів. Розібрані типові постановки задач класифікації об'єктів. Розглянута схема пристрою для оптичної ідентифікації об'єкта та запропоновані можливі напрямки розвитку оптичних систем ідентифікації та розпізнання образів.

ABSTRACT

Explanatory note: 64 pages., 10 figures, 1 tables, 2 appendixes, 21 sources.

**ANALYSIS, IMAGE, OBJECT, IDENTIFICATION, CLASSIFICATION,
FRACTAL, RECOGNITION**

Object of study - methods of identification and pattern recognition

The purpose of the work is to analyze methods of object detection and identification, and to consider possible directions of development.

Research methods - study and analysis of literature, comparison, numerical optimization methods, numerical methods for solving differential equations.

The task of analyzing methods of optical identification and pattern recognition has been set and solved. Typical object classification tasks are analyzed. The scheme of the device for optical identification of object is considered and the possible directions of development of optical systems of identification and recognition of images are offered.

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка аттестационной работы: 64 с., 10 рис., 1 табл., 2 приложения, 21 источник.

АНАЛИЗ, ОБРАЗ, ОБЪЕКТ, ИДЕНТИФИКАЦИЯ, КЛАССИФИКАЦИЯ, ФРАКТАЛ, РАСПОЗНАВАНИЕ

Объект исследования - методы идентификации и распознавание образов.

Цель работы - проанализировать методы обнаружения и идентификации объектов, и рассмотреть возможные направления развития.

Методы исследования - изучение и анализ литературы, сравнение, численные методы оптимизации, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Поставлена и решена задача анализа методов оптической идентификации и распознавания образов. Разобраны типичные постановки задач классификации объектов. Рассмотренная схема устройства для оптической идентификации объекта и предложены возможные направления развития оптических систем идентификации и распознавания образов.

ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначки.....	8
Вступ.....	9
1 Методи оптичної ідентифікації та розпізнання образів.....	11
1.1 Задача розпізнання образів.....	11
1.2 Аналіз методів оптичної ідентифікації та розпізнання образів.....	13
1.2.1 Вейвлет-аналіз.....	13
1.2.1.1 Основні характеристики вейвлетів.....	14
1.2.1.2 Основи вейвлет-аналізу для ідентифікація систем...	22
1.2.2 Кореляційний метод.....	26
1.2.3 Фрактальний аналіз.....	30
1.2.3.1 Поняття фрактала.....	30
1.2.3.2 Броунівські сигнали.....	34
1.2.3.3 Опис сигналів на основі моделі узагальненого броунівського руху.....	37
1.2.3.4 Параметр Херста. Фізичний сенс. Персистентність і антиперсистентність.....	39
1.2.3.5 Зв'язок фрактальності зі спектральними характеристиками...../.....	40
1.2.3.6 Приклади аналізу сигналів.....	42
1.2.3.7 Використання мультифракталів.....	45
1.3 Оцінка приведених методів.....	52
2 Розвиток фрактальних методів класифікації і ідентифікації об'єктів	54
Висновок.....	62
Перелік джерел посилання.....	63
Додаток А Графічний матеріал.....	65
Додаток Б Демонстраційний матеріал.....	68

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

УБР – узагальнений броунівський рух;

БВП – безперервне вейвлет перетворення

ДВП – дискретне вейвлет перетворення;

ЕОП – електронно-оптичний перетворювач;

ОПС – оптичні прилади спостереження.

ВСТУП

Розпізнавання – це здатність живих організмів виявляти в потоці інформації, що надходить до органів чуття, певні закономірності, об'єкти, явища. Воно може здійснюватися на основі слухової, тактильної і зорової інформації.

Можливість розпізнавання спирається на подібність однотипних об'єктів. Незважаючи на те, що всі предмети і ситуації унікальні, між деякими з них завжди можна знайти подібності з тою чи іншою ознакою. Звідси виникає поняття класифікації – розбиття всієї безлічі об'єктів на класи, елементи яких мають деякі схожі властивості, що відрізняють їх від елементів других класів. І, таким чином, завданням розпізнавання являє собою віднесення розглянутих явищ або об'єктів по їх опису до потрібних класів. Тобто поняття розпізнавання можна розширити, якщо говорити про виявлення об'єктів в потоці не тільки чуттєвої, а й будь-якої іншої інформації.

Перше завдання даної роботи – розглянути типові постановки задач класифікації об'єктів.

Розробка методів машинного розпізнавання дозволяє розширити коло виконуваних комп'ютерами завдань і зробити переробку інформації машинами більш інтелектуальною. Прикладами сфер застосування розпізнавання можуть служити системи розпізнавання мови, машинний зір, відбитки пальців, розпізнавання тексту, та інше.

Системи розпізнавання образів використовуються в даний час в робототехніці для створення систем «зору» роботів, застосовуються в навігаційних системах літальних апаратів. В останні роки з'явилися оптико-електронні пристрої з голографічними фільтрами, призначені для управління різними літальними апаратами (наприклад, в системах управління крилатими ракетами).

Оптичні методи розпізнання образів лежать в основі роботи інформаційно-пошукових систем, що застосовуються для пошуку певної інформації. Саме тому проведення аналізу методів оптичного розпізнання одна з основних поставлених задач.

Оптичні методи розпізнання образів можуть бути використані і для вирішення такого важливого завдання, як виділення корисного сигналу на тлі перешкод, тобто для оптимальної фільтрації сигналів.

Складна непередбачувана поведінка фізичної системи (надалі стохастична) може бути обумовлено випадковими змінами її параметрів, випадковими зовнішніми впливами, а також розвитком в системі різноманітних нестійкостей. Зазначені фактори призводять до стохастизації сигналів і структур, що характеризують поведінку і стан системи. Для вивчення процесів стохастизації найчастіше залучаються різноманітні імовірнісні підходи.

В основі таких підходів лежать методи статистичного аналізу випадкових величин і функцій. При проведенні статистичного аналізу широко використовуються елементи математичної статистики, що включають теорію оцінки довірчих інтервалів, вибірок, способи апроксимації експериментальних даних, перевірку статистичних гіпотез. Зазначені методи і підходи давно стали традиційними. Поряд з ними в останні роки набули поширення і деякі менш відомі способи обробки сигналів, засновані, зокрема, на вейвлет-перетворенні та фрактальному аналізі, розглянути та порівняти які – одна з задач цієї роботи. Відмітна особливість останніх полягає в тому, що вони поряд з глобальними характеристиками випадкових процесів (які утворюються в результаті використання процедури усереднення по великим тимчасових інтервалах), дозволяють розкрити особливості їх локальної структури.

Мета даної роботи – проаналізувати методи виявлення та ідентифікації об'єктів, та розглянути можливі напрямки розвитку.

1 МЕТОДИ ОПТИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА РОЗПІЗНАВАННЯ ОБРАЗІВ

1.1 Задачі розпізнання образів

Розпізнавання образів – це віднесення вихідних даних до певного класу за допомогою виділення істотних ознак, що характеризують ці дані, із загальної маси несуттєвих даних.

Проблеми розпізнавання легко вирішуються людьми, причому робиться це, як правило, підсвідомо. Спроби ж побудувати штучні системи розпізнавання не настільки переконливі. Основна проблема полягає в тому, що часто неможливо адекватно визначити ознаки, на основі яких слід здійснювати розпізнавання.

В даний час розпізнавання образів сформувалося як самостійний напрямок математики та інформатики, що розробляє методи вирішення і дослідження задач прогнозування та класифікації.

Впізнавання – необхідний елемент будь-якої свідомої і цілеспрямованої діяльності. Наприклад, вперше розглядаючи знак, ми прагнемо віднести його до одного з відомих нам класів: буква, математичний символ, нотний знак, ієрогліф і інше. Принципи класифікації можуть бути різними. Отже, один і той же предмет з безлічі існуючих предметів можна розбити на підмножина різними способами.

Залежно від умов, в яких відбувається процес розпізнавання, в теорії розпізнавання образів виділяються наступні типи завдань розпізнавання:

- завдання автоматичної класифікації (завдання таксономії, кластеризації)
- розбиття множини об'єктів по їх описам на систему непересічних класів;
 - динамічне розпізнавання і динамічна класифікація – завдання перше і друге в постановці дослідження об'єктів в динаміці;
 - завдання розпізнавання – віднесення пред'явленого (нового) об'єкта по його опису до одного з заданих класів;

– завдання прогнозування – це попереднє завдання, в яких рішення має ставитися до деякого моменту в майбутньому.

Незважаючи на істотні відмінності, які простежуються в постановках наведених вище завдань розпізнавання, загальні етапи їх вирішення представляються у вигляді наступних підзадач [1]:

– перша підзадача пов'язана з вимірюванням характеристик властивостей об'єктів, що підлягають розпізнаванню, і поданням отриманих в результаті вимірювання числових значень цих характеристик в деякому вигляді. Дана підзадача визначається як завдання вимірювання та представлення вихідних даних;

– друга підзадача пов'язана з виділенням характерних властивостей (ознак розпізнавання) з отриманих вихідних даних і зниженням розмірності векторів вимірювань. Цю підзадачу часто визначають як завдання попередньої обробки і вибору ознак;

– третя підзадача полягає у знаходженні вирішальних процедур, правил, необхідних для розпізнавання об'єктів.

Типові постановки задач класифікації:

– завдання ідентифікації, яке полягає в тому, щоб виділити певний конкретний об'єкт серед йому подібних;

– віднесення об'єкта до того чи іншого класу. Це може бути, наприклад, завдання розпізнавання букв або прийняття рішення про наявність дефекту в деякій технічній деталі, віднесення об'єкта до певного класу відображає найбільш типову проблему класифікації, і, коли говорять про розпізнавання образів, найчастіше мають на увазі саме цю проблему;

– кластерний аналіз, що полягає в розподілі заданого набору об'єктів на класи – групи об'єктів, схожі між собою по тим чи іншим критерієм. Цю задачу часто називають класифікацією, оскільки, на відміну від задачі другої, класи апріорно не задані;

До завдань розпізнавання образів відносяться також завдання мінімізації опису вихідних об'єктів, виділення інформативних ознак.

Найчастіше в задачах розпізнавання образів розглядаються монохромні зображення, що дозволяє розглядати зображення як функцію на площині. Якщо розглянути множини точок на площині T , де функція $X(x, y)$ висловлює в кожній точці зображення його характеристику – яскравість, прозорість, оптичну щільність, то така функція є формальним записом зображення.

І багато всіх можливих функцій $X(x, y)$ на площині T – є моделлю всіх зображень X . Вводячи поняття подібності між образами можна поставити завдання розпізнавання[2].

1.2 Аналіз методів оптичної ідентифікації та розпізнавання образів.

1.2.1 Вейвлет-аналіз

Вперше система базисних функцій, що описує основні властивості вейвлетів, була опублікована математиком А.Хааром на початку ХХ століття. Сам термін з'явився пізніше, в 1980-х роках. Розробка теорії вейвлетів велася кількома вченими, це були: Гуппілауд, Гроссман, Морлі – вони ввели поняття безперервного вейвлет-перетворення (БВП), Жан Олаф-Стромберг – вів роботу по дискретним вейвлет-перетворення (ДВП), Добеши – розробила ортогональні вейвлети і багато інших[3].

Схема оптичного пристрою, що реалізує вейвлет-перетворення приведена на рис. 1.1 і складається з наступних елементів: 1 – лазер, 2 – коліматор, 3 – вхідна площина, в яку поміщається транспарант з сигналом який аналізується, представленим як залежність пропускання від координати x . Циліндрична лінза L_1 виконує одномірне перетворення Фур'є цього сигналу. На масці 4 записані Фур'є-образи базису вейвлет перетворення. Оскільки Фур'є-образ будь-якої функції (крім функції Гаусса) – комплексна функція, то маска 4 виготовляється за голографічною технологією. Таким чином, в площині 4 виконується множення Фур'є-образу аналізованого сигналу на Фур'є-образ базисного вейвлета. Оскільки необхідно забезпечити перебір різних масштабів, то в площині 4 по

вертикальній осі просторово рознесені кілька Фур'є-образів базисного вейвлета, кожен з яких відрізняється своїм масштабом.

