

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ Комп'ютерних наук \_\_\_\_\_  
(повна назва)

Кафедра \_\_\_\_\_ Штучного інтелекту \_\_\_\_\_  
(повна назва)

**АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА**  
**Пояснювальна записка**

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ другий (магістерський) \_\_\_\_\_

Оцінка екстремальних значень показника \_\_\_\_\_

асортативності еластичних мереж \_\_\_\_\_

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи \_\_\_\_\_ СШМ-18-1 \_\_\_\_\_

Горковлюк Д.Ю.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 122 – Комп'ютерні науки \_\_\_\_\_

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми \_\_\_\_\_ освітньо-професійна \_\_\_\_\_

(освітньо-професійна або освітньо -наукова)

Освітня програма \_\_\_\_\_ Системи штучного \_\_\_\_\_

інтелекту (СШ)

(повна назва освітньої програми)

Керівник \_\_\_\_\_ доц. Шергін В.Л. \_\_\_\_\_

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри \_\_\_\_\_

(підпис)

В.О. Філатов \_\_\_\_\_

(прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет \_\_\_\_\_ Комп'ютерних наук \_\_\_\_\_

Кафедра \_\_\_\_\_ Штучного інтелекту \_\_\_\_\_

Рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ другий (магістерський) \_\_\_\_\_

Спеціальність \_\_\_\_\_ 122 – Комп'ютерні науки \_\_\_\_\_

(код і повна назва)

Тип програми \_\_\_\_\_ Освітньо-професійна \_\_\_\_\_

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма \_\_\_\_\_ Системи штучного інтелекту (СШІ) \_\_\_\_\_

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри \_\_\_\_\_ (підпис)

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові \_\_\_\_\_ Горковлюку Дмитру Юрійовичу \_\_\_\_\_

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи \_\_\_\_\_ Оцінка екстремальних значень показника асортативності еластичних мереж \_\_\_\_\_

затверджена наказом по університету від \_\_\_\_\_ 04.11.2019 р. \_\_\_\_\_ № 1623Ст \_\_\_\_\_

2. Термін подання студентом роботи \_\_\_\_\_ 19.12.2019 р. \_\_\_\_\_

3. Вихідні дані до роботи \_\_\_\_\_ Науково-технічні публікації, дані Інтернет-джерел та відомих наукових проектів щодо розробки існуючих методів моделювання та дослідження асортативності мереж \_\_\_\_\_

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі) \_\_\_\_\_

1 Графи та складні мережі, 1.1 Графи, 1.2 Числові характеристики мереж, 1.3 Поняття «складних мереж», 1.4 Основні моделі мереж, 2 Асортативність еластичних мереж, 2.1 Фрактали та фрактальна розмірність мереж, 2.2 Концепція еластичності мереж, 2.3 Асортативність мереж, 3 Експериментальне дослідження меж показника асортативності безмасштабних мереж, 3.1 Вибір програмних засобів реалізації, 4.2 Генерація масштабно-інваріантної мережі, 4.3 Моделювання структури та розрахунок меж коефіцієнта асортативності еластичної мережі \_\_\_\_\_

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів) Слайд 1 – Титульний. Слайд 2 – Об'єкт, предмет, мета досліджень. Слайд 3 – Основні завдання. Слайд 4 – Характерні властивості складних мереж. Слайд 5 – Асортативність мереж. Слайд 6 – Коефіцієнти асортативності деяких мереж. Слайд 7 – Структура та матриця суміжності екстремально дизасортативної мережі ( $r=-1$ ). Слайд 8 – Структура та матриця суміжності екстремально асортативної мережі ( $r=1$ ). Слайд 9 – Процедура перенаправлення зв'язків (Rewiring Procedure). Слайд 10 – Постановка задачі пошуку структури екстремальної за асортативністю мережі. Слайд 11– Модель еластичної безмасштабної мережі. Слайд 12 – Еластичність мереж. Слайд 13 – Еластичність та фрактальна розмірність мереж. Слайд 14–Ранговий розподіл вузлів безмасштабної мережі. Слайд 15 – Алгоритм побудови матриць суміжності екстремальних за асортативністю мереж. Слайд 16 – Матриці суміжності екстремальних за асортативністю SF-мереж. Слайд 17 – Межі показника асортативності еластичної безмасштабної мережі. Слайд 18 – Межі коефіцієнту асортативності в залежності від розміру мережі. Слайд 19 – Висновки.

6. Консультанти розділів роботи

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основний розділ	доц. Шергін В.Л.		

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання на атестаційну роботу	04.11.2019	виконано
2	Аналіз предметної області	05.11.2019 – 10.11.2019	виконано
3	Постановка завдання та узгодження з керівником	11.11.2019 – 12.11.2019	виконано
4	Дослідження графів та мереж	13.11.2019 – 27.11.2019	виконано
5	Дослідження моделі еластичних мереж	18.11.2019 – 22.11.2019	виконано
6	Дослідження асортативності, методів її оцінювання, впливу характеристик мережі на межі асортативності	23.11.2019 – 27.11.2019	виконано
7	Експериментальні дослідження	28.11.2019 – 05.12.2019	виконано
8	Написання пояснювальної записки	06.12.2019 – 10.12.2019	виконано
9	Попередній захист	13.12.2019	виконано
10	Захист перед ЕК	19.12.2019	

Дата видачі завдання \_\_\_\_\_

Студент \_\_\_\_\_ Горковлюк Д.Ю.  
(підпис)

Керівник роботи (проекту) \_\_\_\_\_ доц. Шергін В.Л.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Записка пояснювальна: 74 с., 29 рисунків, 2 таблиці, 2 дод., 23 джерела.

АСОРТАТИВНІСТЬ, ЕЛАСТИЧНІСТЬ, МАСШТАБНО-ІНВАРІАНТНА МЕРЕЖА, МОДЕЛЬ БАРАБАШІ-АЛЬБЕРТ, ФРАКТАЛИ

Об'єктом досліджень є безмасштабні, еластичні мережі.

Предметом досліджень атестаційної роботи магістра є асортативність.

Метою роботи є аналіз моделей складних мереж, дослідження впливу показника розподілу вузлів та коефіцієнту еластичності мережі на межі показника асортативності та структуру екстремально асортативних / дзасортативних мереж, проведення експериментальних досліджень оцінювання меж показника асортативності еластичних мереж.

## РЕФЕРАТ

Записка пояснительная: 74 с., 29 рис., 2 табл., 2 прил., 23 источника.

### АССОРТАТИВНОСТЬ, МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНАЯ СЕТЬ, МОДЕЛЬ БАРАБАШИ-АЛЬБЕРТ, ФРАКТАЛЫ, ЭЛАСТИЧНОСТЬ

Объектом исследований являются безмасштабные, эластичные сети.

Предметом исследований аттестационной работы магистра является ассортативность.

Целью работы является анализ моделей сложных сетей, исследование влияния показателя распределения узлов и коэффициента эластичности сети на границы показателя ассортативности и структуру экстремально ассортативных / дизассортативных сетей, проведение экспериментальных исследований оценки границ показателя ассортативности эластичных сетей.

## **ABSTRACT**

Explanatory note: 74 pages, 29 figures, 2 tables, 23 sources, 2 appendixes.

**ASSORTATIVITY, BARABASI–ALBERT MODEL, ELASTICITY,  
FRACTAL, SCALE-FREE NETWORK**

The object of research is large-scale, elastic networks.

The subject of research is assortativity.

The purpose of the work is analysis models of complex networks, studying the influence of the node distribution index and the elasticity index of the network on the boundary of the assortativity index and the structure of extremely assortative / disassortative networks, providing experimental studies of the evaluation of the boundaries of the assortativity index of elastic networks.

## ЗМІСТ

Перелік умовних позначень, одиниць, скорочень та термінів .....	7
Вступ.....	8
1 Графи та складні мережі.....	10
1.1 Графи.....	10
1.2 Числові характеристики мереж .....	15
1.3 Поняття «складних мереж».....	19
1.4 Основні моделі мереж .....	23
2 Асортативність еластичних мереж.....	30
2.1 Фрактали та фрактальна розмірність мереж .....	30
2.2 Концепція еластичності мереж.....	40
2.3 Асортативність мереж .....	45
3 Експериментальне дослідження меж показника асортативності еластичних мереж .....	55
3.1 Вибір програмних засобів реалізації.....	55
3.2 Генерація масштабно-інваріантної мережі .....	60
3.3 Моделювання структури та розрахунок меж коефіцієнта асортативності еластичної мережі .....	63
Висновки .....	65
Перелік джерел посилання .....	66
Додаток А.....	68
Додаток Б .....	73

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

БА – мережа Барабаші-Альберт;

MIM – масштабно-інваріантна мережа;

ПП – переважне приєднання (переважне зв'язування);

box-counting – підрахунок числа шаблонів;

ER – Erdos-Renyi network – мережа Ердеша-Рен'ї;

SF-мережа – scale-free network – безмасштабна мережа;

SW – small world – сеть малого світу.

## ВСТУП

В кінці ХХ століття сформувався новий науковий напрям: теорія складних мереж [1]. Незважаючи на те, що в розгляд теорії складних мереж потрапляють різні мережі – електричні, транспортні, інформаційні, найбільший внесок в розвиток цієї теорії внесли дослідження соціальних мереж. Цей термін був введений в 1954 році Дж. Барнсом [2]. У другій половині ХХ століття поняття «соціальна мережа» стало популярним у західних дослідників. У теорії соціальних мереж отримало розвиток такий напрямок, як аналіз соціальних мереж. Сьогодні термін «соціальна мережа» позначає поняття, яке виявилось ширше свого соціального аспекту, воно включає, наприклад, багато інформаційні мережі, в тому числі і WWW.

Більшість об'єктів природи і суспільства мають бінарні зв'язки, які можна представити у вигляді мережі, де кожен об'єкт це точка, а його зв'язок з іншим об'єктом це лінія або дуга.

В даний час існує термін «складні мережі», який охоплює мережі, що мають такі властивості: великі розміри, елементи випадковості при формуванні, зростання (зміна) в часі. Математичною основою теорії складних мереж є теорія графів.

Відомо, що у багатьох випадках мережі реального світу мають фрактальні властивості. Фрактальність або самоподібність об'єкта, процесу, явища означає, що частини цього об'єкта / процесу / явища подібні цілому (в певному сенсі). Прикладом моделі мережі з фрактальними властивостями є масштабно-інваріантна мережа: МІМ, вона ж – мережа Барабаші-Альберт (БА) [7]. Ця модель є нескінченно зростаючої, дискретної і позапросторовою, але в той же час має ступеневий розподіл структурних частин (вершин по числу зв'язків) і загальновизнано відноситься до фрактальних. Структури багатьох мереж реального світу (від мережі WWW до мережі міжбілкового взаємодій [8]) близькі до структури МІМ і розглядаються як фрактальні.

Важливою характеристикою мереж є співвідношення між швидкостями приросту кількості вузлів та зв'язків між ними. Чисельною мірою цього співвідношення є показник еластичності. В звичайній моделі БА [7] це співвідношення є лінійним, тобто еластичність одинична. Втім, в більшості мереж реального світу кількість зв'язків росте суттєво швидше, ніж кількість вузлів, тому під час досліджень мереж не варто обмежуватись БА-моделлю.

В той час, як показник розподіл вузлів за зв'язками та еластичність є характеристиками першого порядку, то асортативність є характеристикою другого порядку. Вона характеризує схильність вузлів поєднуватись з подібними, або протилежними собі за кількістю зв'язків.

Відомо [1], [5], [6], [8], [9], що соціальні мережі мають в основному позитивну асортативність, а біологічні та технічні є дизасортативними. Моделі штучних мереж (модель ВА та інші) є асимптотично нейтральними. Теоретично (у абстрагуванні від структури мережі) показник асортативності варіюється від  $-1$  до  $+1$ , втім, ступеневий характер розподілу вузлів, вочевидь, накладає обмеження як на структуру мережі, так і на межі показника асортативності. Проте наразі цей зв'язок для еластичних мереж не досліджений.

