УДК 621.396.67

В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук, *В. Ю. РАДЧЕНКО*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ. Ч. 1

Стремление синтезировать антенну с диаграммой направленности сколь угодно близкой к заданной нереализуемой диаграмме приводит к необходимости создания в антенне быстроосциллирующего амплитудно-фазового распределения (АФР) с большими пиковыми значениями и большой нормой тока. Подобные антенны обычно называют сверхнаправленными. Им присущ ряд отрицательных свойств: узкополосность, низкий КПД, малая эффективность, жесткие требования к установке и поддержанию необходимого АФР. Последнее является особенно неприятным, ибо в реальных антеннах в силу тех или иных причин всегда присутствуют случайные ошибки в АФР и это обстоятельство значительно усложняет практическую реализацию сверхнаправленных антенн. Поэтому при постановке задач синтеза обычно используют определенные условия, которые исключают решения, соответствующие сверхнаправленности. Как правило, эти условия формулируются в виде ограничений на какие-либо параметры, являющиеся функционалами от АФР. Задаются эти ограничения в определенной степени произвольно, зачастую из тех или иных интуитивных соображений. Естественно, что при этом возникает определенное чувство неудовлетворенности, ибо такой подход сразу же исключает оценку возможности практической реализации антенны с «уникальными» свойствами при приемлемой степени проявления отрицательных черт сверхнаправленности.

Между тем, как уже отмечалось выше, всегда присутствующие в реальных антеннах случайности той или иной природы автоматически ограничивают проявление сверхнаправленности. Поэтому представляется вполне логичным и естественным при исследовании задач синтеза формулировать их сразу в статистической постановке, т. е. учитывать случайные ошибки в АФР с самого начала, на этапе постановки задачи. При этом отпадает необходимость в навязывании каких-либо дополнительных условий или ограничений и появляется возможность оценки предельно возможной близости практически реализуемой ДН к заданной. В этом и состоит привлекательность статистического подхода к задачам синтеза антенн.

Основной целью данной работы является статистический синтез антенн по их заданной ДН. Исследование будет проводиться на примере линейной системы непрерывно распределенных источников. Выбор этой системы обусловлен двумя соображениями. Во-первых, эта система является простейшей и поэтому оказывается возможным в значительной степени использовать чисто аналитические методы. Во-вторых, для непрерывной системы представляется вполне естественным изучение влияния на решение задачи радиуса корреляции ошибок.

Постановка задачи синтеза и общее решение. Рассмотрим линейную антенну (линейную систему непрерывно распределенных и одинаково ориентированных источников) длиной L. Амплитудно-фазовое распределение в антенне реализуется со случайными фазовыми ошибками, характеризуемыми случайной функцией $\varphi(x)$. Множитель системы запишем, как это принято в работе [1], в следующем виде:

$$\dot{f}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \dot{A}(x)\, e^{i[\varphi(x)+ux]}dx. \qquad (1)$$

Здесь $\dot{A}(x)$ — функция, описывающая амплитудно-фазовое распределение, и нормированная к амплитуде и фазе центрального источника в отсутствие ошибок; $x = 2z/L$ — безразмерная продольная координата; $u = \frac{\pi L}{\lambda}\sin\theta = a\sin\theta$ — обобщенный угол; θ — угол, отсчитываемый от нормали к оси антенны; $a = \pi L/\lambda$.

Будем считать, что $\varphi(x)$ нормальная однородная случайная функция со средним значением $\overline{\varphi(x)} = 0$, дисперсией $\sigma^2(x) = \alpha$, а корреляционная функция зависит только от разности координат. Коэффициент корреляции выберем в гауссовой форме.

Задача формулируется следующим образом. Пусть $\dot{F}(u)$ — заданная комплексная ДН по полю, $\dot{f}(u)$ — случайная комплексная ДН по полю, создаваемая найденным АФР, реализуемым с фазовыми ошибками (т. е. ДН отдельной реализации АФР). Требуется найти такое регулярное АФР, которое с учетом заданных фазовых ошибок обеспечило бы минимум математического ожидания квадрата отклонения синтезируемой ДН $\dot{f}(u)$ от заданной $\dot{F}(u)$ во всей области видимости (в дальнейшем эту величину будем называть среднеквадратичным отклонением — СКО).