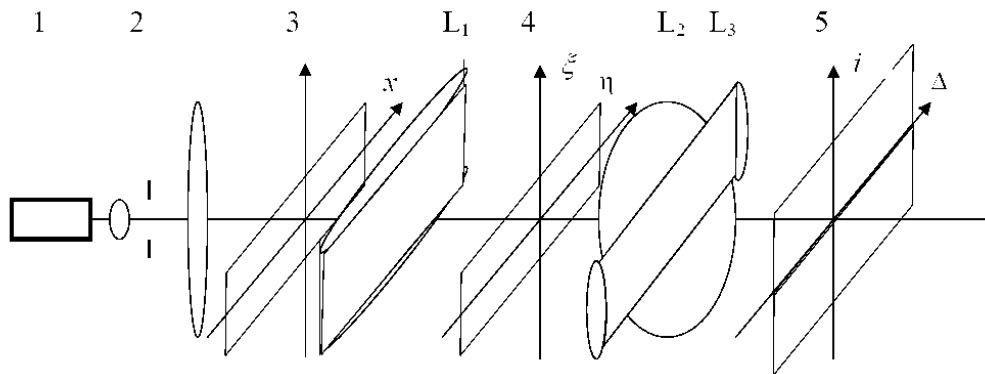


Рисунок 1.1 – Схема оптичного пристрою, що реалізує вейвлет-перетворення

Система з сферичної лінзи L_2 і циліндричної L_3 виконує перетворення Фур'є по одній координаті і проєкцію зображення по іншій – в площині 5 формується картина (двовимірна) розкладання аналізованого сигналу по заданому базису.

1.2.1.1. Основні характеристики вейвлетів. З використанням вейвлетів можна наближати складний сигнал з дуже високою точністю. Внаслідок виділення локальних особливостей в досліджуваному процесі, відсутніх у рядів Фур'є, і достатньої різноманітності, вейвлети все частіше знаходять практичне застосування для аналізу характерних особливостей складних сигналів. Базисні функції даного перетворення займають проміжне положення між крайніми випадками – гармонійними і імпульсними функціями [4].

При формуванні вейвлет-перетворень в загальному випадку застосовуються дві безперервні, взаємозалежні і інтегровані з незалежної змінної функції:

– вейвлет-функція $\psi(t)$ з нульовим значенням інтеграла і частотним Фур'є-образом $\psi(\omega)$ характер якої відображає локальні особливості сигналу;

– масштабуюча функція $\varphi(t)$ (так звана скейлінг-функція) з одиничним значенням інтеграла, за допомогою якої здійснюється грубе наближення (апроксимація) сигналу.

Скейлінг-функції визначаються тільки для ортогональних вейвлетів. Їх доцільно використовувати для аналізу низькочастотних і високочастотних складових.

БВП формується за допомогою безперервних масштабних перетворень і переносів вейвлета $\psi(t)$ з довільними значеннями масштабного коефіцієнта a і параметра зсуву b :

$$W_f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1.1)$$

де $*$ – символ комплексного сполучення.

Можна показати, що для функцій f з $L^2(R)$ існує зворотне вейвлет-перетворення:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_f(a,b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}, \quad (1.2)$$

де C_ψ – нормуючий коефіцієнт, який визначається за формулою:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty, \quad (1.3)$$

де $\psi(\omega)$ – фур'є-перетворення вейвлета $\psi(t)$.

Для ортонормованих вейвлетів $C_\psi = 1$.

Таким чином, будь-яка функція з $L^2(R)$ може бути представлена у вигляді суперпозиції масштабних перетворень і зрушень базисного вейвлета з коефіцієнтами, залежними від масштабу (частоти) і параметра зсуву (часу).

Умова скінченності C_ψ виражає обмеження на клас функцій, які можна використовувати в якості вейвлетів. Зокрема, при $\omega = 0$ для збіжності інтеграла в нулі значення $\psi(t)$ має дорівнювати нулю. Це забезпечує умова компактності Фур'є-образу вейвлета з локалізацією навколо деякої частоти ω_0 – середньої частоти вейвлетного функції. Для цього функція $\psi(t)$ повинна мати нульове середнє значення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (1.4)$$

Отже, що не для всіх сигналів можливе їх точне відтворення за допомогою вейвлета $\psi(t)$ тому при нульовому першому моменті вейвлета коефіцієнт передачі постійної складової сигналу в зворотному вейвлет-перетворенні дорівнює нулю. Умови точної реконструкції сигналів визначаються кратномасштабного аналізом.

Функція $W_f(a,b)$ визначає значимість компонент різного масштабу в часі і називається спектром коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу f .

За аналогією з перетворенням Фур'є можна визначити повну енергію сигналу:

$$E_f = \int f^2(t) dt = \iint W_f^2(a,b) \frac{dadb}{a^2}, \quad (1.5)$$

а також глобальний спектр енергії – розподіл повної енергії за масштабами (скейлограмму вейвлет-перетворення):

$$E_w = \int W_f^2(a,b)db. \quad (1.6)$$

Базисні функції $\psi(t)$ формують вейвлети (ці функції вибираються відповідно до специфіки завдань), повинні відповідати таким вимогам:

– локалізація: вейлет повинен бути локалізована поблизу нуля аргументу як в тимчасовій, так і в частотній області. Наприклад, дельта-функція $\delta(t)$ і гармонійна функція не задовольняють цій умові;

– нульове середнє: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$, що означає зміну знаку (осциляцію) графіка вихідної функції навколо нуля на осі часу і він повинен мати нульову площу;

– $\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t)dt = 0$ – рівність нулю n перших моментів;

– такі вейвлети називають вейвлетами n -го порядку. Відповідне вейлет-перетворення дозволяє більш детально аналізувати високочастотну складову процесу. Це може бути корисним для аналізу процесів, що характеризуються різкими важливими для аналізу «піками» (наприклад, процеси трейдингу);

– самоподібність вейлет-перетворення. Всі вейвлети конкретного сімейства $\psi_{ab}(t)$ мають те саме число осциляцій, що і материнський вейлет $\psi(t)$ оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень (a) і зсуву (b);

– обмеженість: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$;

– вейлет повинен бути досить швидко спадною функцією тимчасової (просторової) змінної.

Визначення та властивості одновимірного безперервного вейлет-перетворення узагальнюються на багатовимірний і дискретний випадки.

Приклади найбільш відомих вейлетів [5]:

Приклади найбільш відомих вейлетів [5]:

а) матеріальні безперервні базиси:

1) Гаусові:

– 1-го порядку, або WAVE-вейвлет: $\psi(t) = te^{-t^2/2}$;

– 2-го порядку, або МНАТ-вейвлет «Мексиканський капелюх» –

Mexican hat: $\psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2}$;

– n -го порядку: $\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} [e^{-t^2/2}]$;

2) DOG – difference of Gaussians: $\psi(t) = e^{-t^2/2} - 0,5e^{-t^2/8}$;

3) LP-Littlewood & Paley: $\psi(t) = \pi t^{-1} (\sin 2\pi t - \sin \pi)$;

б) матеріальні дискретні:

1) HAAR-вейвлет: $\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$

2) FHAT («Французький капелюх»): $\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3 \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

в) комплексні:

1) Морле (Morlet): $\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}$;

2) Пауля (Paul) (чим більше n тим більше нульових моментів має

вейвлет): $\psi(t) = \Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$.

Крім вейвлетів, описуваних аналітично в явному вигляді, відомо значне безліч вейвлетів, що визначаються ітераційним виразами, починаючи з добре відомих функцій Добеши (Daubechies).

Значна кількість типів материнських вейвлетів і їх варіацій представлено Mathcad, Mathematica, Wavelet Toolbox 2.0/2.1 (MATLAB) та інших спеціалізованих додатках.

За рахунок вибору певних вейвлетів можна більш повно виявити характерні нестационарні області аналізованого процесу. Однак деякі властивості вейв-

лет-перетворення процесів (сигналів) не залежить від вибору материнських вейвлетів. До таких властивостей відносяться наступні:

– лінійність. Це властивість безпосередньо впливає з відповідного властивості скалярного твору:

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W_{f_1}(a, b) + \beta W_{f_2}(a, b); \quad (1.7)$$

– інваріантність щодо зсуву. Зсув сигналу у часовій області на b_0 обумовлює зрушення вейвлет-образу також на b_0 ;

$$W[f(t - b_0)] = W_f[a, b - b_0]; \quad (1.8)$$

– інваріантність щодо масштабування. Розтягування (стиснення) сигналу тягне за собою його розтягнення (стиснення) його в області $W(a, b)$:

$$W[f(t/a_0)] = \frac{1}{a_0} W\left[\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right]; \quad (1.9)$$

– диференційованість;

$$W\left[\frac{d^n}{dt^n} f\right] = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d^n}{dt^n} [\psi_{ab}(t)] dt. \quad (1.10)$$

Властивість диференційованості надає можливість детального аналізу особливостей високого порядку або дрібно-масштабних варіацій сигналу $f(t)$ диференціюємо потрібне число раз або вейвлета, або самого сигналу. При виділенні в сигналах добре локалізованих різномасштабних процесів можна розглядати тільки ті масштабні рівні розкладання, які представляють інтерес.

Використання базисних вейвлет-функцій забезпечує якісне уявлення сигналів з локальними стрибками, розривами та інше. Більшість вейвлетів не мають аналітичного вираження і можуть розраховуватися за допомогою ітераційних виразів. У сукупності з достатнім обчислювальним обсягом проведення перетворення це часто змушує використовувати найпростіші вейвлети для аналізу і синтезу сигналів.

Найбільш часто використовується вейвлет Хаара. Базис Хаара відомий з 1910 р. і широко використовується в перетвореннях, наприклад, на його основі розроблений стандарт кодування зображень із стисненням JPEG2000.

Теорія вейвлетів надає ефективну техніку обробки випадкових послідовностей [6]. Одна з основних ідей вейвлет-представлення сигналу $x(t)$ полягає в розбивці наближення $x_j(t)$ до сигналу на дві складові – грубу (апроксимуючу) $x_{j-1}(t)$ і витончену (деталізуючу) $x_{j-1}^d(t)$ з подальшим їх уточненням ітераційним методом:

$$x_j(t_i) = x_{j-1}(t_i) + x_{j-1}^d(t_i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \Phi_{j-1,k}(t_i) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \Psi_{j-1,k}(t_i), \quad (1.11)$$

де j характеризує рівень дозволу:

$\Phi_{j-1,k}(t), \Psi_{j-1,k}(t)$ – відповідно масштабуюча (апроксимуюча) і вейвлет-функція (деталізуюча функція);

$a_1 = \{a_{j-1,k}\}, d_1 = \{d_{j-1,k}\}$ – набори апроксимуючих і деталізуючих коефіцієнтів розкладання $(j-1)$ рівня дозволу;

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ – безліч цілих чисел.

Апроксимуючі функції $\Phi(t)$ – безліч цілих чисел. Апроксимуючі функції $\Psi(t)$ притаманні далеко не всім вейвлет, а тільки тим, які відносяться до ортогональним. Наближенню (1.11) відповідає початковий набір коефіцієнтів

$a_0 = \{a_{j,k}\}$. Зазвичай в якості $a_0 = \{a_{j,k}\}$ вибирається масив значень сигналу $x(t)$, $a_{j,k} = x(t_i)$.

