УДК 681.327.63

А. В. ТОВАРНИЦКИЙ, канд. техн. наук, *В. Н. ГАПОНЕНКО*

МЕТОДИКА АНАЛИЗА СТРУКТУРЫ КОДОВ НА ОСНОВЕ КОМБИНАТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

При передаче двоичной информации по каналам связи и ее обработки важнейшую функцию выполняют системы синхронизации. Широкое распространение в настоящий момент получили системы синхронизации, работающие по огибающей информационного видеосигнала. Параметром, наиболее полно отражающим синхронизационные свойства для такого класса систем, является допустимый интервал между двумя соседними изменениями (перепадами) информационного сигнала [1]. На максимальную длительность этого интервала влияют величины максимальной расстройки по частоте генераторов приемника и передатчика, наличие помех в канале связи. Уменьшение интервала между моментами перепадов в информационном сигнале улучшает характеристики системы синхронизации, однако приводит к появлению межсимвольной интерференции. С учетом этих противоречивых требований дальнейшее повышение характеристик систем синхронизации ведется по пути создания кодов, имеющих заданные структурные свойства [2].

В статье предлагается методика анализа двоичных кодов, используемых для систем передачи данных с применением аппарата комбинаторики, позволяющего определять количество кодовых комбинаций, получаемых в результате наложения на базовый код $c(n)$ ограничений на максимальную и минимальную длины серий. Аналогичная оценка производится в отношении построения кодов, не имеющих серий единиц длиной более одного элемента.

Рассмотрим n-разрядный двоичный код, на который накладывается ограничение в максимальной — m и минимальной — l длине серий. Очевидно, что $l \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant m$. Под длиной серии будем понимать количество одинаковых значений кода (0 или 1), следующих друг за другом без разрыва.

Определим количество комбинаций ($N(n)$) кода $C(n)$, которые останутся после наложения на этот код ограничений на длину серий, для чего найдем разложение базового кода $c(n)$ по количеству комбинаций, имеющих одинаковое количество серий $N^{(i)}$, где $i=\overline{1, n}$ — количество серий в комбинации:

$$N(n) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{2}{(k-2)!} \prod_{i=1}^{(k-1)} (n-i) \right]. \qquad (1)$$

Примем, что при $(k-1)=0 \rightarrow \prod_{i=1}^{(k-1)}(n-i)=1$. Так, например, для кода $n=8$ разложение (1) примет вид

$$N(8)=256=2^{(1)}+14^{(2)}+42^{(3)}+70^{(4)}+70^{(5)}+42^{(6)}+14^{(7)}+2^{(8)}, \quad (2)$$

где $\alpha^{(i)}$ — число комбинаций, имеющих в своем составе i серий, а вид всех комбинаций, имеющих, допустим, уже две серии, можно определять из разбиения числа 8 на два слагаемых без повторов

$$1)\ 8=7+1;\ 2)\ 8=6+2;\ 3)\ 8=5+3;\ 4)\ 8=4+4. \quad (3)$$

Вид комбинаций, аналоги которых представлены выше, отражены в табл. 1.

Таблица 1

Обозначения	Вид комбинаций	Обозначения	Вид комбинаций
1	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0	3	0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
2	0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0	4	1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1

Но эти же комбинации можно получить, используя формулу для определения количества перестановок из двух чисел без повторений. В этом случае

$$N^{(2)}_{(7+1)}=N^{(2)}_{(6+2)}=N^{(2)}_{(5+3)}=2\cdot P_2(1,\ 1)=4;\quad N^{(2)}_{(4+4)}=2\cdot P_2(2)=2, \quad (4)$$

где $P_n(i,\ \ldots,\ j)$ — число перестановок. Общее количество комбинаций, имеющих две серии для выбранного кода, равно

$$N^{(2)}=N^{(2)}_{(7+1)}+N^{(2)}_{(6+2)}+N^{(2)}_{(5+3)}+N^{(2)}_{(4+4)}=6\cdot P_2(1,\ 1)+2\cdot P_2(2)=14,$$

что соответствует (2).