Таким чином, проблема оцінювання меж значень показника асортативності еластичних мереж є актуальною науковою і практичною задачею. Для її вирішення в даній роботі розглядаються і вирішуються такі завдання:

- аналіз поняття складних мереж, їх властивостей і існуючих моделей;
- ознайомлення з поняттям асортативності, його чисельною мірою та методами її оцінювання;
- аналіз моделі еластичних безмасштабних мереж;
- дослідження впливу характеристик еластичних мереж на фактично досяжні межі показника асортативності;
- програмна реалізація моделі еластичної МІМ та експериментальне оцінювання екстремальних значень показника асортативності;
- аналіз отриманих результатів.

# 1 ГРАФИ ТА СКЛАДНІ МЕРЕЖІ

## 1.1 Графи

Граф – це абстрактний математичний об'єкт, який представляє собою безліч вершин і набір ребер, тобто з'єднань між парами вершин. Для різних областей застосування види графів можуть відрізнятися спрямованістю, обмеженнями на кількість зв'язків і додатковими даними про вершини або ребрах. Багато структур, які мають практичний інтерес в математики та інформатики, можуть бути представлені графами.

Основоположником теорії графів є Леонард Ейлер. Він в 1736 знайшов рішення популярною в той час завдання про Кенігсбергська мостах (рис. 1.1): необхідно було знайти замкнутий маршрут, що проходить по всіх семи мостах строго по одну раз, або довести відсутність такого маршруту.

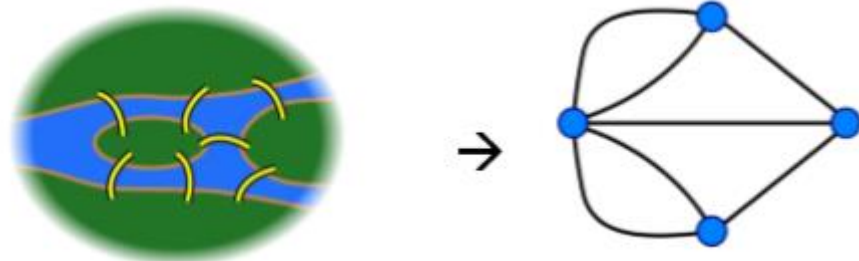


Рисунок 1.1 – Схема мостов Кенігсберга

Ейлер знайшов правило: для того, щоб граф можна було накреслити, не відриваючи олівця від паперу, необхідно, щоб число непарних вершин (тобто вершин з непарним числом інцидентних ребер) дорівнювало нулю, або двом. Якщо воно дорівнює нулю, то цикл можна починати в будь-якій вершині, а якщо двом – то в одній з непарних вершин. Граф Кенігсбергська мостів має

чотири непарні вершини, тобто мости не можна обійти не проходячи по якомусь двічі.

Ця публікація Ейлера лягла в основу теорії графів.

Найкраще практичне вирішення завдання про Кенігсбергські мости запропонував Вільгельм II: за легендою він не зміг вирішити задачу і щоб виграти парі в 1905р. наказав побудувати восьмий, Імператорський міст. Однак, в 1945р. британська авіація привела умови задачі до початкових.

У 2005 р. до 750-річчя міста побудований Ювілейний мост. Таким чином, зараз в Калінінграді вісім мостів, і Ейлером цикл існує.

Існують різні види графів [12].

Просто *граф*, або неорієнтований граф (неорграф) – це впорядкована пара  $G = \{V, E\}$ , де  $V$  – це непорожня множина вершин, а  $E \subseteq V^2$  – множина пар вершин, званих ребрами. Множина  $V$  (а отже й  $E$ ) зазвичай вважаються кінцевими множинами. Багато результати, отримані для кінцевих графів, невірні (або будь-яким чином відрізняються) для нескінченних графів, оскільки не всі твердження, що мають місце для кінцевих сукупностей, виконуються в разі нескінченних множин.

Вершини і ребра графа називаються також елементами графа, число вершин в графі  $|V|$  - порядком, число ребер  $|E|$  – розміром графа.

Вершини  $u$  та  $v$  називаються кінцевими вершинами (або просто кінцями) ребра  $e = \{u, v\}$ . Ребро, в свою чергу, з'єднує ці вершини. Дві кінцеві вершини одного і того ж ребра називаються сусідніми.

Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають загальну кінцеву вершину.

Два ребра називаються кратними, якщо множини їх кінцевих вершин збігаються.

Ребро називається петлею, якщо його кінці збігаються, тобто  $e = \{v, v\}$ .

Граф без петель і кратних ребер називається простим.

Ступенем вершини  $v$  ( $\deg(v)$ ) називають кількість інцидентних їй

ребер (при цьому петлі рахують двічі).

Вершина називається ізольованою, якщо вона не є кінцем ні для одного ребра; висячою (або листом), якщо вона є кінцем рівно одного ребра.

Орієнтований граф (скорочено оргграф) – це впорядкована пара  $G = \{V, A\}$ , де  $V$  – непорожня множина вершин або вузлів, а  $A$  – множина (впорядкованих) пар різних вершин, званих дугами або орієнтованими ребрами.

Дуга – це впорядкована пара вершин  $(u, v)$ , де вершину  $u$  називають початком, а  $v$  – кінцем дуги. Можна сказати, що дуга  $u \rightarrow v$  веде від вершини  $u$  до вершини  $v$ .

Змішаний граф  $G$  – це граф, в якому деякі ребра можуть бути орієнтованими, а деякі неорієнтованими. Орієнтований і неорієнтований графи є окремими випадками змішаного.

Граф  $G$  називається ізоморфним графу  $H$ , якщо існує бієкція  $f$  з множини вершин графа  $G$  в множину вершин графа  $H$ , яка має таку властивість: якщо в графі  $G$  є ребро  $(u, v)$ , то в графі  $H$  повинно бути ребро  $(f(u), f(v))$  (тобто з вершини  $f(u)$  в вершину  $f(v)$ ). І навпаки: якщо в графі  $H$  є ребро  $(u', v')$ , то в графі  $G$  має бути ребро  $(f^{-1}(u'), f^{-1}(v'))$ . У разі орієнтованого графа ця бієкція також повинна зберігати орієнтацію ребра. У разі зваженого графа бієкція також повинна зберігати ваги ребер.

Маршрутом в графі називають кінцеву послідовність вершин, в якій кожна вершина (крім останньої) з'єднана з наступною в послідовності вершиною ребром. Ланцюгом називається маршрут без пов-торуючи ребер. Простий ланцюгом називається маршрут без повторюваних вершин (звідки випливає, що в простий ланцюга немає повторюваних ребер).

Орієнтованим маршрутом (або шляхом) в оргграфі називають кінцеву послідовність вершин і дуг, в якій кожен елемент інцидентен попередньому і наступному.

Циклом називають ланцюг, в якій перша і остання вершини

співпадають. При цьому довжиною шляху (або циклу) називають число складових його ребер. Якщо вершини  $u$  та  $v$  є кінцями деякого ребра, то згідно з цим визначенням, послідовність  $(u, v, u)$  є циклом. Щоб уникнути таких «вироджених» випадків, визначення циклу уточнюють, вводячи поняття простого і елементарного шляху (циклу).

Шлях (або цикл) називають простим, якщо ребра в ньому не повторюються; елементарним, якщо він простий і вершини в ньому не повторюються.

Основні властивості шляхів і циклів:

– будь-який шлях, що з'єднує дві вершини, містить елементарний шлях, що з'єднує ті ж дві вершини;

– всякий простий неелементарний шлях містить елементарний цикл;

– всякий простий цикл, що проходить через деяку вершину (або ребро), містить елементарний (під-) цикл, що проходить через ту ж вершину (або ребро);

– петля – елементарний цикл.

Бінарне відношення на множині вершин графа, заданий як «існує шлях з  $u$  в  $v$ », є відношенням еквівалентності і, отже, розбиває це безліч на класи еквівалентності, що називаються компонентами зв'язності графа. Якщо у графа рівно одна компонента зв'язності, то граф зв'язний. На компоненті зв'язності можна ввести поняття відстані між вершинами як мінімальну довжину шляху, що з'єднує ці вершини.

Всякий максимальний зв'язний підграф графа називається зв'язною компонентою (або просто компонентою) цього графа. Слово «максимальний» позначає «максимальний відносно включення», тобто такий, що не міститься в зв'язному підграфі з більшим числом елементів.

Ребро графа називається мостом, якщо його видалення збільшує число компонент.

Додаткові характеристики графів.

Граф називається:

- зв'язковим, якщо для будь-яких вершин  $u, v \in V$  існує шлях з  $u$  в  $v$ ;
- сильно зв'язковим або орієнтовано зв'язковим, якщо він орієнтований, і з будь-якої вершини в будь-яку іншу є орієнтований шлях;
- деревом, якщо він зв'язний і не містить неелементарних циклів;
- повним, якщо будь-які його дві (різні, якщо не допускаються петлі) вершини з'єднані ребром;
- дводольним, якщо його вершини можна розбити на дві неперетинних підмножини  $V_1$  і  $V_2$  так, що будь-яке ребро з'єднує вершину з  $V_1$  з вершиною з  $V_2$ ;
- $k$ -дольним, якщо його вершини можна розбити на  $k$  неперетинних підмножин так, що не буде ребер, що з'єднують вершини однієї підмножини між собою;
- повним дводольним, якщо кожна вершина одної підмножини з'єднана ребром з кожною вершиною іншої підмножини;
- планарним, якщо граф можна зобразити діаграмою на площині без перетинань ребер;
- зваженим, якщо кожному ребру графа поставлено у відповідність деяке число, зване вагою ребра;
- ейлеровим, якщо існує цикл, що містить всі ребра (Ейлером цикл);
- мультиграфом, якщо він містить кратні ребра, тобто ребра, що мають своїми кінцями одну і ту ж пару вершин;
- псевдографом, якщо в ньому допускається наявність петель;
- простим графом, якщо граф не містить ані петель, ані кратних ребер.

Існують узагальнення поняття «граф»: гіперграф – граф, до якого ребро може з'єднувати більше двох вершин, ультраграф і інші.

Існує ряд способів представлення графів для їх зберігання і комп'ютерної обробки. Вибір того, чи іншого способу залежить від видів розв'язуваних завдань, розміру графа і його щільності.

Основним способом представлення графів в інформатиці є матриця

суміжності. У цій матриці і стовпці, і рядки відповідають вершинам графа. У кожному осередку цієї матриці записується число, що визначає наявність зв'язку від вершини-рядка до вершини-колонки (або навпаки). Цей спосіб є найбільш зручним для подання щільних графів. Недоліком матриць суміжності є витрати пам'яті (пропорційні квадрату кількості вершин).

У матриці інцидентності рядки відповідають вершинам графа, а стовпці – ребрах. Елемент матриці (на перетині рядка  $i$  зі стовпцем  $j$ ) дорівнює 1, якщо дуга виходить з  $i$  в  $j$ , -1, якщо зв'язок виходить з  $j$  в  $i$ , і нулю в усіх інших випадках (тобто якщо зв'язок є петлею або не інцидентен вершині). Даний спосіб представлення графа є найбільш витратним по пам'яті (розмір пропорційний  $|V| \cdot |E|$ ), тому застосовується дуже рідко, в особливих випадках (наприклад, для швидкого знаходження циклів в графі).

У списку суміжності кожної вершині графа відповідає рядок, в якому зберігається список суміжних вершин. Така структура даних не є таблицею в звичайному розумінні, а являє собою «список списків». Кількість пам'яті –  $O(|V| + |E|)$ . Цей спосіб є найбільш зручним для подання розріджених графів, а також при реалізації базових алгоритмів обходу графа в ширину або глибину, де потрібно швидко отримувати «сусідів» поточної вершини.

У списку ребер кожному ребру графа відповідає рядок, в якій зберігаються дві вершини, інцидентні цьому ребру. Кількість пам'яті –  $O(|E|)$ . Цей спосіб – найбільш компактний, тому часто застосовується для зовнішнього зберігання або обміну даними.