Повторюючи процедуру m раз, $m = \overline{1, M}$ розкладаючи кожен раз згладжену функцію $x_{j-m}(t_i)$ на ще більш згладжену частину $x_{j-m-1}(t_i)$ і деталізує $x_{j-m-1}^d(t_i)$, отримуємо вейвлет-розкладання апроксимації $m^{-\text{го}}$ рівня дозволу $x_j(t)$ для глибини розкладання m .

$$x_j(t_i) = x_{j-m}(t_i) + x_{j-m}^d(t_i) + \dots + x_{j-1}^d(t_i) \quad (1.12)$$

$$x_j(t_i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-m,k} \Phi_{j-m,k}(t_i) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-m,k} \Psi_{j-m,k}(t_i) + \dots + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j-1,k} \Psi_{j-1,k}(t_i) \quad (1.13)$$

Вейвлет-розкладання (1.12; 1.13) можна зобразити у вигляді такої схеми знаходження коефіцієнтів:

$$x_j(t_i) = a_0 \rightarrow \{a_1, d_1\} \rightarrow \{a_2, d_2, d_1\} \rightarrow \dots \rightarrow \{a_M, d_M, d_{M-1}, \dots, d_1\} \quad (1.14)$$

Практична обробка і подання реальних сигналів зазвичай базуються на трактуванні вейвлет-перетворень в частотній області і дозволяють успішно використовувати апарат частотної фільтрації і методи швидкого вейвлет-перетворення. Вони засновані на пірамідоїдальному алгоритмі Малла і проріджуванні спектру вейвлетів по частоті. Головним результатом є висновок про відповідність вейвлет коефіцієнтам передавальної характеристики низькочастотного і високочастотного фільтрів, що дозволяє організувати ефективні, з точки зору обсягу обчислень, процедури обчислення коефіцієнтів вейвлетів.

Вхідна послідовність $x(t)$ не є стаціонарною. У загальному випадку розкладання сигналу може бути представлено в такий спосіб:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1.15)$$

де j – глибина кратномасштабного розкладання;

$a_{j,k}$ – масштабуючі (апроксимуючі) коефіцієнти;

$\varphi_{j,k}(t)$ – масштабуюча функція;

$d_{j,k}$ – деталізують коефіцієнти;

$\psi_{j,k}(t)$ – вейвлет-функція.

1.2.1.2. Основи вейвлет-аналізу для ідентифікація систем. При вирішенні задачі ідентифікації можна виділити широкий клас процесів, для управління якими не досить побудови лінійних моделей. Крім того, дані процеси можуть мати деякі особливості в певні моменти часу. У технічних системах вони часто мають циклічний характер. Прикладом причин цього факту може служити відмінність в складі сировини, що поставляється від різних постачальників для технологічних процесів безперервного і напівбезперервного виробництва. Інший приклад – сезонні і добові коливання навантаження в електричних мережах, що безпосередньо впливає на процес оптимізації режимів управління передачею електроенергії. Добре відомі коливання фондового ринку, зумовлені цілою низкою економічних закономірностей. Тому актуальним є вирішення завдання побудови прогнозуючих моделей для нестационарних процесів такого типу.

Протягом останніх двадцяти років для аналізу нестационарних процесів набуло широкого застосування вейвлет-перетворення (wavelet – «маленька хвиля»), про що свідчать численні публікації.

У вітчизняній літературі її іноді називають «сплеском», підкреслюючи осциляційного характер. Вейвлет-перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу, наприклад, по відношенню до перетворення Фур'є.

Перші роботи по вейвлет-аналізу тимчасових (просторових) рядів з вираженою неоднорідністю з'явилися в середині 1980-х років [7]. Метод позиціону-

ється як альтернатива перетворення Фур'є. Надалі з'явилася і розвивається теорія вейвлетів і її численні програми.

Сьогодні вейвлет-аналіз використовується для обробки і синтезу нестационарних сигналів, для вирішення завдань стискування і кодування інформації, обробки зображень, в теорії і практиці розпізнавання образів, зокрема, в медицині, і в багатьох інших сферах. Ефективною виявилася практика застосування вейвлетів для дослідження геофізичних полів, тимчасових метеорологічних рядів, прогнозування землетрусів. Підхід ефективний для дослідження функцій і сигналів, нестационарних в часі або неоднорідних в просторі, коли результати аналізу повинні містити не тільки частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу по частотним складовим), але і відомості про локальні координатах, на яких виявляють себе ті чи інші групи частотних складових, або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу.

Вейвлет-аналіз заснований на застосуванні спеціального лінійного перетворення процесів для вивчення інтерпретованих цими процесами реальних даних, що характеризують процеси і фізичні властивості реальних об'єктів, зокрема, технологічних процесів. Таке лінійне перетворення здійснюється на основі спеціальних солітоноподібних функцій (вейвлетів), що утворюють ортонормований базис в L^2 .

Вейвлет-перетворення (ВП) одновимірного сигналу – це його представлення у вигляді узагальненого ряду або інтеграла Фур'є по системі базисних функцій. Метод заснований на фундаментальній концепції вистави довільних функцій на основі зрушень і розширень однієї локалізованої невеликої хвилі або вейвлет-функції, яка швидко згасає у напрямку до нуля. Вейвлет формується таким чином, що функція, яка його утворює (функція, що формує вейвлет або материнський вейвлет) характеризується певним масштабом (частотою) і локалізацією в часі за рахунок операцій зсуву в часі і зміни тимчасового масштабу. Тимчасовий масштаб аналогічний періоду осциляцій, тобто обернений частоті, а зрушення інтерпретує зміщення сигналу по осі часу.

Вейвлет-перетворення ставить у відповідність одновимірному процесу двовимірну поверхню в тривимірному просторі (частота і час покладаються неза-

лежними змінними). Таким чином, властивості процесу досліджуються як в тимчасовій, так і в частотній областях, надаючи можливість досліджувати динаміку частотного складу процесу і його локальні особливості. Це дозволяє виявляти координати, при яких певні частоти виявляються найбільш істотно. Графічна інтерпретація вейвлет-перетворення може бути здійснена за допомогою проектування на площину і виділення ізорівнів, що характеризують зміни інтенсивності коефіцієнтів вейвлет-перетворення при різних часових масштабах, а також отримати розташування локальних екстремумів поверхонь.

На відміну від апарату перетворення Фур'є, коли використовується функція, яка породжує ортонормований базис простору за допомогою масштабного перетворення, вейвлет-перетворення формується на основі базової функції, локалізованої в деякій обмеженій області і належить простору, тобто всій числовій осі. У порівнянні з «віконним» перетворенням Фур'є, для отримання перетворення на одній частоті вже не потрібно вся тимчасова інформація. Перетворення Фур'є не дає уявлення про локальні властивості сигналу при досить швидких змінах у часі його спектрального складу. Таким чином, вейвлет-аналіз може забезпечити частотно-часовою інформацією про функції, яка в багатьох практичних ситуаціях є більш актуальною, ніж інформація отримана за допомогою стандартного Фур'є-аналізу.

Вейвлети також забезпечують потужний інструмент апроксимації, який може бути використаний для синтезу функцій, які погано апроксимуються іншими методами, з мінімальною кількістю базисних функцій.

Вейвлет-перетворення як математичний інструмент служить, головним чином, для аналізу даних в тимчасовій і частотній областях. Теорія вейвлетів може бути використана для ідентифікації систем в різних аспектах. Дослідження взаємодії теорії ідентифікації та вейвлет-аналізу було в деякій мірі представлено в [8]. Відзначено, що вейвлети використовуються переважно для ідентифікації нелінійних систем з особливою структурою, де невідомі змінюються в часі коефіцієнти можуть бути представлені як лінійна комбінація базисних вейвлет-функцій. Такий підхід набуває розвитку на основі використання кратномасштабного аналізу, в якому власне завдання вибору вейвлетів вирішена. Інший під-

хід використовує базисні функції вейвлета в якості входів системи. Далі, на основі аналізу виходу системи, знаходять необхідні коефіцієнти [9].

Крім того, характеристики вейвлетів можуть бути використані для власних частот і частот загасання системи, шляхом використання гребнів в вейвлет-апроксимації системи в просторі вхід-вихід. Крім безпосереднього вейвлет-аналізу, для ідентифікації систем можуть бути використані біортогональні вейвлети, вейвлет-фрейми або навіть вейвлет мережі [10].

Існує багато різних способів застосування теорії вейвлетів для ідентифікації лінійних систем. Прейсіг і Ріппін досліджували ідентифікацію систем зі специфічною входять-вихідний структурою, в якій параметри ідентифікуються через сплайн-вейвлети і їх похідні. В роботі [11] представлений розширений за допомогою ортонормованого перетворення метод найменших квадратів з метою вилучення корисної інформації з даних.

В даній роботі розглянута можливість спільного використання теорії вейвлетів [12] і теорії ідентифікації систем [13]. Специфіка підходу, представленого в роботі, проілюстрована на рис. 1.2.

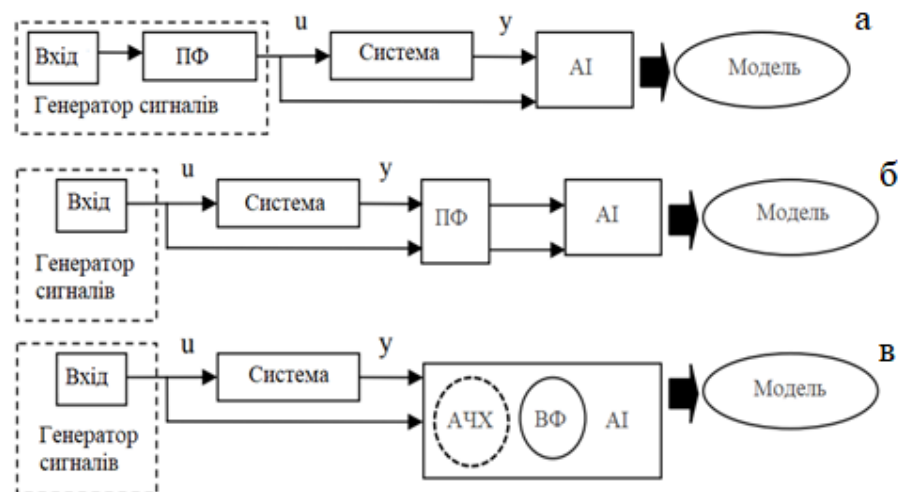


Рисунок 1.2 – Основні принципи пропонованих алгоритмів

Класичні методи ідентифікації в частотній області показані на рис. 1.2, (а, б), модифікований метод – на рис. 1.2, в. На схемі наведені позначення: ПФ –

перетворення Фур'є, АІ – алгоритм ідентифікації, АЧХ – аналіз частотних характеристик, ВФ – вейвлет-фільтр.

Класичний підхід до ідентифікації систем в частотній області полягає в тому, що необхідно спочатку відфільтрувати вхідні дані, подати відфільтровані входи в систему, а потім провести ідентифікацію (рис. 1.2, а).

Цей підхід має істотну обмеженість – необхідна апріорна інформація про властивості частот системи, щоб виявляти важливі частоти при побудові фільтра.

Крім того, якщо будь-яка резонансна частота не виявлено, то відгук моделі не буде її утримувати, і, відповідно, може бути втрачено важлива властивість вихідної системи. Проблема може бути вирішена шляхом використання фільтрації після подачі входів в систему (рис. 1.2, б). Інший підхід може полягати в здійсненні вейвлет-фільтрації і частотного аналізу невідфільтрованих вхідних і вихідних сигналів. Однак, щоб зберегти тимчасову структуру завдання ідентифікації систем, неможливо розділити вейвлет-перетворення і ідентифікацію. Таким чином, і частотний аналіз і вейвлет-перетворення повинні бути включені в алгоритм ідентифікації, як показано на рис. 1.2, в.

1.2.2 Кореляційний метод

Насправді вихідні змінні об'єкта $y(t)$ визначаються не тільки детермінованими керуючими вхідними сигналами $u(t)$, але і неспостережуваними і некеруваними впливами (перешкодами) $e(t)$, що викликає відхилення вихідних змінних від заданих значень.

Щоб отримати рівняння зв'язку між статистичними характеристиками входу і виходу для стаціонарних ергодичної процесів, користуються їх статистичними характеристиками і, зокрема, кореляційними функціями або спектральною щільністю.

Структурна схема досліджуваного об'єкта в цьому випадку може бути представлена у вигляді, зображеному на рис. 1.3.