В развернутом виде СКО запишется следующим образом:

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-a}^{a} \overline{|\dot{F}(u) - \dot{f}(u)|^2}\, du = \int_{-a}^{a} \{|\dot{F}(u)|^2 - [\dot{F}(u)\overline{\dot{f}^*(u)} +$$

$$+ \dot{F}^*(u)\overline{\dot{f}(u)}] + \overline{|\dot{f}(u)|^2}\}\, du. \qquad (2)$$

Представим регулярное АФР в виде разложения по ортонормированной системе собственных функций преобразования Фурье $\{\psi_n(a, x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\dot{A}(x) = \sum_{n=0}^{N} \dot{b}_n \psi_n(a, ax). \qquad (3)$$

В (3) и соответственно в дальнейших формулах верхний предел суммирования по n обозначен через N. При этом подразумевается, что N может быть сколь угодно большим числом. Функции $\Psi_n(a, x)$

связаны с вытянутыми угловыми сфероидальными функциями (ВУСФ)

$$\psi_n(a,\ ax) = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\lambda_n(a)}}{k_n(a)} S_{0n}(a,\ x),\ \ x \in [-1,\ 1],$$

где $\lambda_n(a)$ — собственные значения, соответствующие функциям ψ_n, перенумерованные так, что $1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_n > \cdots > 0$; $k_n(a)$ — коэффициент, определяемый из условия нормировки ВУСФ

$$k_n^2(a) = \int_{-1}^{1} S_{on}^2(a,\ x)\, dx.$$

Слагаемые в (3) можно рассматривать как пространственные гармоники АФР, каждая из которых формирует свою ДН по полю, описываемую соответствующими слагаемыми из (4). Для гармоник с $n < \frac{2a}{\pi}$ максимум ДН находится в области видимости и их обычно называют активными, а гармоники с $n > \frac{2a}{\pi}$, у которых максимум в области мнимых углов, соответственно реактивными.

С учетом (3) средние ДН по полю и по мощности можно представить в следующем виде [2]:

$$\overline{\dot f(u)} = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}} \dot f_0(u) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{1}} \sum_{n=0}^{N} \dot a_n \psi_n(a,\ u), \tag{4}$$

$$\overline{|\dot f(u)|^2} = \mathrm{e}^{-\alpha}\left\{|\dot f_0(u)|^2 + \alpha \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m,\ n=0}^{N} \frac{\alpha^{p-1}}{p!} \dot a_n \dot a_m^* J_{nm}^{(p)}(a,\ c,\ u)\right\}, \tag{5}$$

где $\dot f_0(u)$ — ДН в отсутствие ошибок; $\dot a_n = i\sqrt{\lambda_n/2\pi a}\, \dot b_n$ — коэффициент разложения $\dot f_0(u)$ в ряд по собственным функциям $\psi_n(a,\ u)$; c — радиус корреляции в относительных единицах, связанный с абсолютным радиусом корреляции ρ соотношением $c = 2\rho/L$,

$$J_{nm}^{(p)}(a,\ c,\ u) =$$

$$= \frac{i^{m-n}}{2\pi k_n k_m} \int_{-1}^{1}\!\!\int S_{0n}(a,\ x)\, S_{0m}(a,\ x_1)\, e^{-\frac{(x-x_1)^2}{(c^2/p)} + iu(x-x_1)}\, dx dx_1.$$

Заданную диаграмму направленности $\dot F(u)$ также представим в виде разложения по $\psi_n(a,\ u)$

$$\dot F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot d_n \psi_n(a,\ u). \tag{6}$$