Рассмотрим остальные члены ряда (2), для чего распишем каждый из них с учетом соотношений (4) с изменением формы записи $N^{(i)}_{(a+b)}$ на $N^{(i)}_{(a,\ b)}$

$$\begin{aligned}N_{(8)}&=N^{(1)}_{(8)}+N^{(2)}_{(7,\ 1)}+N^{(2)}_{(6,\ 2)}+N^{(2)}_{(5,\ 3)}+N^{(2)}_{(4,\ 4)}+N^{(3)}_{(6,\ 1,\ 1)}+\\&+N^{(3)}_{(5,\ 2,\ 1)}+N^{(3)}_{(4,\ 3,\ 1)}+N^{(3)}_{(4,\ 2,\ 2)}+N^{(3)}_{(3,\ 3,\ 2)}+N^{(4)}_{(5,\ 1,\ 1,\ 1)}+N^{(4)}_{(4,\ 2,\ 1,\ 1)}+\\&+N^{(4)}_{(3,\ 3,\ 1,\ 1)}+N^{(4)}_{(3,\ 2,\ 2,\ 1)}+N^{(4)}_{(2,\ 2,\ 2,\ 2)}+N^{(5)}_{(4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)}+N^{(5)}_{(3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)}+\\&+N^{(5)}_{(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1)}+N^{(6)}_{(3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)}+N^{(6)}_{(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)}+N^{(7)}_{(2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)}+\\&+N^{(8)}_{(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)},\end{aligned} \quad (5)$$

где $N^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$ — число комбинаций, состоящих из i серий длиной, соответственно в y_1, y_2 и y_j элементов, $y_j = \overline{1,\ 8}$.

Для точного определения количества комбинаций двоичного кода $C(n)$, имеющего ограничения на максимальную (m) и минимальную (l) длины серий необходимо в выражении (5) отбросить все члены $N^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$, у которых значения y_j не удовлетворяют условиям $l \leqslant y_j \leqslant m$. Предположим, что $m = 4$, $l = 3$, тогда выражение (5) примет вид $N(8, 4, 3) = N^{(2)}_{(4, 4)}$. С учетом соотношения (4) $N(8, 4, 3) = 2 \cdot P_2(2) = 2$. Запишем комбинации, отвечающие полученным результатам:

$$0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1;\quad 1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0$$

Усложним исходные данные: допустим $m=5$, $l=2$. В этом случае выражение (5) преобразуется в следующее выражение

$$N(8,\ 5,\ 2) = N^{(2)}_{(5,3)} + N^{(3)}_{(4,\ 2,\ 2)} + N^{(3)}_{(3,\ 3,\ 2)} + N^{(4)}_{(2,\ 2,\ 2,\ 2)} = \\ = 2 \cdot P_2(1,\ 1) + 4 \cdot P_3(1,\ 2) + 2 \cdot P_4(4) = 18.$$

Полученные таким образом комбинации занесены в табл. 2.

Таблица 2

Обозначения	Вид комбинации	Обозначения	Вид комбинации
$N^{(2)}_{(5,3)}$	0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0	$N^{(3)}_{(3,3,2)}$	1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0
	1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0		1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0
$N^{(3)}_{(4,2,2)}$	0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1	$N^{(4)}_{(2,2,2,2)}$	1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1
	0 0 1 1 1 1 0 0	$N^{(3)}_{(4,2,2)}$	1 1 0 0 0 0 1 1

Применим предложенную методику для оценки количества комбинаций, которые можно получить, накладывая на базовый код смещенные относительно элементов кода (0 или 1) ограничения. Проведем анализ кода, состоящего из серий нулей заданной длины $[l_0,\ m_0]$, разделенных одиночными единицами, две рядом стоящие единицы не допускаются, для чего в выражении (5) отбросим все члены $N^{(i)}(y_1, y_2 \ldots, y_i)$, у которых количество серий, состоящих из одного элемента (φ) не удовлетворяет ограничению $\varphi \geqslant (\frac{n}{2} - 1)$ для нечетного количества серий. и $\varphi \geqslant n/2$ — для четного количества серий. С учетом этого выражения (5) принимает вид