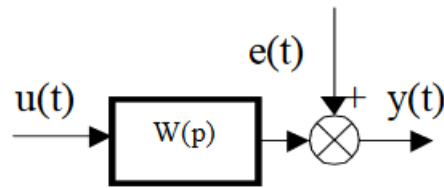


Рисунок 1.3 – Структурна схема досліджуваного об'єкта

Всі перешкоди, які впливають на різні частини об'єкта, приведені до виходу об'єкта і представлені у вигляді адитивного шуму. Значення вихідного сигналу обчислюється за формулою

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) u(t - \tau) d\tau + e(t). \quad (1.16)$$

Помноживши цей вислів на $x(t + \tau)$ і проінтегрувавши обидві частини по τ в межах від $-T$ до T (при $T \rightarrow \infty$), отримаємо:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) d\tau + R_{ue}(\tau). \quad (1.17)$$

Якщо $R_{ue}(\tau) = 0$ і $\omega(t) = 0$, при $t < 0$ (умова фізичної можливості бути реалізованим системи), то рівняння, зване рівнянням Вінера-Хопфа, набуває вигляду:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Це рівняння відноситься до лінійного інтегрального рівняння першого роду. Його чисельне рішення здійснюється методом апроксимуючих функцій, обчислення яких, в свою чергу, виробляється на основі методу колокації, методу найменших квадратів і методу Гальоркіна. Рішення Рівняння Вінера-Хопфа і дає вираз для функції ваги об'єкта.

Розглянемо рішення цього рівняння, використовуючи його дискретний аналог:

$$R_{y,u}(m) = \sum_{k=0}^n \omega(k) R_{u,u}(m-k) \Delta\tau, \quad (1.19)$$

де $\Delta\tau$ – інтервал дискретизації кореляційних функцій.

Позначимо:

$$R_{u,u} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(n-1) \\ R_{uu}(0) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{uu}(n-1) & R_{uu}(n-2) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix}; \quad (1.20)$$

$$w = \begin{pmatrix} \omega(1) \\ \omega(2) \\ \vdots \\ \omega(n) \end{pmatrix}; \quad R_{y,u} = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\text{де } r(i) = \frac{R_{y,u}(i)}{\Delta\tau}.$$

Тоді рівняння (1.19) можна записати в матричному вигляді

$$R_{y,u} = R_{u,u} w. \quad (1.22)$$

Звідки шукані значення функції ваги дорівнюватимуть:

$$w = R_{u,u}^{-1} R_{y,u}. \quad (1.23)$$

В силу поганої обумовленості матриці $R_{u,u}$ рішення рівняння (1.23) буде нестійким. Нестійкий рішення призводить до великих змін рішення при малих змінах коефіцієнтів матриць $R_{y,u}$ та $R_{u,u}$.

Більш точний розв'язок може бути отримано методом апроксимуючих функцій з використанням методу колокації [14].

Відповідно до цього методу апроксимують функцію ваги лінійною комбінацією з m ортогональних функцій:

$$\tilde{\omega}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t). \quad (1.24)$$

Обчислюють m функцій виду:

$$f_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) R_{uu}(t-\tau) d\tau. \quad (1.25)$$

Метод колокації дає систему з m лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів апроксимуючої функції α_k

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k(k) = R_{uy}(i) \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.26)$$

Так як в експерименті виходять оцінки кореляційної функції, значення шуканої функції ваги виявляється наближеним. Структура рівняння Вінера-Хопфа така, що невеликі помилки у визначенні кореляційних функцій призводять до суттєвих помилок у визначенні імпульсної перехідної характеристики $\omega(t)$ і в підсумку до невисокої точності ідентифікації параметрів системи.

Більш перспективним є використання кореляційного методу для визначення запізнювання в об'єкті управління. Величина запізнювання дорівнює значенню аргументу взаємної кореляційної функції, при якому вона досягає максимуму.

1.2.3 Фрактальний аналіз

1.2.3.1 Поняття фрактала. Фракталами називаються геометричні об'єкти: лінії, поверхні, просторові тіла, що мають сильно порізаний форму і володіють властивістю самоподібності. Основоположник теорії фракталів франко-американський математик Бенуа Мандельброт утворив термін фрактал від латинського причастя *fractus*. Відповідне дієслово *frangere* перекладається як ламати, розламувати, тобто створювати фрагменти неправильної форми. Самоподібність як основна характеристика фрактала означає, що він більш-менш одноманітно влаштований в широкому діапазоні масштабів. Так, при збільшенні маленькі фрагменти фрактала виходять дуже схожими на великі. Це зумовлює масштабну інваріантність (скейлінг) основних геометричних особливостей фрактального об'єкта, їх незмінність при зміні масштабу. Звичайно, для реального природного фрактала існують деякі мінімальний l_{\min} і l_{\max} максимальний масштаби довжини, що обмежують область $l_{\min} \ll 1 \ll l_{\max}$, поза межами якої основна властивість фрактала – самоподібність – пропадає.

Фрактальні форми дивно широко поширені в природі (берегова лінія, гористий рельєф, річка, дерево та інші). Відомі фрактальні структури речовин, фрактальні структури множин і випадкових процесів. При проведенні фізичних досліджень (в тому числі і оптичних) фрактальні ознаки можуть бути виявлені в структурі реєстрованих сигналів і полів. Часто фрактальність проявляється в поведінці функцій, що характеризують розподіл фізичних величин в часі і просторі.

При опису властивостей фрактала важливу роль відіграє така його характеристика як фрактальна розмірність. Дамо загальне визначення цієї величини. Нехай d – звичайна Евклідова розмірність простору, в якому знаходиться наш

фрактальний об'єкт ($d = 1$ – лінія, $d = 2$ – площина, $d = 3$ – звичайне тривимірний простір). Вкриємо тепер цей об'єкт цілком d -мірними "кулями" радіуса l . Припустимо, що нам було потрібно для цього не менше, ніж $N(l)$ куль. Тоді, якщо при досить малих l величина $N(l)$ змінюється з l за степеневим законом:

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D}, \quad (1.27)$$

то D – називається розмірністю Хаусдорфа-Безіковича або фрактальної розмірністю цього об'єкта. Використовуючи поняття фрактальної розмірності, Мандельброт дав більш суворе, ніж наведене вище, визначення фрактала. Згідно з цим визначенням фрактал являє собою об'єкт, розмірність Хаусдорфа-Безіковича якого більше його топологічної розмірності (0 – для розпису точок, 1 – для кривої, 2 – для поверхні і т.д.).

Формулу (1.27) можна переписати також у вигляді:

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (1.28)$$

Це і служить загальним визначенням фрактальної розмірності. Відповідно до нього величина D є локальною характеристикою даного об'єкта. Абсолютно ясно, що ми отримали б при оцінці фрактальної розмірності той же самий результат, якби використовували процедуру покриття фрактала кубами (квадратами, якщо фрактальний об'єкт розташовується на площині). Іноді покриття здійснюється елементами, з яких складається даний фрактал. У цьому випадку має місце спрощений варіант формули (1.28) для визначення фрактальної розмірності. Нехай на деякому етапі покриття фрактала нам довелося використовувати, як мінімум, $N(l)$ таких елементів характерного розміру l , а на іншому $N(l')$ елементів розміру l' .

Тоді величина фрактальної розмірності D може бути обчислена за формулою:

$$D = -\frac{\ln\left(\frac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\frac{l}{l'}\right)}. \quad (1.29)$$

Очевидно, цю формулу можна переписати у вигляді:

$$\frac{N(l)}{N(l')} = \left(\frac{l'}{l}\right)^D, \quad (1.30)$$

що є наслідком висловлення (1.27).

Завершуючи загальну характеристику фракталів, варто відзначити, що до них прийнято відносити не тільки самоподібні, але і так звані самоафінні об'єкти. До останніх відносяться геометричні фігури, частини яких можуть бути приведені у відповідність з усією фігурою за допомогою перетворень подібності, що проводяться за різними напрямками з різними коефіцієнтами подібності.

Розглянемо класичний приклад фрактальної безлічі – триадну криву Коха (рис. 1.4).

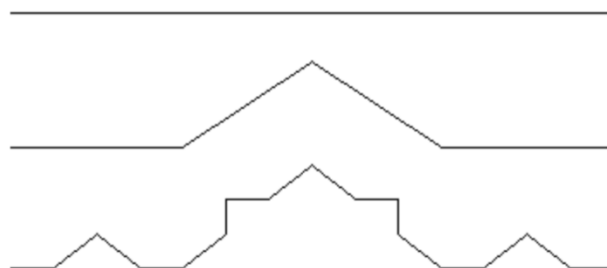


Рисунок 1.4 – Побудова триадної кривої Коха

Побудова кривої починається з одиничного відрізка, який називається ініціатором і є предфракталом 0-го порядку. Далі ініціатор замінюється на який утворює елемент – криву з чотирьох прямолінійних ланок, кожне з яких має довжину $1/3$. Так утворюється предфрактал 1-го порядку. Його довжина дорівнює $4/3$. Для побудови предфрактала наступного порядку кожна ланка замінюється на зменшений утворює елемент. В результаті отримуємо криву, що складається з $4 \times 4 = 16$ ланок, кожне з яких має довжину $(1/3)/3 = 1/9$, загальна довжина дорівнює $16/9$. Довжина предфрактала n -го порядку дорівнює $(4/3)^n$. Очевидно, що межа довжини кривої при n , що прагне до нескінченності, дорівнює нескінченності. В результаті отримали криву нескінченної довжини, що заповнює обмежене безліч на площині, що само по собі дуже цікаво. Якщо побудова кривої починати не з відрізка, а з трикутника, і застосувати перелічені вище побудови до кожної його сторони, то отримуємо "сніжинку" Коха (рис. 1.5)

Ця фігура цікава тим, що її периметр – лінія нескінченної довжини – обмежує кінцеву площу. Фрактальна розмірність триадної кривої Коха D дорівнює $\ln 4 / \ln 3$, тобто D є дробовим числом, що знаходиться між 1 і 2.

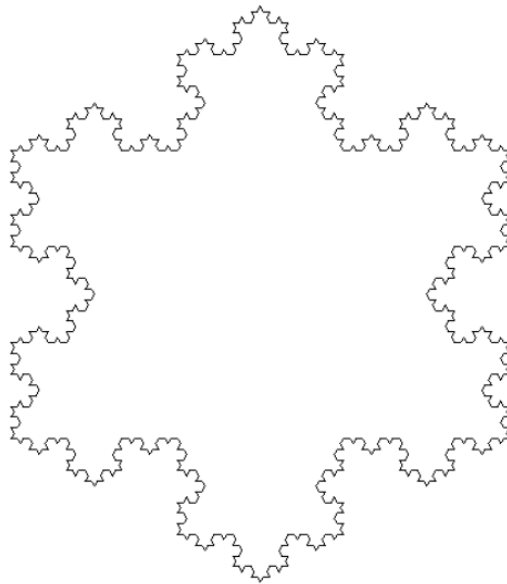


Рисунок 1.5 – "Сніжинка" Коха (предфрактал 4-го порядку)

1.2.3.2 Броунівські сигнали. Сенс фрактальних методів аналізу ми розглянемо спочатку на прикладі аналізу сигналу, що відповідає моделі броунівського руху. Такий сигнал можна отримати, реєструючи залежність від часу $X(t)$ положення броунівської частинки по одній з координат. Характерний вид такого роду сигналів (надалі вони будуть називатися броунівський) показаний на рис. 1.6.