## 1.2 Числові характеристики мереж

Для опису властивостей окремих вузлів (вершин графів) використовуються наступні параметри [1]:

- вхідні ступінь вузла – кількість зв'язків, які входять в вузол;
- вихідна ступінь вузла – кількість зв'язків, що виходять з цього вузла;

- відстань між вузлами;
- ексцентричність (eccentricity) – найбільша з мінімальних відстаней від даного вузла до інших;
- посередництво (betweenness), що показує, скільки найкоротших шляхів проходить через даний вузол.

Мережі (графи) в цілому характеризуються такими параметрами, як:

- кількість вузлів ( $n$ ),
- кількість зв'язків ( $m$ ),
- відстань між вузлами,
- середня відстань від одного вузла до інших,
- щільність мережі - співвідношення наявних та можливих зв'язків,
- діаметр мережі - найбільша відстань між вузлами в мережі;
- та інші.

Відстань між вузлами визначається як кількість кроків, які необхідно зробити, щоб за існуючими ребрах дістатися від одного вузла до іншого. Найкоротшим шляхом (SP, shortest path) між вузлами називають мінімальну відстань між ними.

Однією з характеристик мережі в цілому є середній найкоротший шлях – середня мінімальна відстань між вузлами, узята по всіх парах вузлів:

$$l_s = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \geq j} l_{ij}, \quad (1.1)$$

де  $n$  – кількість вузлів;

$l_{ij}$  – найкоротша відстань між вузлами  $i$  та  $j$ .

Важливою характеристикою мережі є її діаметр, який дорівнює максимальній з попарних відстаней:

$$l_{\max} = \max_{i,j} (l_{ij}). \quad (1.2)$$

Деякі мережі можуть виявитися незв'язними, тобто знайдуться вузли, відстань між якими виявиться нескінченним. Відповідно, середній шлях може виявитися також рівним нескінченності. Для обліку таких випадків вводиться поняття середнього інверсного шляху між вузлами, що розраховується за формулою

$$l_{inv} = \left( \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \geq j} l_{ij}^{-1} \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Коефіцієнт кластеризації мережі був запропонований Д. Уаттсом (D. Watts) і С. Строгатцем (S. Strogatz) в 1998р [13]. Цей коефіцієнт характеризує тенденцію до утворення груп взаємопов'язаних вузлів, так званих клік (clique).

Для конкретного вузла коефіцієнт кластеризації показує, скільки найближчих сусідів даного вузла є також найближчими сусідами один для одного. Коефіцієнт кластеризації  $C_i$  для вузла  $i$  дорівнює відношенню числа трикутників ( $\Delta_i$ ) з вершиною  $i$  до числа виделок ( $V_i$ ) (два зв'язки, що виходять з вузла) з основою в цьому ж вузлі:

$$C_i = \frac{\Delta_i}{V_i}. \quad (1.4)$$

Наприклад, в графі (рис. 1.2) існують три «вилки» з вершиною в першому вузлі: 213, 214 і 314, а «трикутник» тільки один (213). Тому коефіцієнт кластеризації першого вузла дорівнює  $C_1 = 1/3$ . Аналогічним чином легко отримати, що  $C_2 = C_3 = 1$  і  $C_4 = 0/0 = 1$ .

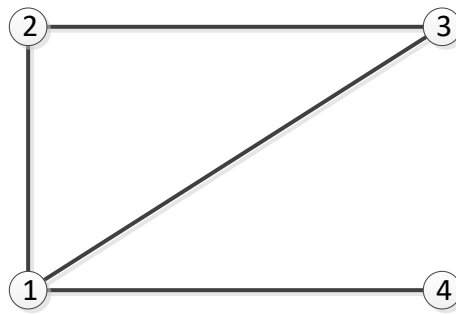


Рисунок 1.2 – Приклад графа

Коефіцієнт кластеризації вузла можна обчислити і не вдаючись до перерахування трикутників і вилок, а безпосередньо з матриці суміжності  $A_{i,j}$ :

$$C_i = \frac{\sum_{j,m} A_{ij} A_{jm} A_{mi}}{k_i(k_i - 1)}, \quad k_i = \sum_j A_{ij}, \quad (1.5)$$

де підсумовування ведеться по всіх вузлах.

Коефіцієнт кластеризації всій мережі дорівнює середньому значенню коефіцієнтів кластеризації вузлів:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.6)$$

Для розглянутого графа (рис. 1.2)  $C = (1/3 + 1 + 1 + 0) / 4 = 7/12$ .

Поряд з коефіцієнтом кластеризації мережі (1.6), заснованому на коефіцієнтах кластеризації вузлів, для тих же цілей використовують [1] близький, але не тотожний йому показник – транзитивність:

$$T = \frac{\text{tr}(A^3)}{\sum_i k_i(k_i - 1)} = \frac{\sum_i (A^3)_{ii}}{\sum_i k_i(k_i - 1)}, \quad (1.7)$$

Транзитивність мережі пов'язана з кількістю трикутників і вилок в ній співвідношенням

$$T = \frac{\sum \Delta_i}{\sum V_i}. \quad (1.8)$$

Для графа з прикладу (рис. 1.3)  $T = (1+1+1+0)/(3+1+1+0) = 3/5$ .

### 1.3 Поняття «складних мереж»

Терміни «мережа» і «граф» багато в чому схожі. При вивченні структури мережі, її топології математичною моделлю мережі є граф, тому терміни «мережа» і «граф» часто вживаються як синоніми. Різниця між цими поняттями пов'язано з метрикою простору (навіть точніше – з його наявністю). Мережа (електрична, транспортна) розгортається в деякому метричному просторі, наприклад, на площині (рис. 1.3), на поверхні сфери, в тривимірному просторі і т.д.

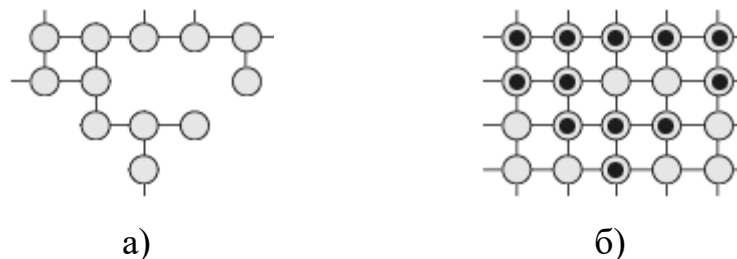


Рисунок 1.3 – Мережа, утворена накладанням графа на дискретний двовимірний простір

Граф, будучи суто математичним, абстрактним поняттям, є внепространственной об'єктом. Це означає, що при його вивченні абстрагуються і від метрики простору, в якому він знаходиться, і від існування самого цього «зовнішнього» простору. Проте, дане відмінність часто ігнорується і термін «мережа» вживається як більш сучасний синонім терміну «граф».

В кінці ХХ століття сформувався новий науковий напрям: теорія складних мереж. Незважаючи на те, що в розгляд теорії складних мереж потрапляють різні мережі – електричні, транспортні, інформаційні, найбільший внесок в розвиток цієї теорії внесли дослідження соціальних мереж. Термін «соціальна мережа» позначає зосередження соціальних об'єктів, які можна розглядати як мережу (або граф), вузли якої - об'єкти, а зв'язку – соціальні відносини. Цей термін був введений в 1954 році соціологом з «Манчестерської школи» Дж. Барнсом (J. Barnes) в роботі «Класи і збори в норвезькому острівному приході». У другій половині ХХ століття поняття «соціальна мережа» стало популярним у західних дослідників. У теорії соціальних мереж отримало розвиток такий напрямок, як аналіз соціальних мереж (Social Network Analysis, SNA). Сьогодні термін «соціальна мережа» позначає поняття, яке виявилось ширше свого соціального аспекту, воно включає, наприклад, багато інформаційні мережі, в тому числі і WWW.

В даний час термін «складні мережі» охоплює мережі, що володіють такими властивостями:

- великі розміри;
- елементи випадковості при формуванні;
- зростання (зміна) в часі.

Типовими завданнями складних мереж є:

- дослідження стандартних характеристик графів для складних мереж різної природи;
- дослідження статистичних властивостей, які характеризують

поведінку мереж;

- моделювання складних мереж, їх візуалізація;
- моделювання і вивчення різних «фізичних» процесів на складних мережах – дифузії, епідемічних процесів, різних потоків (інформації, електричного струму і т.д.);
- вивчення прикладних характеристик мереж – уразливості мереж, методи відновлення, захисту та знищення мереж (наприклад, скільки вузлів потрібно «відключити» для того, щоб мережа втратила зв'язність);
- передбачення поведінки мереж при зміні структурних властивостей.

При аналізі складних мереж як і в теорії графів, досліджуються параметри окремих вузлів, параметри мережі в цілому, мережеві підструктури. Незважаючи на те, що математичною основою при вивченні структури мережі і її топології є теорія графів, існують деякі відмінності в термінології: вершин графа відповідають вузли мережі, а ребрам (дугам) графа – зв'язку.

Класифікація мереж по типам може бути проведена різними способами. Для великих мереж з випадковою структурою однією з найважливіших характеристик є функція розподілу вузлів за ступенями  $p_k$  (тобто ймовірність того, що вузол має рівно  $k$  зв'язків). Для більшої частини складних мереж реального світу ця функція розподілу належить одному з наступних трьох сімейств (рис. 1.4).

1. Розподіл Пуасона  $Poisson(\lambda)$ :

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \propto Poisson(\lambda). \quad (1.9)$$

Такий закон розподілу породжується моделлю випадкової мережі (мережа Ердеша-Рен`ї - ER) і характеризується немонотонністю (рис. 1.4(a)).

2. Геометричний розподіл  $Geom(p)$ :

$$p_k = pq^{k-1} \propto \text{Geom}(p) \quad (q=1-p). \quad (1.10)$$

Графік такого закону (рис.1.4(б)) в координатах  $\log(p_k)$  від  $k$  має вигляд прямої лінії з негативним коефіцієнтом нахилу.

Безперервним аналогом геометричного розподілу є експоненціальний.

3. Ступеневий розподіл (розподіл Парето)  $Pareto(\theta, x_{\min})$ . Для безперервного носія його щільність має вигляд:

$$f(x) = \frac{\theta-1}{x_{\min}} \left( \frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\theta} = \frac{(\theta-1)x_{\min}^{\theta-1}}{x^{\theta}} \propto Pareto(\theta, x_{\min}). \quad (1.11)$$

Графік розподілу Парето (рис.1.4(в)) також має вигляд прямої з негативним коефіцієнтом нахилу, але в подвійних логарифмічних координатах  $\log(f(x))$  від  $\log(x)$ .

Для дискретного носія аналогом цього розподілу є розподіл Юла (Юла-Саймона)  $YS(\theta, k_{\min})$ . Він виражається через бета-функцію Ейлера  $B(x, y)$ :

$$p_k = \frac{B(k, \theta)}{B(k_{\min}, \theta-1)} \propto YS(\theta, k_{\min}). \quad (1.12)$$

У межі  $k \rightarrow \infty$  розподіл Юла-Саймона прагне до розподілу Парето (1.11) (показаний точками на рисунку 1.4(в)).