$$
\begin{aligned}
N_0(8) = {} & N_{0\,(8)}^{(1)} + N_{0\,(7,\,1)}^{(2)} + N_{0\,(6,\,1,\,1)}^{(3)} + N_{0\,(5,\,1,\,2)}^{(3)} + N_{0\,(1,\,3,\,4)}^{(3)} + \\
& + N_{0\,(5,\,1,\,1,\,1)}^{(4)} + N_{0\,(4,\,2,\,1,\,1)}^{(4)} + N_{0\,(3,\,3,\,1,\,1)}^{(4)} + N_{0\,(4,\,1,\,1,\,1,\,1)}^{(5)} + \\
& + N_{0\,(3,\,2,\,1,\,1,\,1)}^{(5)} + N_{0\,(2,\,2,\,2,\,1,\,1)}^{(5)} + N_{0\,(3,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1)}^{(6)} + \\
& + N_{0\,(2,\,2,\,1,\,1,\,1,\,1)}^{(6)} + N_{0\,(2,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1)}^{(7)} + N_{0\,(1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1,\,1)}^{(8)}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Методика вычисления количества комбинаций для кодов $C_0(n)$ основана на знании следующих правил:

Если число серий в комбинациях, определяемых членом $N_0^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$ четно, $j = 2, 4, \ldots, i$, то количество таких комбинаций равно

$$N_0^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j) = 2 \cdot P_z(x_1, x_2, \ldots, x_R), \qquad (7)$$

где z — общее количество серий нулей в комбинациях, x_R — количество серий нулей, имеющих одинаковую длину $y_1 = y_2 = \ldots = y_j = R$.

2. Если число серий в комбинациях, определяемых членом $N_0^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$ нечетно, $j = 1, 3, \ldots, i-1$, то количество таких комбинаций находится из выражения

$$N_0^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j) = P_s(x_1, x_2, \ldots, x_R) + P_{s-1}(x_1, x_2, \ldots, x_R), \qquad (8)$$

где $s = \frac{i+1}{2}$ — причем если количество y_j, имеющих единичную длину $\varphi < s$, то второй член суммы (8) отбрасывается.

3. Для любого двоичного кода имеются всего две комбинации, имеющие все серии единичной длины $\varphi = n$ и всего одна комбинация, состоящая из одной серии нулей.

Учитывая представленные правила, перепишем выражение (6) для кода $C_0(8)$:

$$
\begin{aligned}
N_0(8) = {} & 1 + 2 \cdot P_1(1) + [P_2(1,\ 1) + 1] + P_2(1,\ 1) + P_2(1,\ 1) + \\
& + 2 \cdot P_2(1,\ 1) + 2 \cdot P_2(1,\ 1) + 2 \cdot P_2(2) + [P_3(1,\ 2) + 2] + \\
& + [P_3(1,\ 1,\ 1) + 1] + P_2(3) + 2 \cdot P_3(1,\ 2) + 2 \cdot P_3(1,\ 2) + \\
& + [P_4(1,\ 3) + 3] + 2 = 54.
\end{aligned}
$$

Непосредственный анализ комбинаций кода C_0 (8) подтверждает полученный результат.

Исследуем возможность применения предложенного метода для данного класса кодов с ограничениями на максимальную (m_0) и минимальную (l_0) длины серии нулей, с учетом чего соотношение (6) перепишем так, чтобы остались только те члены $N_0^{(i)}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$, у которых любое значение y_j удовлетворяет условиям $y_j \geqslant l_0$ $y_j \leqslant m_0$, $l_0 = 2$, $m_0 = 5$:

$$N_0(8,\ 5,\ 2) = N_{0\,(5,\,2)}^{(3)} + N_{0\,(3,\,4)}^{(3)} + N_{0\,(4,\,2)}^{(4)} + N_{0\,(3,\,3)}^{(4)} + N_{0\,(2,2,2)}^{5}, \qquad (5)$$

что с учетом выражений (7) и (8) позволяет получить

$$N_0(8,\ 5,\ 2) = P_2(1,\ 1) + P_2(1,\ 1) + 2 \cdot P_2(1,\ 1) + 2 \cdot P_2(2) + P_3(3) = 11.$$

Таблица 3

Обозначения	Вид комбинации	Обозначения	Вид комбинации
$N_0^{(3)}$ (5,2)	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	$N_0^{(4)}$ (4, 2)	0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0
$N_0^{(3)}$ (3, 4)	0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0		
$N_0^{(3)}$ (2, 2, 2)	0 0 1 0 0 1 0 0	$N_0^{(4)}$ (3, 3)	0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0

В табл. 3 представлены все полученные таким образом комбинации. На основе предложенной методики анализа кодовых комбинаций были составлены программы на языке Бейсик, с помощью которых была исследована зависимость вероятности появления комбинации с определенным количеством серий от разрядности кода (рис. 1), а также зависимость вероятности появления комбинации при ограничении максимальной длины серий (семейство кривых 1 на рис. 2) и минимальной длины серий (рис. 2, семейство кривых).