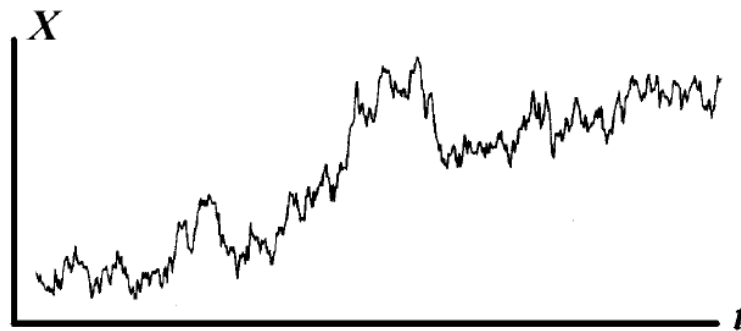


Рисунок 1.6 – Графік броунівського сигналу

Значення випадкової функції $X(t)$, яка описує зміни сигналу, мають гауссівський розподіл, тобто інтегральний розподіл $F_x(x)$ і щільність ймовірності $f(x)$ мають вигляд:

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2\right) ds, \quad (1.31)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (1.32)$$

де μ – математичне очікування;

σ – стандартне (середньоквадратичне) відхилення випадкової величини X .

Функції

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad t_2 > t_1 \quad (1.33)$$

також мають гауссівський розподіл (з нульовим математичним очікуванням), так що ймовірність

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du. \quad (1.34)$$

З останньої властивості випливає такий вираз для дисперсії збільшень броунівського сигналу:

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1|. \quad (1.35)$$

для будь-яких t_1 і t_2 з розглянутого часового інтервалу. Стосовно до дисперсії збільшень часто використовується термін дельта-дисперсія. Істотно, що величина дельта-дисперсії $\sigma^2 |t_2 - t_1|$ залежить тільки від різниці t_1 і t_2 , а не від самих значень. Формула (1.35) є дуже важливою в практичному відношенні. Якщо при обробці сигналу підтверджується її справедливість, то це означає приналежність його структури до випадкових фракталів з розмірністю $D = 1,5$ (пояснення нижче).

Математичне очікування збільшення (структурна функція сигналу) визначається виразом:

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{|t_2 - t_1|}. \quad (1.36)$$

Будь-яке збільшення реалізації броунівського сигналу має властивість статистичної самоподібності, тобто:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} (X(t + r\Delta t) - X(t)). \quad (1.37)$$

для будь-кого $r > 0$. Символ $\stackrel{\Delta}{=}$ означає, що дві випадкові величини мають однакове розподіл і, зокрема, одні і ті ж математичне очікування і дисперсію. Строго кажучи, слід говорити не стільки про самоподібність, скільки про самоафінність, тому що статистична ідентичність досягається різним масштабуванням сигналу по осі абсцис і по осі ординат (відповідно в r і \sqrt{r} раз). Однак ми надалі будемо як і раніше говорити про самоподібність броунівського сигналу, надаючи самоподібності більш широкий зміст.

Наявність самоподібності в характері зміни збільшень на різних інтервалах дозволяє поширити стандартну процедуру визначення фрактальної розмірності на графік броунівського сигналу. Зробимо це в такий спосіб. Нехай інтервал, на якому визначено сигнал, дорівнює $[0, 1]$. Розділимо цей інтервал на n рівних підінтервалів однакової довжини $\Delta t = 1/n$ і таким же чином розділимо вертикальну вісь на підінтервали довжини Δt . Вираз $|\Delta X|/|\Delta t|$ служить в якості оцінки числа квадратів розміру Δt , необхідних для покриття частини графіка $y = X(t)$, розташованої над одним підінтервалом. Так як математичне очікування величини $|\Delta X|$ пропорційна $\sqrt{\Delta t}$, то число квадратів, необхідних на одному підінтервалі, пропорційна $\sqrt{\Delta t}$. Всього є $1/\Delta t$ таких підінтервалів, і тому загальне число квадратів пропорційно:

$$N(\Delta t) \propto \Delta t^{-3/2}. \quad (1.38)$$

або

$$D = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 1,5. \quad (1.39)$$

Таким чином, фрактальна розмірність броунівського сигналу дорівнює 1,5.

1.2.3.3. Опис сигналів на основі моделі узагальненого броунівського руху. Розглянуту вище модель класичного броунівського руху можна розглядати як модель марківських випадкових процесів. Для відповідних їм сигналів ймовірність того, що $X(t_2)$ досягне певного значення при заданому $X(t_1)$ ($t_1 < t_2$), залежить тільки від t_1 і t_2 , а не від поведінки $X(t)$ при $t < t_1$. Такі сигнали мають строго певне значення фрактальної розмірності $D = 1,5$, тобто є броунівськими. У тих випадках, коли потрібно описати випадкові сигнали з іншими значеннями D , що володіють деякою "пам'яттю", вдаються до моделі узагальненого броунівського руху (УБР).

Вважається, що гауссівський сигнал $X(t)$ зі стандартним відхиленням σ підпорядковується моделі УБР, якщо прирощення

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1) \quad (1.40)$$

має гауссівський розподіл, що характеризується виразом

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^H} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) du. \quad (1.41)$$

З виразу (1.41) випливає, що в моделі УБР дельта-дисперсія дорівнює

$$E\left[\left(X(t_2) - X(t_1)\right)^2\right] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (1.42)$$

Вхідний в вищенаведені співвідношення параметр H ($0 < H < 1$) називається параметром Херста. При $H = 1/2$ модель УБР збігається з класичною моделлю броунівського руху.

Математичне очікування збільшення сигналу (тобто структурна функція першого порядку) визначається виразом:

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^H. \quad (1.43)$$

Формула (1.42) допускає узагальнення на структурні функції порядку q (q – додатне число). Використовуючи (1.41), можна показати, що

$$E[|X(t_2) - X(t_1)|^q] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^{qH}. \quad (1.44)$$

Збільшення володіє властивістю статистичного самоподібності, яке математично виражається наступним чином:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \triangleq \frac{1}{r^H} (X(t + r\Delta t) - X(t)), \quad (1.45)$$

для будь-кого $r > 0$.

Фрактальна розмірність сигналу узагальненого броунівського руху обчислюється так само, як і для класичного. Основна відмінність полягає в тому, що оцінка числа квадратів (1.37) замінюється новою оцінкою:

$$N(\Delta t) \approx \frac{\sigma}{\Delta t^{2-H}}, \quad (1.46)$$

що призводить до співвідношення:

$$D = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 2 - H. \quad (1.47)$$

Моделювання фрактальних сигналів для всього діапазону можливої зміни фрактальної розмірності $1 < D < 2$ зручно здійснювати за допомогою функції Вейерштрасса:

$$X(t) = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\left[1 - b^{2D-4}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^N b^{(D-2) \cdot n} \cdot \cos(2\pi \cdot s \cdot b^n t + \psi_n)}{\left[1 - b^{(2D-4)(N+1)}\right]}, \quad (1.48)$$

де σ – стандартне відхилення;

b, s – параметри просторово-частотного масштабування;

D – фрактальна розмірність, пов'язана з параметром Херста співвідношенням $D = 2 - H$;

$N + 1$ – кількість гармонік (при $N \rightarrow \infty$ функція Вейерштрасса є ідеальний математичний фрактал);

ψ_n – фаза, розподілена випадковим чином на інтервалі $[0, 2\pi]$; t – час.

1.2.3.4. Параметр Херста. Фізичний сенс. Персистентність і антиперсистентність. Введемо для функцій, що описують сигнали с певним значенням H в рамках моделі УБР, позначення $X_H(t)$ більш зручне з точки зору порівняння сигналів.

На рис. 2.2 зображені графіки функцій X_H , розраховані при різних значеннях параметра Херста с допомогою виразу (1.48). З цього рисунка добре видно, що параметр H характеризує ступінь порізаності досліджуваного графіка. При малих H графік сильно порізаний, а при великих H має вельми плавний (хоча і не гладкий) характер.

Параметр Херста H може бути виражений через розмах R змін значень досліджуваного сигналу на відрізку часу Δt і розраховане для цього відрізка стандартне відхилення S :

$$H = \ln(R/S)/\ln(\Delta t). \quad (1.49)$$

При цьому розмах R визначається як

$$R = \max X_H(t) - \min X_H(t) \quad (1.50)$$

В останньому співвідношенні моменти часу t належать інтервалу Δt .

Якщо $H \neq 1/2$, то сигнали, які описуються моделлю УБР, мають нескінченно великий час кореляції.

Вважаючи для зручності, що $\langle X_H(t) \rangle = 0$, можна показати, що функція кореляції майбутніх збільшень $X_H(t)$ з минулими $-X_H(-t)$, нормована на дисперсію $X_H(t)$, дорівнює

$$C(t) = \frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1 \quad (1.51)$$

1.2.3.5. Зв'язок фрактальності зі спектральними характеристиками. Важливою характеристикою стохастичних сигналів (їх часто називають шумами) є спектральні залежності. Спектральні щільності потужності дуже часто підкоряються статичним законам з постійним показником β :

$$S(f) \propto f^{-\beta}, \quad (1.52)$$

де f – частота.

Білий шум характеризується статечним показником, рівним $\beta = 0$. На практиці часто зустрічається так званий рожевий шум (мерехтіння шум) із значенням $\beta = 1$. Шум зі значенням $\beta = 2$ називають коричневим, а зі значенням $\beta = 3$ – чорним. На рис. 1.7 показані характерні тимчасові структури сигналів, що відповідають зазначеним типам шумів. Для фрактальних сигналів показник β зв'язаний з параметром Херста простим співвідношенням:

$$\beta = 2H + 1. \quad (1.53)$$

З останнього співвідношення видно, що фрактальні сигнали, що описуються броунівськими моделями ($0 < H < 1$), характеризують показником β , що лежить в області $1 < \beta < 3$.

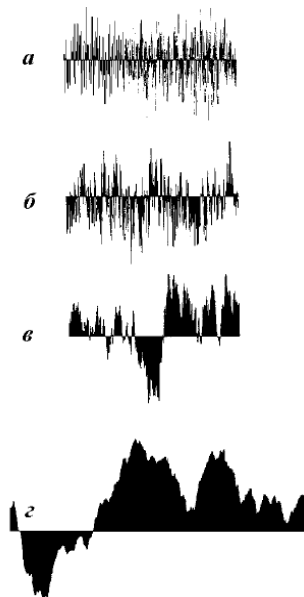


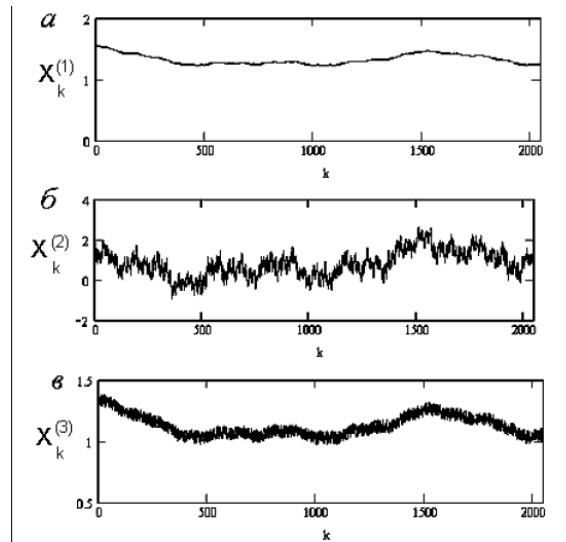
Рисунок 1.7 – Часова структура білого (а), рожевого (б), коричневого (в), і чорного (г), шумів

Відповідний класичній броунівській моделі сигнал ($H = 0,5$) відноситься до класу коричневих шумів ($\beta = 2$). Зі співвідношення (1.52), а також безпосередньо з форми сигналів на рис. 1.7 видно, що при переході від білого шуму до

відповідно рожевому, коричневому і чорному шумів все більш виразно спостерігається прояв персистентності.

1.2.3.6. Приклади аналізу сигналів. Фрактальний аналіз сигналів проводиться в тих випадках, коли необхідно встановити, якою мірою в їх поведінці проявляються фрактальні ознаки. При цьому в якості критерію наявності у сигналів фрактальних властивостей виступає здійсненність залежностей (1.2.3.4) і (1.2.3.5), які характеризують поведінку дельта-дисперсії і структурної функції. Якщо побудовані в подвійному логарифмічному масштабі графіки залежності дельта-дисперсії сигналу і його структурної функції від величини збільшення часу добре апроксимуються прямою в великому діапазоні зміни тимчасових збільшень (починаючи від найменших збільшень), можна говорити про фрактальності досліджуваного сигналу. За тангенсом кута нахилу прямої визначають величину $2H$ (якщо аналізується поведінка дельта-дисперсії) або H (якщо розглядається хід структурної функції). За встановленим значенням параметра Херста H легко визначається фрактальна розмірність D ($D = 2 - H$). Інтервал, в межах якого графіки дельта-дисперсії і структурної функції добре апроксимуються прямою, визначає ширину області скейлінга.