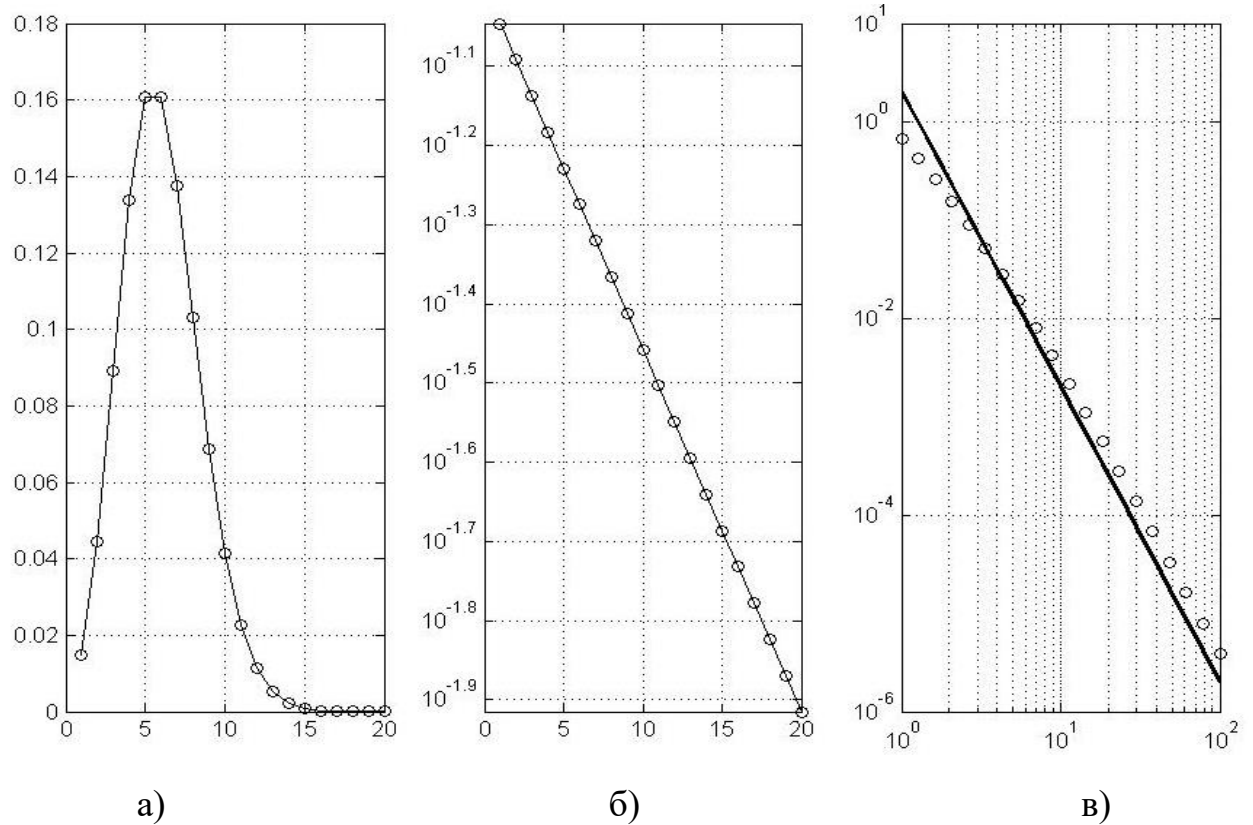


Рисунок 1.4 – Типові графіки розподілів вузлів мережі за ступенями вершин:  
 а) пуасонівське, б) геометричне, в) ступеневе / Юла-Саймона

#### 1.4 Основні моделі мереж

ER – мережа Ердеша-Рен`ї – це так званий випадковий граф. Модель цього графа виникла історично першою. В середині ХХ століття цю модель запропонували класики сучасної комбінаторики і теорії ймовірностей П. Ердеш та А. Рен`ї. Ердеш – це, мабуть, одна з найяскравіших постатей в математиці ХХ століття. Йому належать сотні статей і завдань, які справили величезний вплив на розвиток багатьох математичних дисциплін. Рен`ї також відіграв значну роль у формуванні угорської ймовірнісної школи, і його ім'ям названо математичний інститут в Будапешті [14].

Мережа Ердеша-Рен`ї [1], [14] – це така мережа, коли кожна пара вузлів з'єднана з ймовірністю  $\lambda$ . З ростом  $\lambda$  від 0 до 1 граф стає все більш щільним. При  $\lambda = 0$  отримуємо порожній граф (граф, який не має ребер), при

$\lambda = 1$  – повний граф, тобто граф, в якому кожна вершина з'єднана з кожною. При фіксованій кількості вузлів мережі ( $N$ ) єдиним вхідним параметром моделі Ердеша-Рен`ї є ймовірність зв'язку.

Простота цієї моделі дозволяє отримувати різні аналітичні оцінки. Так, в межі функція розподілу ступенів вузлів  $p_k$  відповідає закону Пуассона  $Pois(\lambda)$  (1.9).

Середня довжина найкоротшого шляху між вузлами становить

$$l_{inv} \propto \log(N). \quad (1.13)$$

У статистичному ансамблі випадкових мереж всіх можливих графів з заданим числом вузлів  $N$  та зв'язків  $L = \lambda N$  мають однакову статистичну вагу реалізації (однакову ймовірність появи).

Модель ER добре описує властивості мереж, в яких множина вузлів є статичною, а динамічні властивості обумовлені виникненням зв'язків. До таких мереж відносяться транспортні або енергетичні мережі на початковій стадії їх розвитку. У той же час, розвиток, наприклад, транспортної мережі супроводжується не тільки будівництвом доріг (тобто зв'язків), а й виникненням нових вузлів (станцій, населених пунктів) і тоді ER-модель стає непридатною. Тим більше ця модель непридатна для моделювання соціальних, комп'ютерних, інформаційних мереж, тобто таких, де ймовірності з'єднання вузлів не можна вважати ані рівними, ані незалежними.

Сучасні моделі випадкових графів покликані описувати зростання різних мереж – соціальних, біологічних, транспортних. Але в першу чергу мова піде про інтернет. У 90-і роки ХХ століття, коли інтернет тільки зароджувався, дослідники вже задалися питанням, яким законам підкоряється зростання інтернету і яка найбільш адекватна модель для опису властивостей цієї мережі.

У 1999 році фізик з університету Нотр Дам (США) А.-Л.Барабаші (Albert-Laszlo Barabasi) разом зі своєю аспіранткою Р. Альберт (Reka Albert)

вивчали властивості реальних мереж з дещо іншої точки зору. Вони досліджували закон розподілу вузлів деяких реальних мереж (наприклад таких, як метаболічні мережі і білкові взаємодії в клітинах, структура авіаційних повідомлень в США, структура Інтернету і т. Д. [8]) по числу зв'язків. Результат виявився несподіваним. Замість розподілу числа зв'язків згідно із законом Пуассона (1.9), при якому є строгий максимум близько середнього значення, для багатьох реальних мереж такого середнього значення не існує, а відповідний імовірнісний розподіл підпорядковується закону Парето (1.11) (точніше кажучи, закону Юла-Саймона(1.12)).

Іншими словами, у багатьох реальних мережах невелике число вузлів (хабів) мають дуже багато зв'язків, а величезна кількість вузлів містить лише кілька зв'язків. Такі мережі отримали назву безмасштабних мереж (scale free networks).

Барабаші і Альберт запропонували [7] просту і елегантну модель виникнення та еволюції безмасштабних мереж (BA-модель). Вони показали, що для виникнення безмасштабних мереж необхідні дві умови.

Рост. Починаючи з невеликого числа  $m_0$  вузлів, на кожному часовому кроці додається один новий вузол з  $m \leq m_0$  зв'язками, які з'єднують цей новий вузол з  $m$  різними вже існуючими вузлами.

Переважає приєднання (Preferencial attachment). Ймовірність  $p_i$  того, що новий вузол приєднається до існуючого ( $i$ ) пропорційна кількості зв'язків у цього вузла ( $k_i$ ):

$$p_i = \frac{k_i}{2(N-1)}. \quad (1.14)$$

Для безмасштабних мереж середня довжина найкоротшого шляху між вузлами набагато менше, ніж для ER-моделі (1.13) та складає

$$l_s \propto \log(\log(N)). \quad (1.15)$$

З ростом графа Барабаші-Альберт (графа БА) ряд його числових характеристик сходиться до стаціонарних значень. Так, відома стаціонарна ймовірність  $p_k$  того, що випадково обрана вершина має ступінь зв'язності  $k \geq m$  [9]:

$$p_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \cdot Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad (1.16)$$

У той же час багато інших структурні характеристики БА-моделі, важливі з прикладної точки зору, такі як коефіцієнт кластеризації, статистика подграфів певної конфігурації та інші, залишаються маловивченими. А якщо можна вирішити завдання вимагає їх обліку, то вони оцінюються наближеними асимптотическими методами, або розраховуються шляхом статистичного моделювання [7], [8], [9].

Існують процедури побудови мереж, коли до впорядкованої структури додаються випадкові зв'язки. Найбільш відомий приклад такої мережі – так звана мережа малого світу (Small World (SW)) [1].

Соціолог з Гарвардського університету Стенлі Мілграм [15] (Stanly Milgram) в 1960 році емпірично показав, що будь-яких двох людей на Землі можна з'єднати ланцюжком з шести знайомих. Це твердження отримало широку популярність і стало називатися «явищем тісного світу» (small world phenomenon), а після виходу Бродвейській п'єси, а потім і художнього фільму з відповідним сюжетом, ще й «шість ступенів поділу» («six degrees of separation»).

Мілграм провів експеримент з тестування властивостей маленького світу, коли люди явно будують шляхи через соціальну мережу, яка визначається знайомством. Він задався питанням, яке «відстань» між двома випадково вибраними людьми. Під відстанню розуміється кількість

знайомств, необхідне для встановлення зв'язку між даними людьми. Мілграм поступив таким чином – оскільки він жив в Бостоні, то було обрано далекий від Бостона штат – Небраска, і випадково обраним людям було роздано конверти, які потрібно було передати в Бостон. Конверти можна було передавати тільки через своїх знайомих і родичів.

З цією метою він вибрав цільову людину в мережі – біржового маклера, який жив в передмісті Бостона. Він надав його ім'я, адресу, професію і деяку особисту інформацію, але обмовив, що учасники не можуть відправити лист прямо в ціль; тобто, кожен учасник міг тільки просунути лист, відправивши його одному знайомому, якого він знав на основі імені, з метою досягнення мети якомога швидше. Кожен лист, таким чином, проходив послідовно від одного знайомого до іншого, закриваючись на біржовому брокерові за межами Бостона.

Таким чином, листи виступали в якості віртуальних «трасуючими-щиків», що відображають шляхи через соціальну мережу. Мілграм отримав вельми несподіваний результат: в середньому кожен конверт пройшов через шість чоловік, забезпечуючи перший конкретний доказ існування великої кількості коротких шляхів, що з'єднують пари індивідуумів в суспільстві, а також забезпечуючи основу для числа «шість» в результаті поп-культурної мантри. Робота Мілграма [16], стала загальноприйнятною, принаймні, на якісному рівні: соціальні мережі, як правило, демонструють дуже короткі шляхи між практично довільними парами вузлів.

Так і народилася теорія «шести рукошукань». тобто кожна людина пов'язаний з будь-яким іншим ланцюгом не більш ніж шість особистих знайомств. У цьому сенсі про наш світ кажуть, як про малий світі – «small world».

На рисунку 1.5 показано зображення з оригінальної статті Мілграма в «Психології сьогодні», що показує «складові» успішні шляхи, що сходяться на цільовому людині. Кожен проміжний крок позиціонується на середній відстані всіх ланцюгів, які завершили цю кількість кроків.