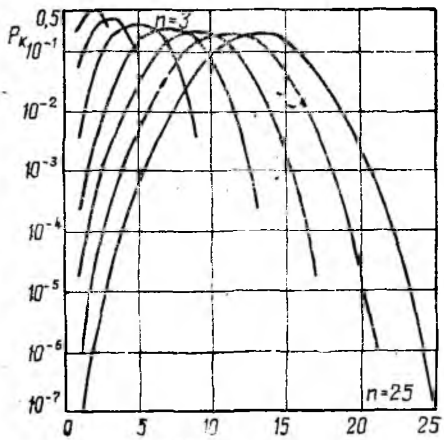

Рис. 1

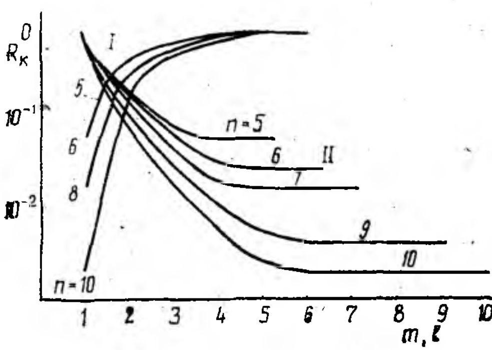

Рис. 2

Предложенная методика анализа кодов $C(n)$, $C(n, m, l)$, $C_0(n)$, $C_0(m, n_0, l_0)$ с использованием аппарата комбинаторики позволяет определять количество комбинаций, входящих в перечисленные коды. Как показывает анализ графических зависимостей имеется сильная связь между вероятностью появления комбинаций P_k и минимальной длиной серии l, причем при $n/2 \leqslant l_0 \leqslant n$, $P_k = \cos t$. Распределение вероятности появления комбинаций кода от количества серий для кодов $C(n)$ симметрично относительно точки $n/2$, лежащей на оси абсцисс (рис. 1, 2) соответственно.

Список литературы: 1. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М., 1978. 600 с. 2. *Васильев П. И., Колесник В. Д.* Коды с ограниченными длинами серий // Помехоустойчивое кодирование и надежность ЭВМ. М., 1987. С. 95—109. 3. *Сигорский В. П.* Математический аппарат инженера. К., 1975. 766 с.

Поступила в редколлегию 25.07.90

УДК 621.391.832

Т. П. ПЕТРУЧЕК, канд. техн. наук

О ЗАВИСИМОСТИ ОСТАТОЧНОГО ЗАТУХАНИЯ КАНАЛА СВЯЗИ ОТ РАСХОЖДЕНИЯ ЧАСТОТ ПЕРЕНОСЧИКОВ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ

Известно [1], что основу современной сети связи составляют многоканальные системы передачи с частотным разделением каналов (МСПЧРК) и коммутационное оборудование. Также известно [2], что в настоящее время требования к качеству каналов связи предусматривают минимум искажений сигнала, а также высокую стабильность во времени характеристик и параметров канала связи. Ниже рассматриваются некоторые из возможных причин искажений, обусловленных асинхронизмом генераторов в МСПЧРК, влияющих на качество каналов связи.

Допустим по аналогии с [3], что в МСПЧРК осуществляется передача информации от станции А до станции Б. В этом случае на станции А от генераторного оборудования потребуется для l-го канала соответствующий переносчик канального сигнала [4]. Пусть $f(t)$ — исходный сигнал, подлежащий передаче и пусть

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \, d\omega,$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, d\omega \text{ —}$$

функция спектральной плотности сигнала $f(t)$.

На выходе системы передачи, имеющей коэффициент передачи, равный

$$K(\omega) = e^{-a(\omega) - i\varphi(\omega) - i\psi_0}$$