Розглянемо це на прикладі обробки модельних сигналів. Оскільки на практиці обробку сигналів в тій чи іншій програмному середовищі зручніше проводити за допомогою індексованих функцій, перейдемо від функцій $X(t)$ до індексованих функцій X_k . (Час t пов'язано з індексом $k = 1, 2, 3, \dots$ співвідношенням $t = k \cdot \Delta t$, де Δt – часовий інтервал між значущими точками сигналу). Графіки модельних сигналів наведені на рис. 1.8.



а – сигнал $X_k^{(1)}$ с $D_1 = 1,1$; б – сигнал $X_k^{(2)}$ с $D_2 = 1,8$;

в – сигнал $X_k^{(3)}$, $X_k^{(3)} = X_k^{(1)} + X_k^{(u)}$.

Рисунок 1.8 – Структура модельних сигналів

Сигнали $X_k^{(1)}$ і $X_k^{(2)}$ побудовані за допомогою функцій Вейєрштрасса (вираз (1.48)) для значень фрактальної розмірності $D_1 = 1,1$ і $D_2 = 1,8$ відповідно. Сигнал $X_k^{(3)}$ є сигнал $X_k^{(1)}$, на який накладено шум, описуваний функцією $X_k^{(u)} = 0,1 \cdot \frac{rnd(k)}{k}$. Побудовані в подвійному логарифмічному масштабі графіки, що характеризують поведінку структурних функцій S_n сигналів $X_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), наведені на рис. 1.9. Структурні функції обчислювалися відповідно до виразу:

$$S_n^{(m)} = E \left[\left| X_{k+n}^{(m)} - X_k^{(m)} \right| \right] = \frac{1}{k-n} \sum_{k=1}^{k-n} \left| X_{k+n}^{(m)} - X_k^{(m)} \right|. \quad (1.54)$$

По осі ординат відкладена величина $L_n^{(m)} = \log_2 \left(S_n^{(m)} \right)$, а по осі абсцис – $\log_2 n$. Усереднення в (1.54) проводиться за всіма значеннями k .

На рис. 1.9 також наведені функції $f_n^{(m)}$, що представляють лінійну апроксимацію залежностей $L_n^{(m)}$: пунктир – функції $f_n^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$.

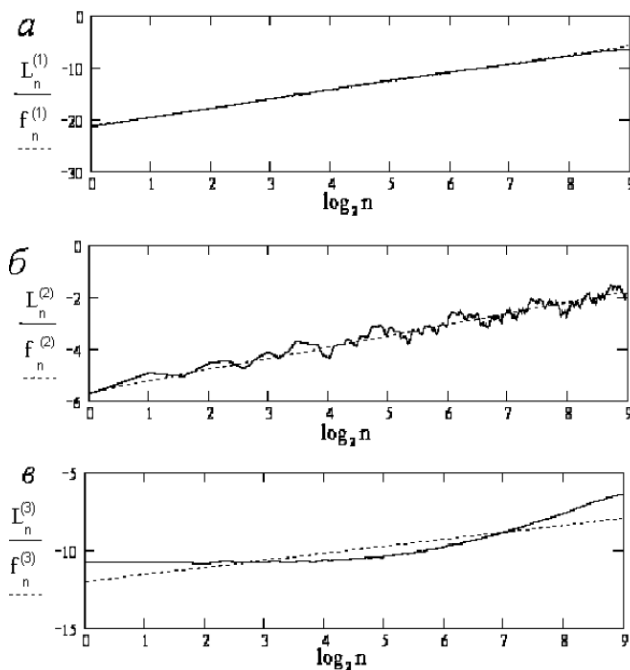


Рисунок 1.9 – Графіки функції $L_n^{(m)}$

Добре видно, що величини $L_n^{(1)}$ і $L_n^{(2)}$, відносяться до сигналів $X_k^{(1)}$ і $X_k^{(2)}$, добре апроксимуються лінійними залежностями в широкому діапазоні зміни n .

Цей результат підтверджує факт фрактальності сигналів, описуваних за допомогою функцій Вейерштрасса. Певні з тангенса кута нахилу графіків функцій $f_n^{(1)}$ та $f_n^{(2)}$ параметри Херста виявляються рівними $H = 0,86$ і $H = 0,21$. Відповідні їм фрактальні розмірності рівні $D_1 = 1,14 \pm 0,03$ і $D_2 = 1,79 \pm 0,05$ (зазначені помилки в значеннях фрактальних розмірностей отримані в результаті усереднення значень розмірності по різних реалізаціям функції Вейерштрасса (вираз (1.48)), що відрізняються випадковим набором фаз ψ_n). Середні розмірності дуже близькі заданим значенням ($D_1 = 1,1$ і $D_2 = 1,8$), що задаються при побудові залежностей $X_k^{(1)}$ і $X_k^{(2)}$.

Графік функції $L_n^{(3)}$ (рис. 1.9, в) кардинальним чином відрізняється від графіків залежностей $L_n^{(1)}$ і $L_n^{(2)}$ і погано апроксимується лінійною залежністю. Тим самим можна стверджувати, що в заданому діапазоні зміни значень n , сигнал $X_k^{(3)}$ не володіє фрактальними ознаками[15].

1.2.3.7. Використання мультифракталів. Реальні фізичні об'єкти і сигнали, які володіють ознаками самоподібності, інколи можуть бути описані за допомогою лише однієї величини фрактальної розмірності. Саме тому останнім часом набув великого поширення аналіз, заснований на теорії мультифракталів - неоднорідних фрактальних об'єктів. Поняття мультифрактала надає нові великі можливості фрактального аналізу складних стохастичних процесів. Для характеристики мультифрактала недостатньо однієї величини, його фрактальної розмірності, а необхідний нескінченний спектр таких розмірностей. Ідея мультифрактального аналізу полягає в розкладанні досліджуваного безлічі зі складною статистикою по множинам однорідних фракталів з чітко вираженою фрактальною розмірністю. При цьому мультифрактальний аналіз може привести до нетривіальним результатам в застосуванні не тільки до самоподібним об'єктів з фрактальної геометрії.

Дамо загальне визначення мультифрактала. Розглянемо фрактальний об'єкт, що займає певну обмежену область ζ розміру L в Евклідовому просторі з розмірністю d . Нехай на якомусь етапі його побудови він представляє собою безліч з $N \gg 1$ точок, як-то розподілених в цій області. Будемо припускати, що, в решті-решт, $N \rightarrow \infty$.

Розіб'ємо всю область ζ на кубічні комірки зі стороною $\varepsilon \ll L$ і об'ємом ε^d . Далі нас будуть цікавити тільки зайняті комірки, в яких міститься хоча б одна точка. Нехай номер зайнятих комірок i змінюється в межах $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, де $N(\varepsilon)$ – сумарна кількість зайнятих комірок, яке, звичайно, залежить від розміру комірки ε .

Нехай $n_i(\varepsilon)$ є кількістю точок в комірці з номером i , тоді величина:

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N} \quad (1.55)$$

являє собою ймовірність того, що навмання взята точка з нашого безлічі знаходиться в комірці. Іншими словами, ймовірності характеризують відносну заселеність комірок. З умови нормування ймовірності випливає, що

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1. \quad (1.56)$$

Стандартний метод мультифрактального аналізу заснований на розгляді узагальненої статистичної суми $Z(q, \varepsilon)$, в якій показник ступеня q може приймати будь-які значення в інтервалі $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \quad (1.57)$$

Спектр узагальнених фрактальних розмірностей D_q (розмірностей Рен'ї), що характеризують розподіл точок в області ζ , визначається за допомогою співвідношення:

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (1.58)$$

де нелінійна функція $\tau(q)$ має вигляд:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}. \quad (1.59)$$

Як ми покажемо нижче, якщо $D_q = D = const$, тобто не залежить від q , то данна безліч точок являє собою звичайний фрактал, який характеризується лише однією величиною – фрактальною розмірністю D . Навпаки, якщо функція D_q якось змінюється з q , то розглянута безліч точок є мультифракталом.

Таким чином, мультифрактала в загальному випадку характеризується скейлінговою експонентою $\tau(\varepsilon)$, що визначає поведінку статистичної суми $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (1.60)$$

Розглянемо, як веде себе узагальнена статистична сума в разі звичайного регулярного фрактала з фрактальною розмірністю D . В цьому випадку у всіх зайнятих осередках міститься однакова кількість точок:

$$n_i(\varepsilon) = \frac{N}{N(\varepsilon)}. \quad (1.61)$$

Тобто фрактал є однорідним. Тоді очевидно, що відносні населеності всіх комірок, $p_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, теж однакові, і узагальнена статистична сума має вигляд:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon). \quad (1.62)$$

Врахуємо тепер, що, згідно з визначенням фрактальної розмірності D , число зайнятих комірок при досить малому ε поводить наступним чином:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}. \quad (1.63)$$

(Підставляючи це в формулу (1.62) і порівнюючи з (1.60), приходимо до висновку, що в разі звичайного фрактала функція

$$\tau(q) = (q-1)D, \quad (1.64)$$

тобто є лінійною. Тоді все $D_q = D$ і справді не залежать від q . Для фрактала, все узагальнені фрактальні розмірності D_q якого збігаються, часто використовується термін монофрактал.

Якщо розподіл точок по осередках неоднаково, то фрактал є неоднорідним, тобто вдає із себе мультифрактала, і для його характеристики необхідний цілий спектр узагальнених фрактальних розмірностей D_q , число яких, в загальному випадку, нескінченно.

Так, наприклад, при $q \rightarrow +\infty$ основний внесок в узагальнену статистичну суму (1.57) вносять комірки, які містять найбільше число частинок n_i в них, що характеризуються найбільшою ймовірністю їх заповнення p_i . Навпаки, при $q \rightarrow -\infty$ основний внесок в суму (1.57) дають самі розріджені комірки з малими значеннями заповнення p_i . Таким чином, функція D_q показує, наскільки неоднорідним є досліджувана безліч точок ζ .

З'ясуємо тепер, який фізичний зміст мають узагальнені фрактальні розмірності D_q для деяких конкретних значень q . Так, при $q = 0$ з виразу (1.57) випливає, що

$$Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon). \quad (1.65)$$

З іншого боку, відповідно до формул (1.58) і (1.60):

$$Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}. \quad (1.66)$$

З'єднавши ці два рівності, ми приходимо до співвідношення $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}$. Це означає, що величина D_0 являє собою звичайну хаусдорфову розмірність безлічі ζ . Вона є найбільш грубої характеристикою мультифрактала.

З'ясуємо тепер сенс величини D_1 . Оскільки при $q = 1$, в силу умови нормування ймовірності (1.56), статистична сума дорівнює

$$Z(1, \varepsilon) = 1, \quad (1.67)$$

то $\tau(1) = 0$. Таким чином, ми маємо невизначеність у виразі (1.58) для D_1 . Розкриємо цю невизначеність за допомогою очевидної рівності:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i]. \quad (1.68)$$

Тепер, спрямовуючи $q \rightarrow 1$, розкладаючи експоненту і враховуючи умову нормування (1.56), отримуємо:

$$Z(q \rightarrow 1, \varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1) p_i \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (1.69)$$

В результаті приходимо до наступного виразу:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}. \quad (1.70)$$

З точністю до знаку чисельник в цій формулі являє собою ентропію фрактальної безлічі $S(\varepsilon)$:

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (1.71)$$

Оскільки ентропія є мірою кількості інформації, необхідної для визначення системи в деякому положенні i , можна сказати, що величина D_1 характеризує інформацію, необхідну для визначення місця розташування точки в деякій комірці. Завдяки цій властивості величину D_1 називають інформаційною розмірністю.