Подставляя соотношения (4) — (6) в (2) и проводя интегрирование по u, для $\overline{\varepsilon^2}$ получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = \varepsilon_0^2 + \langle w^* B_0^{-1} w\rangle - e^{-\frac{\alpha}{2}}[\langle a^* w\rangle + \langle w^* a\rangle] + e^{-\alpha}\langle a^* V a\rangle. \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon_0^2 = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n d_n^2$ — СКО решения детерминированной задачи синтеза при учете в разложении для АФР $(N+1)$ гармоники; $w\rangle$ — вектор-столбец размерности $(N+1)$ с элементами $\lambda_n d_n$; $a\rangle$ — вектор-столбец размерности $(N+1)$ с элементами a_n; B_0 — диагональная матрица размерности $(N+1)\times(N+1)$ с элементами $\lambda_n \delta_{nm}$; V — квадратная матрица той же размерности, что и B_0 с элементами $(\lambda_n \delta_{nm} + \alpha B_{nm})$; δ_{nm} — символ Кронекера;

$$B_{nm} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha^{p-1}}{p!} J_{nm}^{(p)}(a, c);$$

$$J_{nm}^{(p)}(a, c) = \int_{-a}^{a} J_{nm}^{(p)}(a, c, u)\, du = \frac{i^{m-n}}{\pi k_n k_m} \int_{-1}^{1}\!\!\int S_{0n}(a, x) \times$$

$$\times S_{0m}(a, x_1) \frac{\sin a\,(x - x_1)}{(x - x_1)} e^{-\frac{p(x-x_1)^2}{c^2}} dx dx_1.$$

Приравнивая нулю первую вариацию выражения (7) по вектору $a^*\rangle$, получаем решение поставленной задачи синтеза

$$a\rangle' = e^{\frac{\alpha}{2}} (V^{-1} w\rangle); \tag{8}$$

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \varepsilon_0^2 + \langle w^* (B_0^{-1} - V^{-1}) w\rangle. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) справедливы при любой величине дисперсии и радиуса корреляции ошибок.

В случае малых ошибок ($\alpha < 1$) выражения (8) и (9) можно упростить, если воспользоваться для обратной матрицы V^{-1} следующим представлением [2]:

$$V^{-1} = (B_0 + \alpha B_1^{(1)})^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha^n [(B_0 + \alpha B_1^{(1)})^{-1} B_1^{(2)}]^n (B_0 + \alpha B_1^{(1)})^{-1}, \tag{10}$$

где $(B_0 + \alpha B_1^{(1)})$ — диагональная матрица с элементами $(\lambda_n + \alpha B_{nn})\delta_{nm}$; $B_1^{(2)}$ — квадратная симметрическая матрица с элементами $B_{nm}(1 - \delta_{nm})$. Все матрицы имеют размерности $(N+1)\times(N+1)$.

Подставляя (10) в формулы (8) и (9), и, ограничиваясь затем в них двумя членами разложения, получаем в явном виде выражения для a_n и $\overline{\varepsilon_{\min}^2}$, пригодные для случая малых фазовых ошибок

$$\dot{a}_n = e^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \frac{\dot{d}_n}{1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}} - \alpha \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq o}}^{N} \frac{I_{nm}}{\left(1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}\right)\left(1 + \alpha \frac{I_{mm}}{\lambda_m}\right)} \cdot \frac{d_m}{\lambda_n} \right\}; \tag{11}$$

$$\dot{b}_n = i^n \sqrt{2\pi a/\lambda_n}\, a_n;$$

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \varepsilon_0^2 + \alpha \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{I_{nn} d_n^2}{\left(1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}\right)} + \sum_{\substack{n,\, m=0 \\ n \neq m}}^{N} \frac{I_{nm} \dot{d}_n \dot{d}_m^*}{\left(1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}\right)\left(1 + \alpha \frac{I_{mm}}{\lambda_m}\right)} \right]. \tag{12}$$

Полученные соотношения были использованы при синтезе ДН секторной формы для линейной антенны поперечного излучения. Ширина по нулевому уровню задавалась равной $(2\Delta u/a)=0{,}8$; длина антенны $L=3\lambda$, $(a=3\pi)$. Все численные результаты, приводимые в данной работе, относятся к синтезу именно этой ДН.