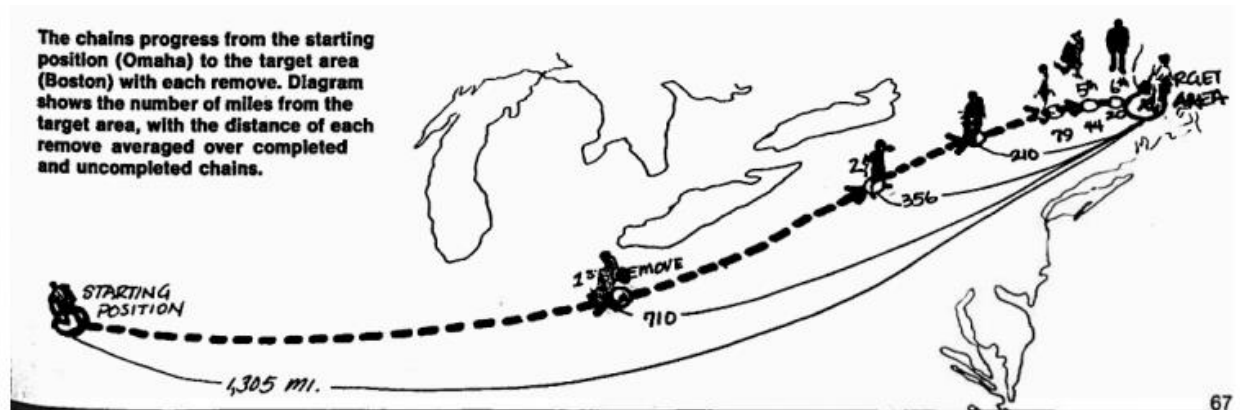


Рисунок 1.5 – Мережа «малого світу» зі статті Мілграма

В середині 1990-х років С. Строгатц (Steven Strogatz) і його аспірант Д. Воттс (Duncan Watts) з Корнелльського університету в Ітаці (штат Нью-Йорк) вирішили вивчити властивості мереж, які мають властивість тісного світу. Комп'ютерне моделювання різних типів мереж показало, що цією властивістю володіють мережі з високим ступенем кластеризації і малої середньою довжиною шляху між вузлами. Вони запропонували модель переходу від великого (регулярного) світу до малого. У 1998 році вони опублікували в журналі Nature [13] статтю, в якій показали, що такі реальні мережеві структури як мережа нейронних зв'язків хробака нематода, мережа акторів Голлівуду і мережу з приблизно 5000 електростанцій США також мають властивість «тісного світу». Одночасно вони запропонували математичну модель мереж «малого світу», властивості якої є суперпозицію властивостей регулярних, періодичних решіток і пуассонівських випадкових мереж. Наприклад, дослідження, проведені в університеті Нотр Дам, США, показали, що середнє число кліків, які необхідно зробити, щоб перейти від однієї Web-сторінки на будь-яку іншу (при загальній кількості вузлів  $N$ ), описується формулою

$$D \approx 0.35 + 2.06 \cdot \log(N). \quad (1.17)$$

Модель Ваттса-Строгаца [13] являє собою модель генерації випадкового графа, що має високий коефіцієнт кластеризації вершин (середнє значення по всіх вершин графа величини, що характеризує зв'язність околу вершини) і відносно невелику середню довжину шляху (число вершин в простому півшляху). Для генерації графа використовуються параметри  $N$  (число вершин),  $k$  (ступінь вершин) і  $0 \leq \beta \leq 1$  (спеціальний параметр), причому  $1 \ll \ln(N) \ll k \ll N$ .

## 2 АСОРТАТИВНІСТЬ ЕЛАСТИЧНИХ МЕРЕЖ

### 2.1 Фрактали та фрактальна розмірність мереж

Поява фракталів (ще не отримали цього імені) в математичній літературі в кінці XIX століття була зустрінута з сумної неприязню, як це бувало і в історії розвитку багатьох інших математичних ідей. Відомий математик того часу, Шарль Ерміт, навіть охрестив їх монстрами. Принаймні, математичний загал визнав їх за патологію, що представляє інтерес тільки для дослідників, які зловживають математичними примхами, а не для справжніх вчених.

В результаті зусиль Бенуа Мандельброта таке ставлення змінилося, і фрактальна геометрія стала шанованою прикладною наукою. Мандельброт ввів у вживання термін фрактал [1], ґрунтуючись на теорії фрактальної (дробової) розмірності Хаусдорфа, запропонованої в 1919 році. За багато років до появи його першої книги по фрактальній геометрії, Мандельброт приступив до дослідження таких патологій в природі. Він відшукав нішу для множин Кантора, кривих Пеано, функцій Вейєрштрасса та їх численних різновидів, які вважалися нонсенсом. Він і його учні відкрили багато нових фракталів, наприклад, фрактальне броунівський рух для моделювання лісового та гірського ландшафтів, флуктуації рівня річок і биття серця. З виходом у світ його книг додатки фрактальної геометрії стали з'являтися як гриби після дощу. Це торкнулося як багатьох прикладних наук, так і чистої математики. На сьогоднішній день фрактали активно використовуються не тільки для аналізу даних, а й для стиснення зображень, комп'ютерної графіки (малювання гірських ландшафтів, хмар, берегових ліній і т.п.) в кіноіндустрія, в комп'ютерних іграх.

Французький математик Анрі Пуанкаре ініціював дослідження в області нелінійної динаміки близько 1890 року, були що призвело до появи сучасної теорії хаосу. Інтерес до предмета помітно збільшився, коли Едвард

Лоренц, який займався нелінійним моделюванням погоди, в 1963 році виявив неможливість довгострокових прогнозів погоди. Лоренц зауважив, що навіть незначні помилки при вимірюванні параметрів поточного стану погодних умов можуть призвести до абсолютно неправильним прогнозам про стан погоди в майбутньому. Ця суттєва залежність від початкових умов лежить в основі математичної теорії хаосу.

Траєкторії часток броунівського руху, яким займалися Роберт Броун ще в 1828 році і Альберт Ейнштейн в 1905 році, є прикладом фрактальних кривих, хоча їх математичний опис було дано тільки в 1923 році Норбертом Вінером.

У 1890 році Пеано сконструював свою знамениту криву – безперервне відображення, що переводить відрізок в квадрат і, отже, підвищує його розмірність з одиниці до двійки. Границя сніжинки Коха (1904 рік), чия розмірність  $d \approx 1.2618$ , – це ще одна добре відома крива, що підвищує розмірність. Фрактал, жодним чином не схожий на криву, який Мандельброт назвав пилом – це класична множина Кантора (1875 або раніше). Ця множина настільки розріджена, що не містить інтервалів, але, тим не менш, має стільки ж точок, скільки інтервал. Мандельброт використав такий «пил» для моделювання стаціонарного шуму в телефонії. Фрактальний пил того чи іншого роду з'являється в численних ситуаціях. Фактично, він є універсальним фракталом в тому сенсі, що будь-який фрактал – аттрактор системи ітерованих функцій являє собою або фрактальну пил, або її проекцію на простір з більш низькою розмірністю.

Різні деревовидні фрактали застосовувалися не тільки для моделювання дерев-рослин, але і бронхіального дерева (повітроносні гілки в легких), роботи нирок, кровоносної системи до ін. Цікаво відзначити припущення Леонардо да Вінчі про те, що все гілки дерева на даній висоті, складені разом, рівні по товщині стовбура (нижче їх рівня). Звідси випливає фрактальна модель для крони дерева у вигляді поверхні-фрактала.

Багато чудові властивості фракталів і хаосу відкриваються при

вивченні ітерованих відображень. При цьому починають з деякою функції  $y = f(x)$  і розглядають послідовність  $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$

У комплексній площині роботи такого роду походять до Келі, який досліджував метод Ньютона знаходження кореня комплексних, а не тільки дійсних, функцій (1879). Чудового прогресу у вивченні ітерованих комплексних відображень домоглися Гастон Жюліа і П'єр Фату (1919). Природно, все було зроблено без допомоги комп'ютерної графіки. У наші дні, багато хто вже бачили барвисті постери із зображенням множин Жюліа і Мандельброта, тісно з ними пов'язаного. Освоєння математичної теорії хаосу природно почати саме з ітерованих відображень. Вивчення фракталів і хаосу відкриває чудові можливості, як в дослідженні нескінченного числа додатків, так і в області чистої математики. Але в той же час, як це часто трапляється, відкриття спираються на піонерські роботи великих математиків минулого. Сер Ісаак Ньютон розумів це, кажучи: «Якщо я і бачив далі інших, то тільки тому, що стояв на плечах гігантів».

Мандельброт [3] запропонував наступне визначення фрактала: «Фракталом називається множина, метрична розмірність (наприклад, розмірність Хаусдорфа-Безиковича) якої відрізняється від топологічної».

Це визначення в свою чергу вимагає визначень термінів множина, розмірність Хаусдорфа-Безиковича ( $d$ ) та топологічна розмірність ( $d_T$  яка завжди дорівнює цілому числу).

Згідно з іншим визначенням фракталом називається об'єкт, який має дробову (нецілочисельне) розмірність.

В даний час визначальною властивістю фракталів прийнято вважати масштабну інваріантність, або самоподібність.

Фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні цілому.

Так, якщо дан графік фрактального процесу, але позначення на осях не вказані, то неможливо визначити масштаб. Історія вивчення фракталів Бенуа Мандельбротом почалася саме з того, що він одного разу переплутав добовий

графік біржових котирувань цін на бавовну з погодинним лагом і річний графік цих же цін з помісячним лагом.

Наприклад, обриси гірського ландшафту при погляді здалеку складаються з величезних піків. Наблизившись до них, можна розглянути піки («зуби») поменше і так далі аж до самого малого масштабу, який ще можливо розрізнити. Насправді, маючи в своєму розпорядженні тільки зовнішній вигляд обрисів гряди і не використовуючи жодної додаткової інформації, масштаб зображення оцінити неможливо.

Геометричні фрактали є множинами точок, вкладеними в «природний» евклідов простір.

Чітке визначення топологічної розмірності множини досить громіздко [4], але на інтуїтивному рівні топологічна розмірність дорівнює кількості координат, які необхідні для позиціонування елементів множини (точок) всередині неї. Наприклад, для позиціонування точки на лінії досить однієї координати – відстані від початку відліку, тобто довжини фрагмента лінії. Відповідно, топологічна розмірність лінії дорівнює 1. Можна відзначити, що орієнтація лінії в просторі неважлива: лінія може бути як на площині, так і в просторі, або, наприклад, на сфері. Плоска фігура, або поверхня мають  $d_T = 2$ , і дійсно, положення будь-якої її точки однозначно визначається двома координатами. Аналогічно, об'ємні фігури мають  $d_T = 3$ . Точка не має ні довжини, ні ширини, ні висоти і її топологічна розмірність дорівнює нулю.

Поняття метричної розмірності множини (як це і впливає з назви) пов'язане з вимірюванням цієї множини. Найпростішим способом такого виміру є покриття простору, що містить множину, безперервною послідовністю шаблонів і підрахунок мінімальної кількості необхідних шаблонів. На цьому принципі засновано визначення розмірності Мінковського і метод її підрахунку, званий box-counting.

Виберемо в якості шаблону множину з топологічної розмірністю, не меншою, ніж вимірювана множина. Наприклад, для вимірювання довжини

кривої можна вибрати відрізки, квадратики, куби (рис. 2.1) і т.д. Форма шаблону значення не має. З точки зору «чистої математики» найбільш правильними шаблонами є  $d$ -мірні кулі (відрізки, кола, кулі і т.д.), а з точки зору продуктивності комп'ютерних програм зручніше використовувати  $d$ -мірні куби (відрізки, квадрати, куби).

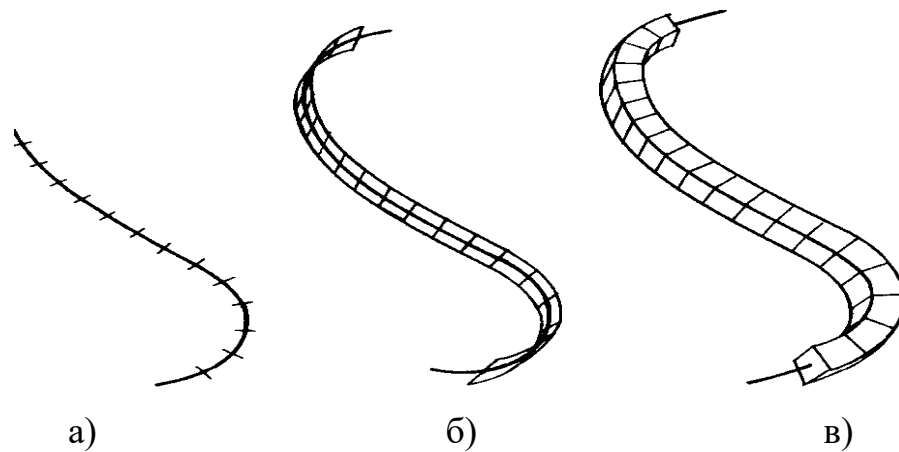


Рисунок 2.1 – Покриття кривої: а) відрізками; б) квадратами; в) кубами

Очевидно, що для звичайної кривої лінійний розмір шаблону ( $r$ ) та потрібна їх кількість  $N(r)$  пов'язані співвідношенням

$$N(r) \approx L/r. \quad (2.1)$$

Воно буде виконуватися тим точніше, чим менше шаблон.