Розглянемо тепер узагальнену фрактальну розмірність D_2 . Для неї справедливо:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon}. \quad (1.72)$$

Величина D_2 тісно пов'язана з поведінкою так званого кореляційного інтеграла, що визначається виразом:

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \theta(\varepsilon - |r_n - r_m|). \quad (1.73)$$

Тут підсумовування проводиться по всіх парах точок нашої фрактальної безлічі з радіус-векторами r_n і r_m ; $\theta(x)$ – ступінчаста функція Хевісайда, $\theta(x) = 1$, якщо $x \geq 0$ і $\theta(x) = 0$, якщо $x < 0$. Сума в вираженні (1.73) визначає число пар точок n, m , для яких відстань між ними менше, ніж ε . Тому, поділена на N^2 , вона визначає ймовірність того, що дві навмання взяті точки розділені відстанню меншим, ніж ε .

Цю ж ймовірність можна визначити і по-іншому. Величина, згідно своїм визначенням (1.55), являє собою ймовірність попадання точки в i -ту комірку з

розміром ε . Отже, величина p_i^2 являє собою ймовірність попадання в цю комірку двох точок. Підсумовуючи p_i^2 по всім зайнятим осередкам, отримуємо ймовірність того, що дві довільно вибрані точки з безлічі ζ лежать всередині однієї комірки з розміром ε . Отже, відстань між цими точками буде менше або порядку ε . Таким чином, з точністю до чисельних коефіцієнтів, беручи до уваги рівність (1.72), отримуємо.

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{D_2}. \quad (1.74)$$

Звідси видно, що узагальнена розмірність D_2 визначає залежність кореляційного інтеграла $I(\varepsilon)$ від ε в межі $\varepsilon \rightarrow 0$. З цієї причини величину D_2 в літературі називають кореляційною розмірністю.

Не зупиняючись детально на характеристиці узагальненої фрактальної розмірності D_q для довільного показника ступеня q , зазначимо лише на те, що вона завжди монотонно убиває (або, в крайньому випадку, залишається постійною) з ростом q .

$$D_q \geq D_{q'}, \text{ при } q' > q. \quad (1.75)$$

Знак рівності має місце, наприклад, для однорідного фрактала. Максимального значення $D_{\max} = D_{-\infty}$ величина D_q досягає при $q \rightarrow -\infty$, а максимального $D_{\max} = D_{\infty}$ при $q \rightarrow \infty$.

Як приклад розрахунку спектра узагальнених фрактальних розмірностей наведемо розрахунок спектра розмірностей для неоднорідної канторівської множини. На n кроці процедури побудови цієї множини узагальнена сума (1.57) має вигляд звичайного бінома Ньютона:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n C_n^m (p_1^{n-m} p_2^m)^q = (p_1^q + p_2^q)^n. \quad (1.76)$$

Число сполучень $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Оскільки на цьому етапі розмір комірки $\varepsilon = 3^{-n}$, то на підставі співвідношення (1.60) приходимо до наступного рівняння для спектру узагальнених фрактальних розмірностей D_q .

$$(p_1^q + p_2^q)^n \approx \left(\frac{1}{3}\right)^{n\tau(q)}. \quad (1.77)$$

Спрямовуючи $n \rightarrow \infty$ з урахуванням визначення $\tau(q)$, знаходимо:

$$D_q = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3}. \quad (1.78)$$

Якщо $p_1 = p_2 = 1/2$, то ми маємо однорідний фрактал, все узагальнені фрактальні розмірності D_q якого однакові і рівні хаусдорфовій розмірності вихідної канторівської безлічі виключених середніх третин:

$$D_q = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \quad (1.79)$$

Якщо ж $p_1 \neq 1/2$, то канторовська множина є неоднорідною.

1.3 Оцінка приведених методів

Завдання, які вирішуються на основі вейвлет-перетворення, можна розділити на завдання аналізу (розкладання сигналу на складові і визначення

коефіцієнтів цього розкладу) і завдання синтезу – реконструкції сигналу або процесу навантаження без втрати інформації.

До перспективних проблем і практичних завдань, що ефективно вирішуються за допомогою вейвлет-перетворення можна віднести наступні завдання:

- завдання аналізу і класифікації процесів;
- ефективна характеристика істотно нестационарних процесів;
- аналіз динаміки часових рядів і пророкування процесів;
- придушення шумів (фільтрація), яка досягається розкладанням сигналу на складові, відкиданням шумовий складової (нижче певного порогу) і реконструкцією очищеного від шумів сигналу;
- розпізнавання сигналів (мови, образів), створення штучного зору для роботів;
- ефективне стиснення даних без втрати інформації;
- завдання діагностики в медицині і техніці.

Фрактальний аналіз дозволяє оцінити ступінь самоподібності об'єкта або циклічність процесу. Мультифрактальний підхід дозволяє розділити досліджуваний об'єкт на частини, кожна з яких має властивості самоподібності і таким чином використовувати теорію практично до будь-якого типу даних. При аналізі слабких або зашумлених сигналів в радіоелектроніці або фізики, фрактальний аналіз дозволяє усунути вплив перешкод в радіолокації, виявити особливості поверхонь різної природи.

Фрактальний аналіз застосовується при побудові систем захисту інформації. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфу місцевості і поверхні моря.

Фрактальний аналіз відноситься до методів, що застосовуються для аналізу часових рядів процесів і зображень, в тому числі для класифікації об'єктів при радіолокації [16]. Одним із завдань роботи є розробка моделі ідентифікації оптичних систем на основі фрактального аналізу, які розглянуті в наступному розділі.

2 РОЗВИТОК ФРАКТАЛЬНИХ МЕТОДІВ КЛАСИФІКАЦІЇ І ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ

До широкого кола завдань інформаційної безпеки, збереження комерційної таємниці, відноситься задача захисту від несанкціонованої відео- та фотозйомки.

Доступність сучасних засобів прихованого відеоспостереження, як в технічному, так і в економічному планах, привела до їх повсюдного поширення. Зменшення розмірів відеокамер поєднується з поліпшеннями характеристик переданого зображення.

Крім того поява бездротових камер, які можуть включатися дистанційно, значно ускладнює проблему їх пошуку. Фактично, сучасну шпигунську відеокамеру можна встановити в будь-який предмет інтер'єру, одягу, електроприлад, або побутової техніки.

Передача конфіденційної інформації може здійснюватися на відстань до кількох сотень метрів. В таких умовах наявність інструменту пошуку прихованого відеоспостереження і вміння ними скористатися стає важливим питанням.

Пошук здійснюється за допомогою лазерних оптоелектронних систем, що дозволяють визначити місце розташування прихованих оптичних приладів – біноклів, лазерних далекомірів, відео- і фотокамер, приладів нічного бачення.

Детектування засноване на властивості зворотного відображення спрямованого випромінювання оптичної системою об'єктив – ПЗС матриця прихованої оптики. Фільтрація монохромного випромінювання дозволяє відокремлювати природні відблиски інших джерел світла. Відомий пристрій виявлення оптоелектронних об'єктів, описаний в патенті RU 2349929. Схеми такого приладу приведена на рис. 2.1.

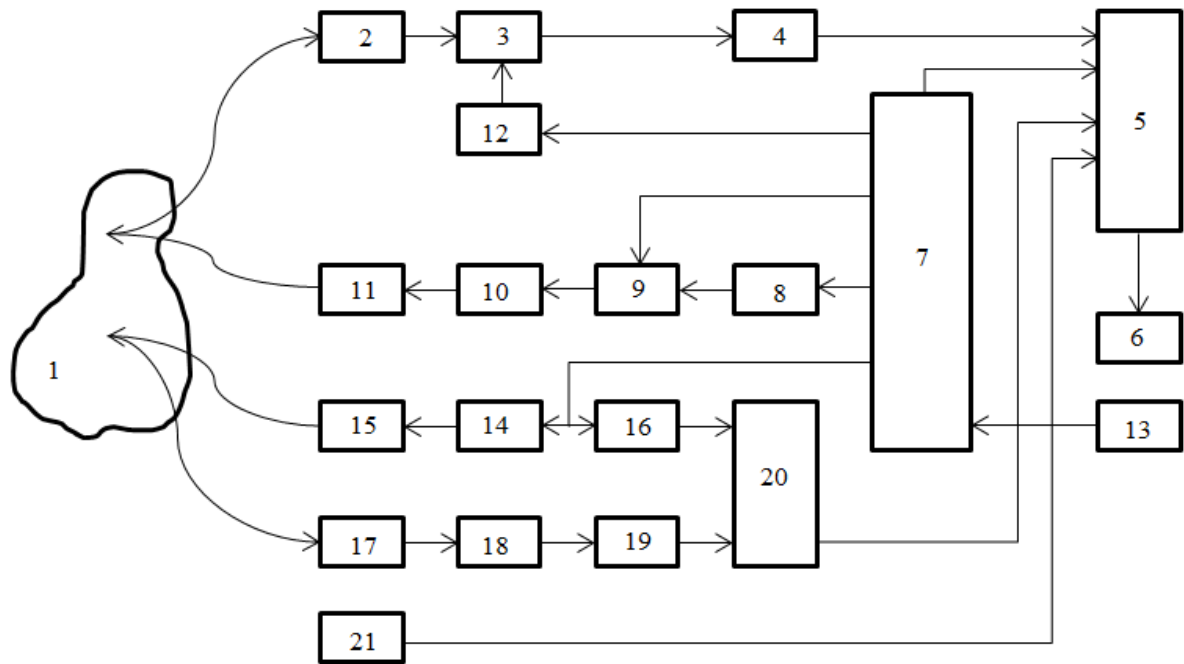


Рисунок 2.1 – Схема приладу для пошуку прихованої оптики

Конструкційними елементами приладу є: 2 – об'єктив з інтерференційним світлофільтром (λ_1); 3 – електронно-оптичний перетворювач (ЕОП); 4 – фотоприймач з об'єктивом на вході, виконаний телевізійним; 5 – блок обробки; 6 – блок відеоспостереження; 7 – синхрогенератор; 8 – дільник кадрової частоти; 9 – модулятор; 10 – імпульсний лазер працюючий на довжині випромінювання λ_1 ; 11 – об'єктив; 12 – блок затворних імпульсів; 13 – пульт управління; 14 – лазер працюючий на довжині випромінювання λ_2 ; 15 – об'єктив; 16 – формувач імпульсів; 17 – об'єктив з інтерференційним світлофільтром (λ_2); 18 – фотоприймач; 19 – блок виділення зворотного сигналу виявленого об'єкту; 20 – блок формування сигналу; 21 – електронний компас, також позначена зона сканування – 1.

Виявлення об'єкта проводиться методом послідовного візуального аналізу зображень на екрані монітора. Недоліком даного пристрою є досить великий час, що витрачається на пошук об'єкта при перегляді зондуючого простору.

Мішень підсвічується лазерним випромінюванням. Його частина що повертається як розсіяне випромінювання надходить на світлочутливий приймач.

Для розширення спектру об'єктів пошуку в одному пристрої можуть використовуватися кілька лазерів.

Деякі характеристики такого пристрою приведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Характеристики приладу для пошуку прихованої оптики

Максимальна дальність виявлення	1200 м
Мінімальна дальність виявлення	0,5 м
Робоча температура	від -10°C до +40°C
Напруга джерела електроживлення:	
від мережі	100 – 240 В
від акумуляторної батареї	9 – 36 В
Діаметр вихідного окуляра	30 мм
Діапазон фокусування	від 0,5 м

Імпульсний режим роботи лазера дозволяє визначати дальність до об'єкту, а також працювати в режимі стробування, виключаючи перешкоди від розсіювання в ближній зоні. Тому прилад може працювати при поганих погодних умовах і навіть крізь рослинність.

Оптичний спосіб пошуку обладнання прихованого відеоспостереження має певні переваги і недоліки. До безперечних плюсів можна віднести універсальність приладів. Недоліком вважається можливість надавати протидію оптичним детекторам за допомогою спеціальних світлофільтрів, які відсівають світлові хвилі певної довжини.