На рис. 1 (кривая *1*) показана ДН, по мощности соответствующая оптимальному АФР, определенному при условии, что диспер-

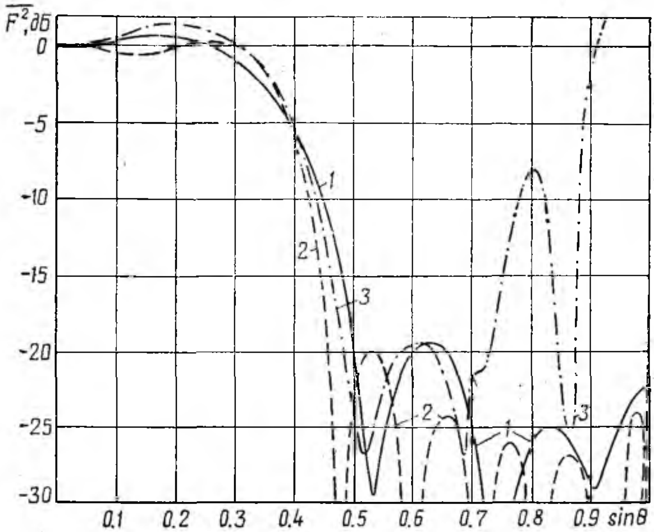

Рис. 1

сия ошибок $\alpha=10^{-2}(\Delta\varphi=5{,}7°)$ и $c=1{,}2\,(\rho/\lambda=1{,}8)$. Минимальное СКО, деленное на квадрат нормы заданной ДН $\|F\|^2=\int\limits_0^0 |F(u)|^2\,du$, при этом равно $\varepsilon^2_{\min}/\|F\|^2=0{,}0687$. Уровень бокового излучения вне заданного сектора не более 19 дБ.

Здесь же (кривая 2) приведена оптимальная ДН, полученная при детермированном синтезе $(\alpha=0)$ и $N=18$, при этом $\varepsilon^2_0/\|F\|^2=0{,}0338$. В этом случае главный лепесток по форме ближе к секториальному, чем при статистическом синтезе, но уровень бокового излучения не менее —14 дБ. Кроме того, при наложении на оптимальное АФР фазовых ошибок с $\alpha=10^{-2}$ и $c=1{,}2$, диаграмма направленности искажается и становится не только хуже полученной при статистическом синтезе, но и практически неприемлемой (кривая *3*). Это является подтверждением хорошо известного факта в детерминированной теории антенн, что можно синтезировать ДН, сколь угодно близкую к любой заданной $F(u)$, но получаемое решение оказывается чрезвычайно чувствительным к ошибкам в АФР [3].

Минимальное СКО и параметры случайных ошибок. Изучим влияние величины параметров случайных ошибок на минимальное СКО синтезированной ДН от заданной.

Соотношения (9) и (12) при $N \to \infty$ определяют предельно достижимое минимальное СКО при учете, что оптимальное АФР, найденное в результате синтеза, будет реализовано с заданными фазовыми ошибками. В наиболее интересном для практики случае малых ошибок ($\alpha < 1$) из (12) имеем

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \alpha \sum_{n=0}^{N_{\max}} \frac{I_{nn}(a, c)\, d_n^2}{\left(1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}\right)} \left[1 + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 0}}^{N_{\max}} \frac{I_{nm}(a, c)}{\left(1 + \alpha \frac{I_{mm}}{\lambda_m}\right)} \cdot \frac{d_m^*}{d_n^*}\right]. \tag{13}$$

Заметим, что, хотя $N \to \infty$, однако при вычислении суммы достаточно ограничиться некоторым конечным числом $N_{\max}(a, \alpha, c)$. Вопрос об определении величины $N_{\max}(a, \alpha, c)$ обсуждается ниже.