Аналогічним чином можна виміряти площу, наприклад, кола покриваючи його квадратами розміру, який зменшується (рис. 2.2).

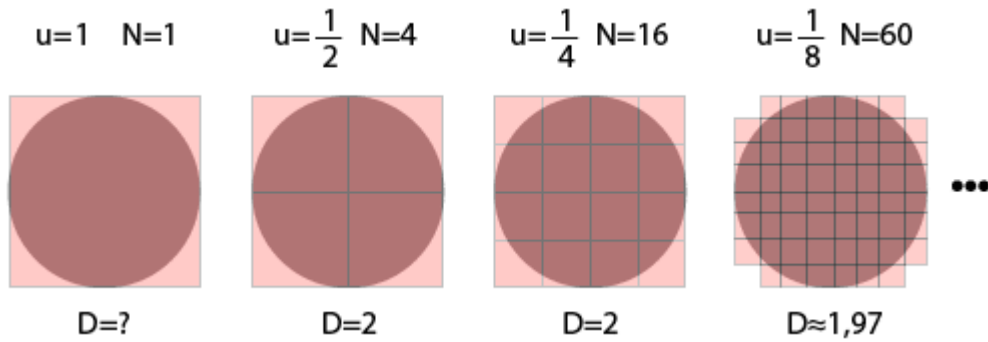


Рисунок 2.2 – Оцінювання метричної розмірності кола

У межі  $r \rightarrow 0$  матимемо:

$$N(r) = S / r^2, \quad S = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cdot N(r)). \quad (2.2)$$

Співставляючи вирази для  $N(r)$  (2.1)-(2.2), неважко встановити, що при  $r \rightarrow 0$  виконується співвідношення

$$N(r) = \text{const} / r^d, \quad (2.3)$$

звідки прямо випливає визначення фрактальної розмірності Мінковського:

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(1/r)} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(r)}. \quad (2.4)$$

На практиці оцінка розмірності фігури методом box-counting буде залежати від того, вдало чи не дуже шаблони накривають цю фігуру. Так, коло не дуже зручно покривається квадратними плитками – багато відходів, відповідно оцінка фрактальної розмірності матиме похибку (рис.2.3), причому систематичну: оцінка розмірності наближається до істинного значення або строго зверху, або строго знизу – в залежності від фігури.

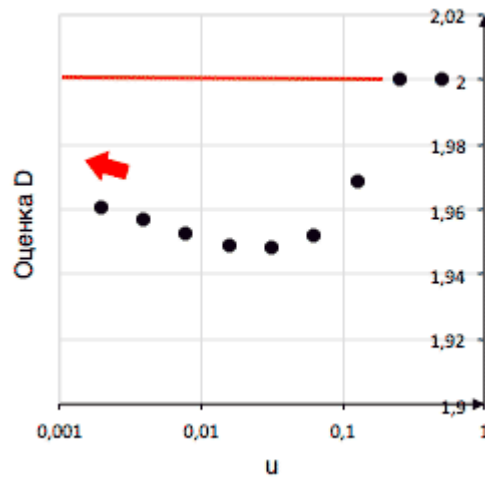


Рисунок 2.3 – Залежність оцінки розмірності кола від масштабу шаблонів

Фрактальна розмірність Хаусдорфа визначається дещо інакше. Будемо покривати множину шаблонами з лінійними розмірами  $w_i$ , які не перевищують деякого  $r$  (тобто  $w_i \leq r$ ). Така «технологія» зветься  $r$ -покриттями. Альфа-мірою Хаусдорфа називається величина, що дорівнює

$$F_\alpha = \liminf_{r \rightarrow 0} \sum_i w_i^\alpha. \quad (2.5)$$

При цьому, як і при box-counting, мається на увазі, що завжди використовується найбільш «економне»  $r$ -покриття серед можливих. В даному випадку використовується нижня межа зазначеної суми, взята за всіма можливими покриттями множини (що і позначається символом «inf» перед знаком суми). Надалі опустимо цей оператор для простоти запису.

Площа звичайної плоскої фігури дорівнює  $\alpha$ -мірі Хаусдорфа (2.5) при  $\alpha = 2$ . Справді: якщо «зеконмити» на діаметрі покриття не вийде (а для звичайної фігури це так), тобто якщо  $w_i = r$ , то з (2.5) та (2.2) випливає:

$$F_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_i w_i^2 = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(r)} r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} (N(r) \cdot r^2) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{const}{r^2} \cdot r^2 = S. \quad (2.6)$$

А що буде, якщо підрахувати таким способом довжину, або об'єм плоскої фігури (тобто  $\alpha$  – міру Хаусдорфа при  $\alpha \neq 2$ )?

$$\begin{aligned} F_1 = L &= \lim_{r \rightarrow 0} (N(r) \cdot r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\text{const}}{r^2} \cdot r \right) = \infty, \\ F_3 = V &= \lim_{r \rightarrow 0} (N(r) \cdot r^3) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\text{const}}{r^2} \cdot r^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Довжина плоскої фігури виявилася нескінченною, а обсяг – нульовий. Як і повинно бути згідно інтуїтивним уявленням. Справді: єдиною змістовною мірою множини точок, що утворюють плоску фігуру (або поверхню в просторі), є площа, і, відповідно, розмірність таких фігур дорівнює двом.

Узагальнюючи (2.5) та (2.7), матимемо:

$$F_\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_i w_i^\alpha = \begin{cases} \infty, & \alpha < d \\ 0, & \alpha > d \end{cases} \quad (2.8)$$

Отриманий вираз і є визначення розмірності Хаусдорфа (Хаусдорфа-Безиковича). Тобто фрактальна розмірність  $d$  задає межу значень  $\alpha$ , в якій  $\alpha$ -міра Хаусдорфа переходить з нескінченності в нуль. Значення  $F_\alpha$  при  $\alpha = d$ , як правило, є скінченим, але може бути й нульовим або нескінченим. Це несуттєво, важливо лише при якому саме значенні  $\alpha$  величина  $F_\alpha$  зазнає стрибок.

Чисельні значення фрактальних розмірностей Мінковського (2.4) та Хаусдорфа (2.8) для більшості множин збігаються. Важлива відмінність полягає в тому, що розмірність Хаусдорфа будь-якої зліченної множини (в тому числі й зліченно-нескінченної) дорівнює нулю, а розмірність Мінковського – не обов'язково [3], [4].

Класичним прикладом фрактала є крива, придумана в 1904р. Хельге фон Кохом (рис. 2.4).

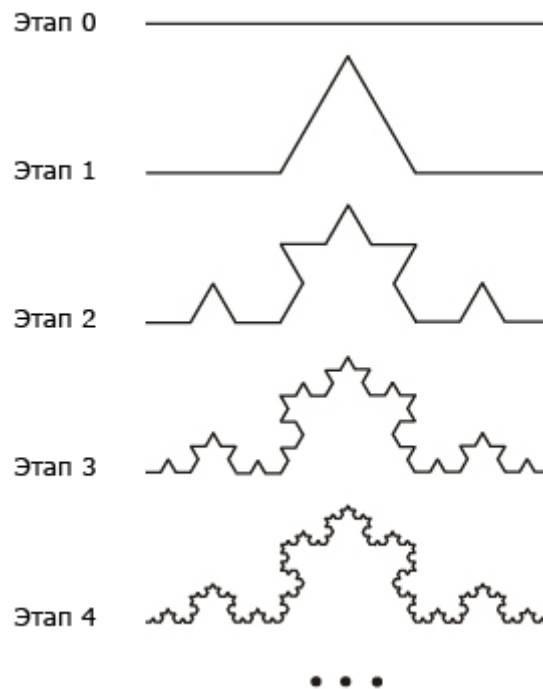


Рисунок 2.4 – Крива Коха

Фрактал розвивається в результаті багаторазового дії деякого генеруючого перетворення. Для кривої Коха таким перетворенням є заміна відрізка на ламану, що складається з чотирьох однакових сегментів (рис. 2.5). Почавши з прямолінійного відрізка і поетапно застосовуючи перетворення до все більш дрібних елементів, в межі ми отримаємо ідеальний фрактал: криву Коха (рис. 2.4).



Рисунок 2.5 – Генеруюче перетворення кривої Коха

Проміжні стадії розвитку фрактала (тобто фігури, одержувані на етапах  $k = 0, 1, 2, \dots < \infty$ ) називаються предфракталами.

Фрактали мають незвичайні властивості. Так, з точки зору звичайної, «шкільної» геометрії довжина кривої Коха нескінченна! Це очевидний парадокс, оскільки ця крива обмежена і може бути покрита прямокутником кінцевої площі. Справді: на кожному етапі довжина фігури збільшується на третину. Початково  $L_0 = 1$ , після першого етапу  $L_1 = 4/3$ , після другого –  $L_2 = 16/9$ . Довжина  $k$ -го предфрактала дорівнює  $(4/3)^k$ , тобто при  $k \rightarrow \infty$  довжина кривої також звернеться в нескінченність.

Фрактальну розмірність кривої Коха легко розрахувати аналітично. Покриватимемо її шаблонами розміром  $r = 3^{-k}$  (Що відповідає переходу від етапу до етапу). Очевидно, що кількість таких шаблонів складе  $N(r) = 4^k$ . Тоді, згідно з (2.4), розмірність Мінковського складе

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(1/r)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(4^k)}{\log(3^k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(4)}{\log(3)} = \log_3 4 \approx 1.26. \quad (2.9)$$

З іншого боку, згідно з (2.8) міра Хаусдорфа для цього фрактала дорівнює

$$F_\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i r_k^\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 4^k \cdot 3^{-k\alpha} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^{k(\log_3 4 - \alpha)}. \quad (2.10)$$

Очевидно, що точкою її переходу від  $\infty$  до 0 є значення  $d = \log_3 4$  (2.9), таким чином обидва визначення дають одне і те ж значення фрактальної розмірності даної фігури.

Іншими прикладами геометричних фракталів є трикутник і килим Серпінського (рис. 2.6). Їхня фрактальна розмірність становить  $d_\Delta = \log_2 3 \approx 1.58$  та  $d_K = \log_3 8 \approx 1.89$  відповідно.

Розглянуті вище геометричні фрактали є детермінованими. Крім точних фракталів, існують і випадкові. Так, берегові лінії, обриси гірських хребтів, форми хмар є прикладами випадкових геометричних фракталів. Одним з перших «практичних застосувань» фрактальної розмірності був розрахунок довжини берегової лінії Великобританії, виконаний Мандельбротом [3], що послужило вагомим аргументом на користь актуальності і практичної значущості фрактального аналізу.

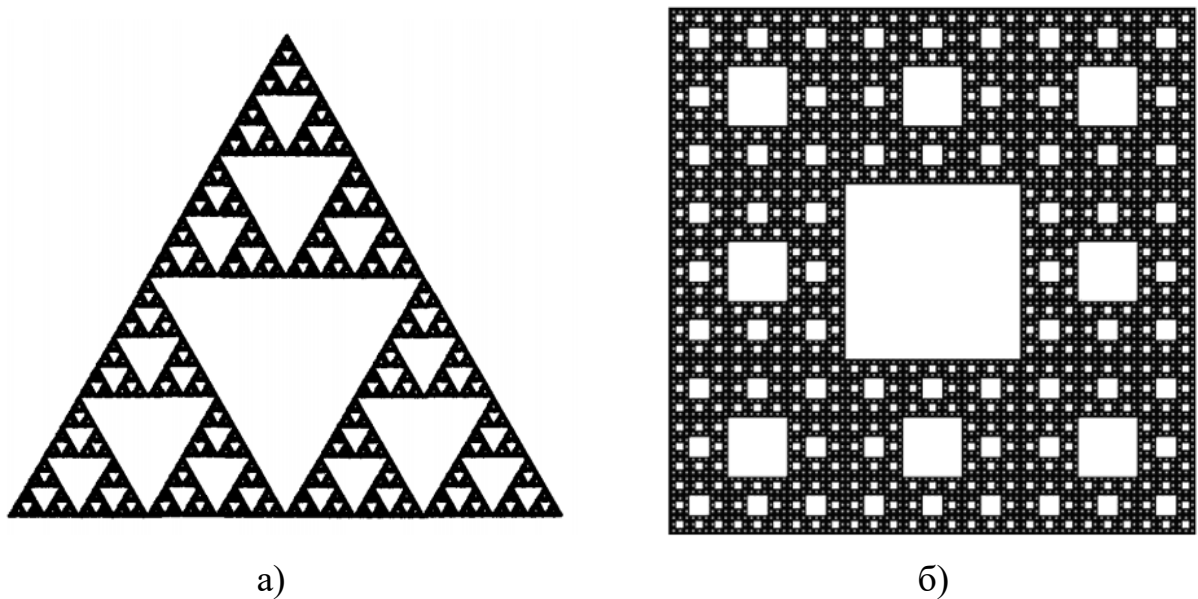


Рисунок 2.6 – Трикутник (а) і килим (б) Серпінського

## 2.2 Концепція еластичності мереж

Нехай граф  $G(V, E)$  спочатку містить дві вершини, з'єднані ребром. У кожен момент часу до дерева додається одна вершина і одне ребро, таким чином,  $V(t) = t + 1$ ,  $E(t) = t$ ,  $\Delta V(t) = 1$ ;  $\Delta E(t) = 1$ .