Ще одним суттєвим недоліком є те, що пошуковий прилад фіксуватиме відображення всіх елементів, що потрапили в поле його зору. Щоб відсіяти недостовірну інформацію прилади обладнуються системами фільтрації.

Як правило, використовується фільтр, що пропускає інфрачервоне випромінювання. У поєднанні зі спеціально підібраними параметрами світлодіодного підсвічування або лазерного променя, це дозволяє з високою достовірністю виявляти приховані об'єкти.

Вирішенням цієї проблеми є сучасний топологічний аналіз. Який розглядається як перспективний напрямок розвитку теорії дослідження нелінійних динамічних систем, що є інструментом аналізу нелінійної метрології [17 – 18]. Застосовуються різні топологічні методи, зокрема фрактальний аналіз [19].

При проведенні фізичних досліджень фрактальні ознаки можуть бути виявлені в структурі сигналів і полів, поведінці функцій, що характеризують розподіл фізичних величин в часі і просторі.

Для визначення D ряду $\{x_i\}$ (де x_i – i -е значення величини x , $i=1, \dots, n$) використовується метод нормованого розмаху, виведений емпіричним шляхом П. Херстом [20]. Аналіз ряду $\{x_i\}$ дозволяє отримати показник Херста H , пов'язаний з D :

$$D = 2 - H. \quad (2.1)$$

Значення показника Херста знаходяться в інтервалі $0 \leq H \leq 1$ і визначаються через відношення R/σ , де R – розмах між максимальним і мінімальним значеннями функції збільшення $x(i, n)$, величина σ – середнє квадратичне відхилення:

$$R = \max_{1 \leq i \leq n} x(i, n) - \min_{1 \leq i \leq n} x(i, n); \quad x(i, n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i), \quad (2.2)$$

де \bar{x}_i – середнє арифметичне значень $\{x_i\}$.

Співвідношення R/σ пов'язано з параметром H виразом:

$$R/\sigma = (n/2)^H. \quad (2.3)$$

З формул (2.1) – (2.3) можна отримати значення фрактальної розмірності, як всього інтервалу спостережень, так і його окремих ділянок, визначити характер динаміки x , як на окремих тимчасових інтервалах, так і в період спостереження в цілому. Для класифікації динаміки x створюється фрактальна шкала з точками 1, 1,5, 2: при $D = 1$ динаміка x строго детермінована; при $D = 2$ величина x поводить себе регулярним чином, але розкид вимірюваних значень дуже великий; при $D = 1,5$ динаміка випадкова. Якщо $1 < D < 1,5$ або $1,5 < D < 2$ досліджуваний процес є не марківським, хаотичним, персистентним і антиперсистентним відповідно.

Знання фрактальної розмірності ряду дозволяє оцінити характер поведінки об'єкта вимірювання (або структури сигналу) і вибрати відповідний математичний апарат обробки результатів вимірювання.

На основі фрактальних уявлень про структуру сигналів може бути запропонована топологічна модель ідентифікації оптичної пристрої спостереження (ОПС). Завдання ідентифікації обумовлено необхідністю пошуку ОПС серед безлічі можливих «помилкових» цілей, що відбивають світло.

Характерною особливістю ОПС є те, що на заломлюючі і відбиваючі поверхні оптичних деталей наносять покриття, що представляють собою тонкі плівки різних речовин: металів і їх оксидів, діелектриків, кремній органічних сполучень і ін. Це дозволяє змінювати оптичні характеристики деталей і надавати їм нові фізичні властивості.

На лінзи оптичних приладів наносяться покриття, що просвітлюють, матеріал і товщина яких вибираються таким чином, що б пропускати випромінювання видимого діапазону. Практично не відображаються хвилі, для яких виконується умова:

$$\lambda = 4dn, \quad (2.4)$$

де d – товщина плівки;

n – її показник заломлення.

У разі багат шарового покриття розглядають діапазон довжин хвиль, $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$, що задовольняють умові (2.4). Випромінювання з довжинами хвиль, що не входять в цей діапазон, відображаються. При цьому, внаслідок накладення випромінювання, відбитого від різних шарів покриття спостерігається інтерференція в відбитих променях [21].

Наявність у відбитому оптичному сигналі слідів його взаємодії з покриттям призводить до можливості ідентифікації ОПС. Як об'єкт дослідження розглянемо площу перетину лазерного пучка відбитого від поверхні, покритої тонкою плівкою. Аналіз площі перетину пучка виконується за допомогою ПЗС-камери з лінійним об'єктивом, що входить до складу лазерних оптоелектронних систем. Камера дозволяє досліджувати розподіл інтенсивності випромінювання уздовж обраної осі на площині.

Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині апроксимуємо виразом вигляду:

$$I_{int}(x) = I_0 \cos^2(kx), \quad (2.5)$$

де I_0 – максимальне значення інтенсивності;

k – хвильове число [42].

Функція розподілу інтенсивності $I(x)$ (2.5) є об'єктом фрактального аналізу (2.1 – 2.3). Розглянемо випадок лінійного розподілу інтенсивності: $I(x) = I_0 \times j$, де j – номер вимірювання значення інтенсивності $j = 1 \dots m$. Розмах R і дисперсія σ , обчислені для функції збільшення, рівні відповідно:

$$R = \frac{I_0}{8} m^2, \quad \sigma = \frac{I_0}{2\sqrt{3}} \sqrt{m(m+1)}. \quad (2.6)$$

З виразу (2.3) випливає:

$$H = \ln(R / \sigma) / \ln(m / 2). \quad (2.7)$$

Залежність R/σ від m набуде вигляду:

$$\ln(R / \sigma) = \ln(\sqrt{3} / 4) + \ln(m) + \ln(1 - 1 / 2m). \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) в (2.7) отримаємо, що для прямої лінії і великих віділків:

$$H = \lim_{m \rightarrow \infty} [\ln(R / \sigma) / \ln(m / 2)] = 1. \quad (2.9)$$

Отже, значення фрактальної розмірності (2.1) $D = 1$. Аналогічний результат можна отримати для будь-якої гладкої кривої, наприклад, для синусоїди з періодом, порівняним з m . При аналізі реальних сигналів, представлених у вигляді двовимірних графіків $I(x)$, параметр D характеризує ступінь порізаних графіка $I(x)$: при великих значеннях D графік сильно порізаний, а при малих – має плавний, але не гладкий характер.

Вираз (2.5) описує гладку, безперервну криву. Згідно (2.6) – (2.9) фрактальна розмірність функції (2.5) дорівнює 1. Однак, в реальних умовах. сигнал, внаслідок дії перешкод інтенсивності $I_N(x)$, надійде в об'єktiv ПЗС у вигляді, відмінному від (2.5). Припускаючи, що зв'язок сигналу і шуму носить адитивний характер, уявімо результуючий сигнал $I_{Rez}(x)$ у вигляді:

$$I_{Rez}(x) = I_{Int}(x) + I_N(x). \quad (2.10)$$

Це призведе до збільшення значення фрактальної розмірності на величину ΔD . Внаслідок стохастичною природи перешкод, їх фрактальна розмірність вище фрактальної розмірності корисного сигналу. Експерименти показують, що при співвідношенні сигнал/шум $q_0^2 = -3$ дБ приріст фрактальною розмірності

ΔD становить 0,1–0,3 [40]. Тому, значення фрактальної розмірності сигналу (2.10) можна оцінити, як $1,1 \leq D \leq 1,3$. При відображенні імпульсу від поверхні без просвітлюючого покриття, в сигналі (2.10) відсутня інтерференційна компонента I_{int} , і сигнал буде стохастичним, для якого $D = 1,5$.

Фрактальна розмірність не єдиний інструмент фрактального аналізу та її значення здатне відповісти на обмежене коло питань, в рамках поставленого завдання – ідентифікація ОПН. Для відповіді на питання про тип ОПН, її недостатньо. Для ідентифікації та класифікації ОПН необхідним буде розроблений ансамбль фрактальних ознак конкретних ОПН.

ВИСНОВКИ

В даній роботі були розглянуті та проаналізовані методи оптичної ідентифікації та розпізнавання образів, що найбільш відповідають сьгоднішнім перспективам розвитку розпізнавання образів та об'єктів, а саме: кореляційний метод, метод вейвлет-аналізу та метод фрактального аналізу.

Розібрані типові постановки задач класифікації об'єктів: завдання ідентифікації; віднесення об'єкта до того чи іншого класу; розподіл заданого набору об'єктів на класи (класифікація).

В другій частині цієї роботи були запропоновані можливі напрямки розвитку оптичних систем ідентифікації та розпізнавання образів.

Проведено аналіз принципу розпізнавання образів для знаходження прихованих оптичних систем спостереження: біноклів, лазерних далекомірів, відео- і фотокамер, приладів нічного бачення. В ході якого були виявлені певні труднощі. Одна з яких є можливість виділення потрібного об'єкту на фоні всіх елементів, що потрапили в поле його зору.

Для класифікації типу оптичного приладу, поряд з фрактальною розмірністю, повинен бути розроблений ансамбль фрактальних ознак: вид фрактальних сигнатур, вид просторового спектра і значення просторових частот, що характеризують структуру сигналу. На основі моделі ідентифікації оптичних приладів спостереження розроблена система ідентифікації оптичних приладів спостереження, що дозволяє визначати дистанцію і координати цілі, а також виконувати її ідентифікацію.

У роботі представлена модель пошуку та ідентифікації прихованих оптичних систем спостереження. Модель заснована на фрактальних уявленнях про структуру оптичного сигналу і визначенні фрактальної розмірності розподілу інтенсивності в площині перетину відбитого від цілі лазерного імпульсу. Показано, що наближення значення фрактальної розмірності до одиниці є передумовою до ідентифікації цілі, як оптичного приладу спостереження.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Дж. Ту, Р. Гонсалес. Принципы распознавания образов – Москва: Мир, 1978. 390 с.
2. Jing H. Optical implementation of parallel fuzzy logic using a single electron trapping device// Optic (Stuttgart), 1999. V. 110, P. 471 – 475.
3. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145 – 1170.
4. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. Москва: Мир, 2005.
5. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования: учеб. пособие. НГТУ, 2003. 104 с.
6. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. Москва: ДМК, 2005.
7. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. 1984. Vol. 15, №. 4. P. 723 – 736.
8. Ghanem R., Romeo F. A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems // Journal of Sound and Vibration. 2000. Vol. 234, № 7. P. 27.
9. Kiran S.R. LTI system identification using wavelets // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2009. Vol, 10, №. 1. P. 1 – 8.
10. Shi H., Cai Y., Qiu Z. Improved system identification approach using wavelet networks // Journal of Shanghai University (English Edition). 2005. Vol. 9, №. 2. P. 159 – 163.
11. Carrier J.F., Stephanopoulos G. Wavelet-based modulation in control-relevant process identification // AIChE Journal. 1998. Vol. 44, №. 2. P. 341 – 360.
12. Frazier M. An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra. Springer, 1999.
13. Ljung L. System Identification: Theory for the User, 1999.

14. Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Мир, 1982. 831 с.
15. П.В. Короленко, М.С. Маганова, А.В. Меснянкин. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие – М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, 2004. 82 с.
16. Новейшие методы обработки изображений. / Под ред. А. А. Потапова. Москва.: Физмат-лит, 2008. 496 с.
17. Мачехин Ю.П., Курской Ю.С. Основы нелинейной метрологии. LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 162 p.
18. Machehkhin Yu. Kurskoy Yu. Fractal-entropy analysis of measurement results in nonlinear dynamical systems // Measuring technique. 2014. Vol. 57. № 6. P. 609 – 704.
19. Lu L., Joannopoulos J.D., Solia M. Topological photonics // Nature Photonics. 2014. V. 8. P. 821–829.
20. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Постмаркер, 2000. 352 с.
21. Ландсберг Г.С. Оптика. 6-е изд., стереот. Москва: Физматлит, 2003. 848 с.