Наиболее просто выглядит выражение для $\overline{\varepsilon_{\min}^2}$ при очень малых ($c \ll 1$) и больших ($c \gg 1$) радиусах корреляции. При $c \ll 1$ все ($I_{mn}(a, c)$, у которых $n \neq m$, пренебрежимо малы [2] и, следовательно,

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2} = \alpha \sum_{n=0}^{N_{\max}} \frac{I_{nn} d_n^2}{\left(1 + \alpha \frac{I_{nn}}{\lambda_n}\right)}. \tag{14}$$

Для $c \gg 1$ величина

$$I_{nm}(a, c) = \lambda_n(a)\, \delta_{nm} \text{ и } \overline{\varepsilon_{\min}^2} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \sum_{n=0}^{N_{\max}} \lambda_n d_n^2. \tag{15}$$

Очевидно, что если $\alpha \to 0$, то $\overline{\varepsilon_{\min}^2} \to 0$, и мы приходим к известному результату в детерминированной теории синтеза.

Отметим следующий момент, связанный с поведением $\overline{\varepsilon_{min}^2}(N)$, определяемого по формуле (12) при изменении АФР, обусловленном увеличением числа членов в разложении в ряд. При детерминированном синтезе с увеличением N величина ε_0^2 уменьшается монотонно, так как уменьшается количество положительных слагаемых в выражении для ε_0^2. При синтезе в статистической постановке ситуация иная. Для простоты рассмотрим случай малых радиусов корреляции. Используя (12) и (14), при $c \ll 1$ можно показать, что

$$\overline{\varepsilon_{\min}^2(N+1)} = \overline{\varepsilon_{\min}^2(N)} - \lambda_{N+1} \frac{d_{N+1}^2}{\left(1 + \alpha \frac{I^{N+1, N+1}}{\lambda_{N+1}}\right)} = \overline{\varepsilon_{\min}^2(N)} - \Delta\overline{\varepsilon^2}. \tag{16}$$

Видно, что, во-первых, уменьшение СКО с ростом N происходит значительно медленнее, чем при детерминированном синтезе ($\Delta\varepsilon_0^2 = \lambda_{N+1} d_{N+1}^2$), так как знаменатель всегда больше единицы. Во-вторых, существует такое $N = N_{\max}(a, \alpha, c)$, начиная с которого $\Delta\overline{\varepsilon^2}$ становится настолько малым, что дальнейшее увеличение N практически не приводит к уменьшению СКО. Как показали расчеты $N_{\max}(a, \alpha, c)$, может быть определено из условия $\alpha(I_{N_{\max}}, N_{\max}/\lambda_{N_{\max}}) = 10$.

В таблице приведены значения минимального нормированного на $\|F\|^2$ СКО синтезированной ДН от секторной при $\alpha = 10^{-2}$ и различных значениях радиуса корреляции и количества учитываемых гармоник N. Из нее следует, что, например, для $c = 0{,}4$ все гармоники, начиная с 12-й, не влияют на минимальное СКО, т. е. $N_{\max} = 10$. Соответственно для $c = 1{,}2$ и $2{,}0$ максимальные значения N равны $N_{\max} = 12$ и 14.

c \ N	6	10	14	18
0,4	0,0937	0,0783	0,0783	0,0782
0,8	0,0939	0,0744	0,0744	0,0743
1,2	0,0939	0,0689	0,0688	0,0687
2,0	0,0939	0,0627	0,0715	0,0615
10	0,0939	0,0606	0,0569	0,0439
∞	0,0849	0,0511	0,0474	0,0438

Остановимся теперь на *зависимости минимального* СКО $\overline{\varepsilon^2_{\min}}$ от параметров α и c. Характер влияния дисперсии ошибок на $\overline{\varepsilon^2_{\min}}$ легко устанавливается из выражения (12) — с увеличением α величина СКО возрастает. Штриховые кривые, изображенные на рис. 2, подтверждают этот вывод. Зависимость от радиуса корреляции значительно сложнее. Для получения представления о ее характере воспользуемся результатами численных расчетов, которые показаны сплошными кривыми на рис. 2. Видно, что *имеется явно выраженный максимум* $\overline{\varepsilon^2_{\min}}$ как функции c. Значение c, при котором имеет место этот максимум, зависит от α — чем меньше α, тем при меньших значениях радиуса корреляции $\overline{\varepsilon^2_{\min}}$ принимает максимальное значение.