Порівняємо відносні швидкості приросту кількості вершин  $\delta V(t) = \Delta V(t) / V(t)$  та ребер  $\delta E(t) = \Delta E(t) / E(t)$ :

$$\delta E(t) = 1 \cdot \delta V(t - 1). \quad (2.11)$$

Розглянемо інший крайній випадок – повний граф. При тих же початкових умовах ( $V(1) = 2$ ,  $E(1) = 1$ ) вершина, що додається, з'єднується з усіма існуючими, тобто  $\Delta E(t) = E(t+1) - E(t) = t + 1$ ,  $E(t) = t(t+1)/2$ . Таким чином, для повного графа

$$\delta E(t) = 2 \cdot \delta V(t-1). \quad (2.12)$$

Розглянуті крайні випадки проілюстровані на рисунку 2.7.

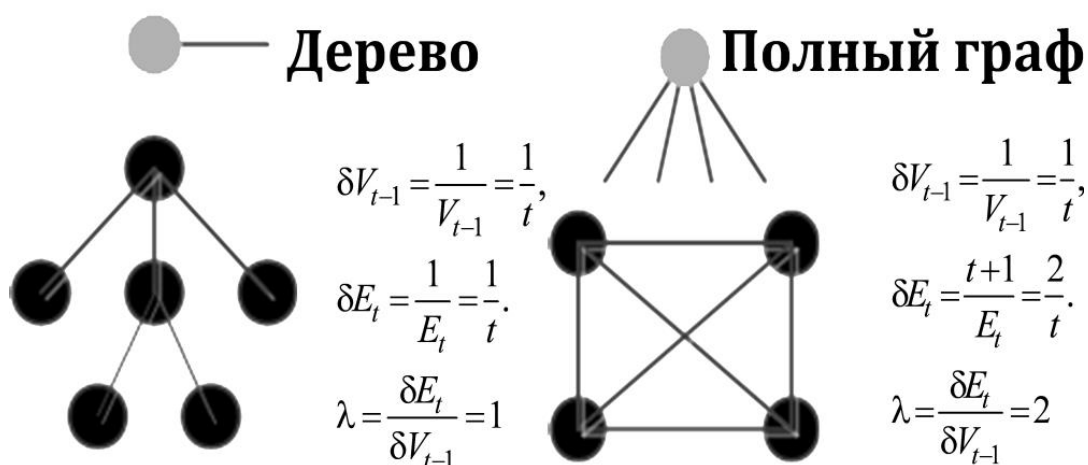


Рисунок 2.7 – Співвідношення між відносними приростами числа ребер і вершин мереж

Очевидно, що вирази (2.11) та (2.12) можна узагальнити на проміжний випадок  $1 < \lambda < 2$ :

$$\delta E(t) = \lambda \cdot \delta V(t) \cdot \frac{t+1}{t} = \lambda \cdot \delta V(t-1). \quad (2.13)$$

Параметр  $\lambda$  є еластичністю, тобто відношенням відносного приросту кількості ребер до відносного приросту кількості вершин:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta E(t)}{\delta V(t-1)}. \quad (2.14)$$

Варто відзначити, що в теорії мереж термін «еластичність» частіше застосовується в іншому сенсі – як міра стійкості мережі при видаленні вузлів [5]. Однак в більш загальному математичному сенсі цей термін широко вживається саме як відношення відносних швидкостей приростів функції і аргументу [4]. Саме цим й обґрунтовується застосування цього терміну в даній роботі.

Одним з важливих і корисних додатків поняття еластичності є те, що вона встановлює відповідність між швидкістю приросту кількості ребер  $\Delta E(t)$  і поточних середнім значенням цієї кількості  $e(t)$ . Якщо коефіцієнт еластичності  $\lambda$  фіксований, а кількість вершин служить, як зазвичай, мірою часу ( $\Delta V(t) = 1$ ), то матимемо:

$$\Delta E(t) = \lambda \frac{E(t)}{V(t)} \cdot \frac{t+1}{t} \approx \lambda \cdot e(t). \quad (2.15)$$

Таким чином, значення  $\lambda > 1$  показує, що кожна нова вершина додає в середньому більше ребер, ніж є в даний момент часу. Слід зазначити, що у всіх існуючих моделях МІМ це співвідношення дорівнює одиниці ( $\lambda = 1$ ).

З (2.14)-(2.15) випливає, що кількість ребер в мережі становить

$$E(V) = \frac{\Gamma(V + \lambda - 1)}{\Gamma(V - 1)\Gamma(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda \cdot B(V - 1, \lambda)}. \quad (2.16)$$

Можна відзначити, що в граничному випадку  $E(V) \xrightarrow{V \rightarrow \infty} CV^\lambda$ , що відповідає ступеневому законом розподілу.

Очевидно, що коефіцієнт еластичності можна використовувати як безмасштабну міру щільності мережі (графа).

Більш того: згідно [6] коефіцієнт еластичності зростаючої мережі є його фрактальної розмірністю в тому випадку, якщо вимірювати розмір мережі кількістю вершин, а під одиничною множиною (шаблоном) розуміти ребро.

Так, фрактальна розмірність Мінковського (box-counting dimension) для зростаючого об'єкта визначається як

$$d = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log N(R)}{\log R}. \quad (2.17)$$

де  $N(R)$  – кількість кубів з одиничною стороною, необхідних для покриття об'єкта діаметром  $R$ .

Ще одним важливим доповненням до теорії фрактальної розмірності може служити поняття локальної фрактальної розмірності [5], [10], [11].

Незважаючи на простоту, загальність і математичну коректність визначення розмірності Мінковського (2.4), практичні методи оцінювання фрактальної розмірності множин не засновані безпосередньо на цьому визначенні (як не засновані вони і на (2.17) в разі нескінченно зростаючих множин). Зазвичай фрактальну розмірність множин оцінюють як коефіцієнт регресії по залежності  $N(s)$ , побудованої в подвійному логарифмічному масштабі (тобто між  $\log(N)$  та  $\log(s)$ ), в той час як згідно з визначенням слід було б обчислювати коефіцієнт нахилу асимптоти цієї залежності при  $s \rightarrow \infty$ .

Безвідносно до причин такої підміни (якими можуть служити і обчислювальна складність оцінювання нахилу асимптоти, і фізичні обмеження накладаються на експеримент, і кінцева область застосовності самої фрактальної моделі) такий підхід фактично означає застосування (2.4), (2.17) не в початковій, а в диференціальній формі.

Згідно з правилом Лопітала меж (2.17), якщо вона існує, дорівнює:

$$d = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{d(\log N(R))}{d(\log R)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{dN / N}{dR / R}. \quad (2.18)$$

Іншими словами, якщо локальна фрактальна розмірність (2.18) існує, то вона збігається з глобальною фрактальною розмірністю (2.17). Саме цим і обумовлена коректність застосування диференціальної форми.

Важливою властивістю ідеальних фракталів (кривої Коха, трикутника Серпінського, L-систем та інших) є збіг локальної розмірності з глобальною. Точніше кажучи, для цих фракталів існує послідовність значень  $s = R / r$ , яка прагне до нескінченності, така, що при будь-якому значенні  $s$  з цієї послідовності локальна розмірність строго дорівнює глобальній.

Важливим фактом є те, що локальна фрактальна розмірність (2.18) збігається з коефіцієнтом еластичності  $\varepsilon_s^N$  функції  $N(s)$  відносно  $s$ :

$$d(s) = \frac{dN}{N} \bigg/ \frac{ds}{s} = \frac{dN}{ds} \cdot \frac{s}{N} = \varepsilon_s^N(s), \quad s = R / r. \quad (2.19)$$

Само поняття еластичності і коефіцієнт еластичності (2.19) широко використовуються в математиці (і, зокрема, в математичних моделях хімічних і економічних процесів) як міра відносних швидкостей зростання функції і її аргументу.

Таким чином, зіставивши визначення (2.17)-(2.19), можна сказати, що фрактальна розмірність множини (по Мінковському) дорівнює межі коефіцієнта еластичності цієї множини, якщо ця межа існує.

Для дискретних структур вираз (2.18) набуває вигляду

$$d = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\delta N}{\delta R}. \quad (2.20)$$

Це призводить до необхідності застосувати концепцію

еластичності (тобто різної відносної швидкості збільшення кількості ребер і вершин) до моделей масштабно-інваріантних мереж.

### 2.3 Асортативність мереж

Термін «асортативне змішування» спочатку з'явився в епідеміології та соціології, зокрема для опису змішування за расовою ознакою серед сексуальних партнерів [1].

У теорії мереж асортативне змішування характеризує тенденцію вершин у мережах з'єднуватися з іншими вершинами, які певним чином схожі (або навпаки відмінні) від них. У найпростішому випадку асортативне змішування розглядається відносно до ступеня вершин. Коефіцієнт асортативності визначається як коефіцієнт кореляції вузлів за їх ступенем [1], і в загальному випадку він лежить у діапазоні  $-1 \leq r \leq 1$ .

Відомо [1], [5], [6], [8], [9], що соціальні мережі мають в основному позитивну асортативність, а біологічні та технічні є дизасортативними. Моделі штучних мереж (модель ВА та інші) є асимптотично нейтральними.

Більш зручна форма цього коефіцієнта наведена в [5]:

$$r = \frac{S_1 N_3 - S_2^2}{S_1 S_3 - S_2^2}, \quad (2.21)$$

де

$$S_k = \sum_{i=1}^n d_i^k \quad N_3 = d^T A d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} d_i d_j, \quad (2.22)$$

де  $A$  – матриця суміжності мережі;

$d_i$  – ступінь вершини.

Не втрачаючи загальності, можна припустити, що вузли впорядковані за зменшенням ступені, тому індекс  $i$  вершини  $d_i$  є її рангом.

Як випливає з (2.22),  $N_3$  є єдиним компонентом (2.21), який залежить від структури мережі (тобто матриці суміжності  $A$ ). Таким чином, пошук структури екстремально асортативної / дизасортативної мережі є проблемою бінарного програмування:

$$N_3 = d^T A d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} d_i d_j \rightarrow \text{extr} \quad (2.23)$$

з обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} = d_i, \quad A_{ij} \in \{0, 1\}, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad A_{ii} = 0. \quad (2.24)$$

У загальному випадку (тобто у разі фіксованого, але довільного розподілу вершин за ступенями) задачу (2.23)-(2.24) неможливо вирішити в аналітичній формі. Однак асимптотичні рішення цієї задачі можна знайти жадібними алгоритмами простої структури [4].

Почнемо розподіляти зв'язки, починаючи з «найбагатшого» вузла (тобто з першого, який має найбільшу їх кількість). Мережа стане екстремально дизасортативною, якщо на кожному кроці поточний вузол з'єднується з якомога «біднішим» на зв'язки (тобто таким, який має якомога більший номер).

