УДК 517.927.4:517.988.8

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ Є МАТЕМАТИЧНИМИ МОДЕЛЯМИ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Гвоздєв М.І.
Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна
тел. +38(095) 812-85-92, email: mykyta.hvozdev@nure.ua

The paper considers a one-dimensional microelectromechanical system, the mathematical model of which is the Navier problem for a fourth-order semilinear equation. To find its numerical solution, a method of two-sided approximations based on the use of the Green's function is proposed.

Мікроелектромеханічні системи з електростатичним керуванням (МЕМС) – це мікроскопічні пристрої, у яких поєднуються механічні та електростатичні ефекти. Типовою МЕМС є пристрій, який складається з жорсткої провідної заземленої пластинки, над якою підвішена затиснута де формівна мембрана, яку покрито тонкою провідною плівкою. Прикладення різниці напруг викликає кулонівську силу, яка, у свою чергу, приводить до зміщення мембрани. Особливістю цих пристроїв є те, що коли прикладена напруга перевищує певне порогове значення, мембрана може зіпсуватися або торкнутися пластини заземлення. Управління появою цього явища має надзвичайно практичне значення при розробці МЕМС або для встановлення оптимальних умов роботи та для уникнення пошкодження пристрою. Дослідження описаних процесів можна виконувати за допомогою математичного моделювання. Якщо не нехтувати згином і краї мембрани вільно закріплені, то для визначення прогину ми приходимо (у одновимірному випадку) до наступної крайової задачі (задача Нав'є) для напівлінійного рівняння [1]

$$Bu^{IV} - Tu'' = \frac{\lambda}{(1-u)^2},\ x \in (-l, l), \tag{1}$$

$$0 < u(x) < 1,\ x \in (-l, l), \tag{2}$$

$$u(-l) = u''(-l) = 0,\ u(l) = u''(l) = 0. \tag{3}$$

У моделі (1) – (3) члени Bu^{IV} і $-Tu''$ обумовлені згином та розтягом мембрани, а член $\dfrac{\lambda}{(1-u)^2}$ відображає дію електростатичних сил; параметр λ пропорційний квадрату прикладеної напруги.

Зведемо задачу (1) – (3) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Покладемо $u_1 = u$, $u_2 = -u''$. Тоді задача (1) – (3) набуде вигляду

$$-u_1'' = u_2,\ -Bu_2'' + Tu_2 = \frac{\lambda}{(1-u_1)^2},\ x \in (-l, l), \tag{4}$$

$$u_1(-l) = u_2(-l) = 0,\ u_1(l) = u_2(l) = 0. \tag{5}$$

Для побудови двобічних наближень до додатного розв'язку задачі (4), (5) скористаємося методами нелінійного аналізу у банахових просторах [2] та одновимірним варіантом метода, викладеного у [3].

Задача (4), (5) еквівалентна системі інтегральних рівнянь Гаммерштейна

$$u_1(x)=\int_{-l}^{l}G_1(x,s)u_2(s)ds\,,\;\; u_2(x)=\frac{\lambda}{B}\int_{-l}^{l}\frac{G_2(x,s)}{(1-u_1(s))^2}ds\,, \tag{6}$$

де $G_1(x,s)=\dfrac{1}{l}\begin{cases}(l+x)(l-s), & -l\le x\le s,\\ (l+s)(l-x), & s\le x\le l,\end{cases}$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-u''$, а $G_2(x,s)=\dfrac{1}{\kappa\,\mathrm{sh}\,l\kappa}\begin{cases}\mathrm{sh}\,\kappa(l+x)\,\mathrm{sh}\,\kappa(l-s), & -l\le x\le s,\\ \mathrm{sh}\,\kappa(l+s)\,\mathrm{sh}\,\kappa(l-x), & s\le x\le l.\end{cases}$

– функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-u''+\kappa u$, $\kappa=\dfrac{T}{B}$.

Систему рівнянь (6) розглядатимемо у банаховому просторі $C[-l,\,l]\times C[-l,\,l]$, який напівупорядковано конусом K_+. Якщо ізотонний оператор, який визначається правою частиною системи рівнянь (6), має інваріантний конусний відрізок $<(v_{1,0},v_{2,0}),(w_{1,0},w_{2,0})>$, то можна утворити ітераційний процес

$$v_1^{(k)}(x)=\int_{-l}^{l}G_1(x,s)v_2^{(k-1)}(s)ds\,,\;\; v_2^{(k)}(x)=\frac{\lambda}{B}\int_{-l}^{l}\frac{G_2(x,s)}{(1-v_1^{(k-1)}(s))^2}ds\,,\;\; k=1,\,2,\,...,$$

$$w_1^{(k)}(x)=\int_{-l}^{l}G_1(x,s)w_2^{(k-1)}(s)ds\,,\;\; w_2^{(k)}(x)=\frac{\lambda}{B}\int_{-l}^{l}\frac{G_2(x,s)}{(1-w_1^{(k-1)}(s))^2}ds\,,\;\; k=1,\,2,\,...,$$

$$v_1^0(x)=v_{1,0}(x),\; v_2^0(x)=v_{2,0}(x),\; w_1^0(x)=w_{1,0}(x),\; w_2^0(x)=w_{2,0}(x),$$

який у разі збіжності як раз двобічно і збігатиметься до розв'язку крайової задачі (4) – (6) (буква w позначає послідовність верхніх функцій, а v – нижніх).

Список використаних джерел:

1. Laurençot, P., & Walker, C. (2014). A fourth-order model for MEMS with clamped boundary conditions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 109 (6), 1435-1464. https://doi.org/10.1112/plms/pdu037

2. Опойцев, В. И., & Хуродзе, Т. А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Изд-во Тбилис. ун-та.

2. Сидоров, М. В. (2017). Побудова двобічних наближень до додатного розв'язку нелінійної задачі Нав'є. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, 34, 58-66.