Таким образом, в реальных условиях (при наличии случайных фазовых ошибок в АФР) принципиально нельзя синтезировать ДН, сколь угодно близкую к заданной нереализуемой диаграмме. Минимальное СКО определяется величиной параметров случайных ошибок: дисперсии α и радиуса корреляции c. При этом оптимальное АФР

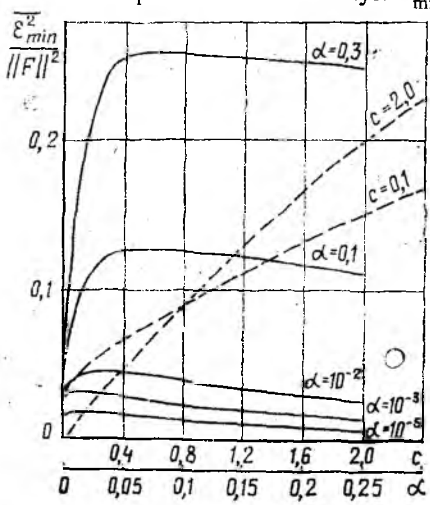

Рис. 2

достигается при ограниченном числе членов в его разложении в ряд. Это число также зависит от параметров случайных ошибок.

Список литературы: 1. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн. М., 1969. 294 с. 2.*Сверхнаправленность* в статистической теории антенн / Я. С. Шифрин, В. В. Должиков, В. Ю. Радченко // Харьк. ин-т радиоэлектроники. Х., 1988. 140 с. Деп. в УкрНИИНТИ 05.01.88, № 86-Ук88. 3. *Минкович Б. М., Яковлев В. П.* Теория синтеза антенн. М., 1969. 294 с.

Поступила в редколлегию 25.07.90

УДК 621.396.67

В. В. ДОЛЖИКОВ, канд. физ.-мат. наук, *В. Ю. РАДЧЕНКО*

СТАТИСТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ. Ч. 2

Чувствительность и устойчивость решения задачи синтеза. Задачи детерминированного синтеза, которые относятся к некорректным задачам, требуют для получения устойчивого решения регуляризации путем введения дополнительной информации о решении в виде дополнительных ограничений на тот или иной функционал от АФР. Статистический же подход к синтезу ДН сразу приводит к математически корректной задаче. Применительно к рассматриваемой в данной работе задаче синтеза это можно показать наиболее просто для случая малых фазовых ошибок в АФР, когда радиус корреляции их значительно меньше единицы ($c \ll 1$).

Запишем полученное в первой части работы выражение для матожидания квадратичного отклонения синтезируемой случайной диаграммы по полю $\dot{f}(u)$ от заданной $\dot{F}(u)$ во всей области видимых углов

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-a}^{a} \overline{|\dot{F}(u) - \dot{f}(u)|^2}\, du = \int_{-a}^{a} \{ |\dot{F}(u)|^2 - [\dot{F}(u)\overline{\dot{f}^*(u)} + \dot{F}^*(u)\overline{\dot{f}(u)}] + \overline{|\dot{f}(u)|^2} \} du. \quad (1)$$

Напомним, что задача синтеза заключалась в отыскании такого регулярного амплитудно-фазового распределения $\dot{A}(x)$, которое при наличии в антенне случайных фазовых ошибок с заданными α и c обеспечивало бы минимум $\overline{\varepsilon^2}$.

Воспользуемся известной формулой для среднего значения квадрата ДН по полю (средней ДН по мощности) [1]:

$$\overline{|\dot{f}(u)|^2} = |\overline{\dot{f}(u)}|^2 + \overline{|\Delta\dot{f}(u)|^2}.$$

С учетом данной формулы выражение (1) можно привести к следующему виду:

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-a}^{a} |\dot{F}(u) - \overline{\dot{f}}(u)|^2\, du + \int_{-a}^{a} \overline{|\Delta\dot{f}(u)|^2}\, du. \quad (2)$$