Аналогічним чином, створюючи екстремально асортативну мережу, поточний вузол з'єднується з якомога найбагатшим. Доведення асимптотичної оптимальності цих жадібних алгоритмів також зроблено в [4].

Приклади структури та матриці суміжності екстремально асортативних / дизасортативних мереж наведено на рисунку 2.8 та рисунку 2.9.

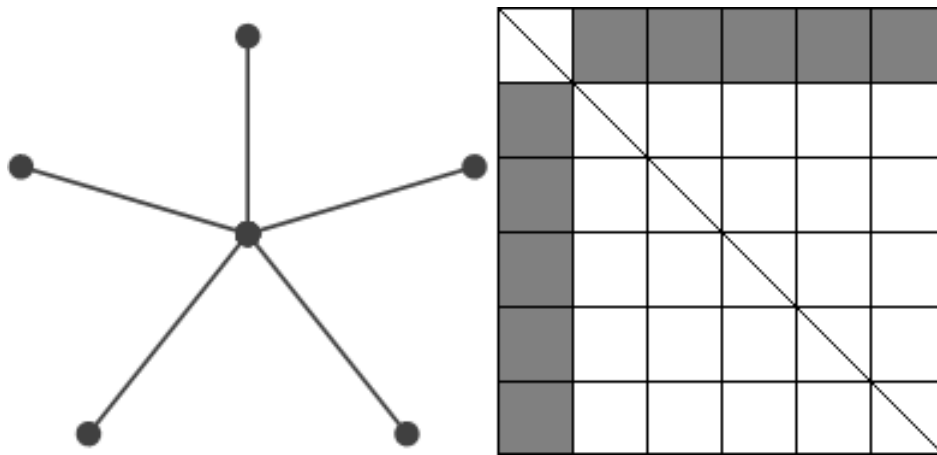


Рисунок 2.8 – Структура та матриця суміжності екстремально дизасортативної мережі

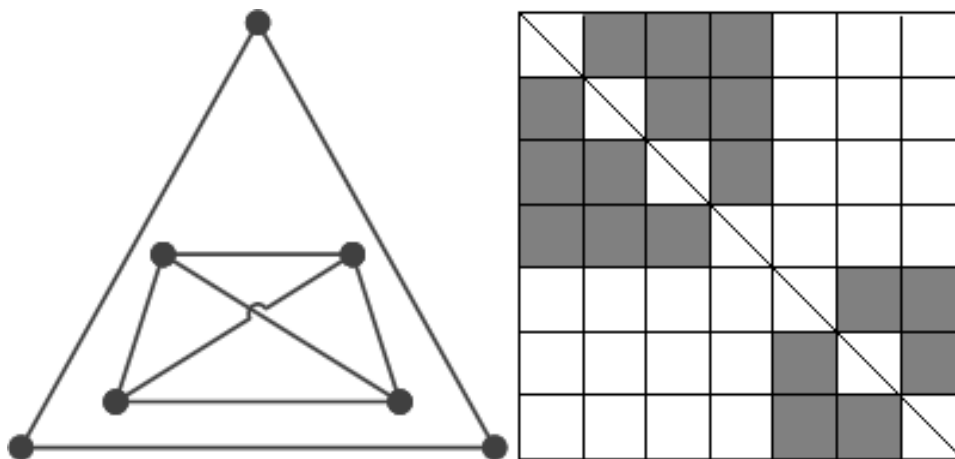


Рисунок 2.9 – Структура та матриця суміжності екстремально асортативної мережі

Як можна бачити, в граничному випадку  $r = -1$  (екстремально дизасортативне змішування) мережа має бірегулярну структуру [5], а в

іншому граничному випадку  $r=1$  (асортативне змішування) мережа складається з двох або більше регулярних з'єднаних компонентів.

З визначення (2.21)-(2.22) безпосередньо випливає, що коефіцієнт асортативності мережі ( $r$ ) залежить від розподілу ступенів вершин  $d_i$ , тому асортативність мереж неможливо розглядати відокремлено від масштабування.

Однією з ключових властивостей складних мереж є їх самоподібність або інваріантність до масштабу [2], [10], [11]. Мережа називається безмасштабною (scale-free), якщо розподіл ступенів вершин відповідає ступеневому закону, принаймні асимптотично, тобто частка  $p_k$  вузлів, що мають  $k$  зв'язків для великих  $k$  є

$$p_k \sim k^{-\gamma}, \quad 2 < \gamma \leq 3. \quad (2.25)$$

У цьому випадку розподіл рангів вузлів асимптотично також відповідає ступеневому розподілу:

$$d_i \approx c \cdot i^{-\beta}, \quad \beta = 1/(\gamma - 1), \quad \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \quad (2.26)$$

Власно кажучи, фактор  $c$  в (2.26), не є постійним, а залежить від розміру мережі ( $n$ ). Але доцільно використовувати позначення  $c$  замість  $c(n)$  для простоти.

Однією з найпростіших і найпопулярніших моделей SF-мережі є модель Барабаші-Альберт (БА), для якої  $\gamma=3$  і, таким чином  $\beta=1/2$ . Структура екстремально дизасортативної БА-мережі має тенденцію бути дводольною (рис. 2.10). Структура екстремально асортативної БА-мережі близька до набору майже ізольованих кластерів, всі найбільші з яких майже регулярні (рис. 2.11).

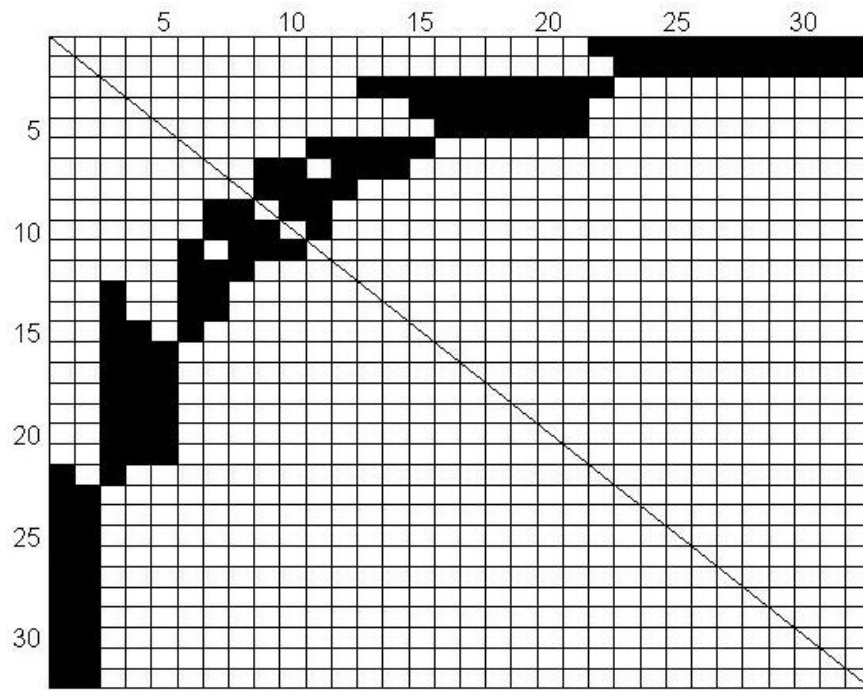


Рисунок 2.10 – Матриця суміжності екстремально дизасортативної БА-мережі з  $n = 32$ ,  $\beta = 1/2$

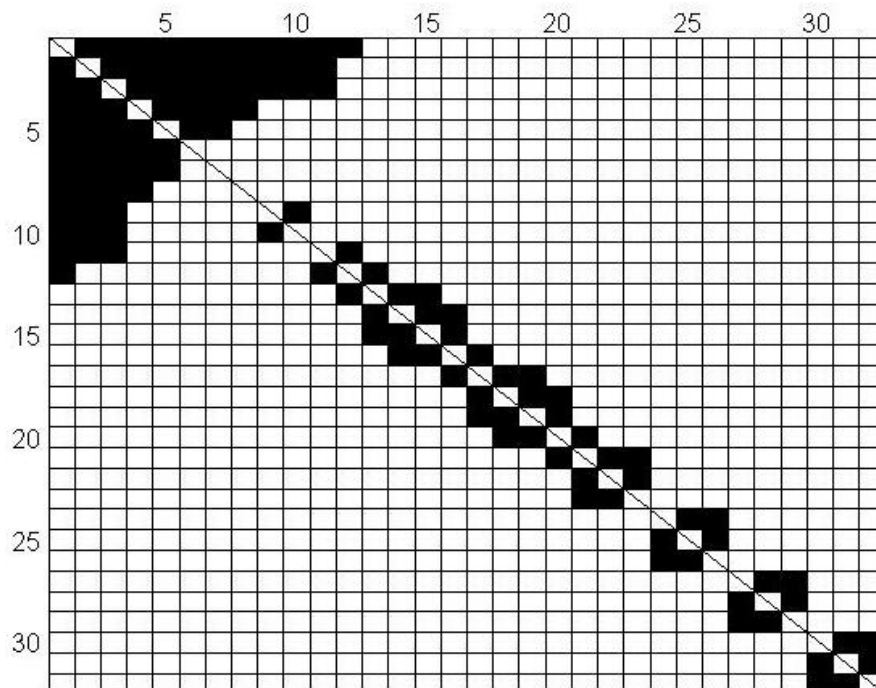


Рисунок 2.11 – Матриця суміжності екстремально асортативної БА-мережі з  $n = 32$ ,  $\beta = 1/2$

Асимптотичні оцінки меж коефіцієнта асортативності для БА-мережі були також отримані в [4]. Здається природним, що досяжні межі коефіцієнта асортативності суттєво вужчі, ніж  $\pm 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\min} \approx \frac{-\ln^2(n)}{c_3 \sqrt{n}}, \quad (2.27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\max} \approx \frac{b}{c_3} n^{-1/8}, \quad (2.28)$$

де  $b \approx 10.026$  та  $c_3 \approx 7.160$ .

Узагальнення цих результатів до загального випадку SF-мереж є предметом інтересу сучасних досліджень.

Складові  $S_1, S_2, S_3$  в (2.21) не залежать від властивостей змішування (тобто від матриці суміжності  $A$ ), а лише від властивості масштабування, тобто від розподілу ступенів вершин  $d_i$ . Для SF-моделі, що має розподіл ступенів (2.26), асимптотичними оцінками зазначених складових є:

$$S_1 \approx c \left( \zeta(\beta) + \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta} \right) \approx \frac{c}{1-\beta} n^{1-\beta}, \quad (2.29)$$

$$S_2 \approx c^2 \left( \zeta(2\beta) + \frac{n^{1-2\beta}}{1-2\beta} \right) \approx c^2 \cdot \zeta(2\beta), \quad (2.30)$$

$$S_3 \approx c^3 \left( \zeta(3\beta) + \frac{n^{1-3\beta}}{1-3\beta} \right) \approx c^3 \cdot \zeta(3\beta), \quad (2.31)$$

де  $\zeta(\cdot)$  – дзета-функція Рімана.

У дизасортативному випадку згідно з алгоритмом генерації кожна вершина  $i$  з підмножини «багатих» пов'язана з  $d_i$  «бідних» вершин, індекси (діапазони) яких послідовно змінюються від  $j_{\min}$  до  $j_{\max} = j_{\min} + d_i$ . Таким чином, за теоремою про середнє для кожного значення  $i$  є деяке проміжне значення  $\bar{j} = f(i)$  таке, що мінімальне значення (2.23) дорівнює

$$N_3^{\min} = 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} d_i d_j = 2 \sum_{i=1}^k d_i \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} d_j = 2 \sum_{i=1}^k d_i^2 d_{\bar{j}}. \quad (2.32)$$

Значення  $\bar{j}$  можна оцінити за припущенням, що вершини, які мають індекси менше, ніж  $i$ , займають всі зв'язки з вершинами, з індексами більшим за  $\bar{j}$ :

$$\sum_{s < i} d_s = \sum_{s > \bar{j}} d_s. \quad (2.33)$$

Абстрагуючись від цілочисельності всіх показників і ступенів, розв'язок рівняння (2.33) для SF-моделі з розподілом ступенів вершин (2.26) приймає форму

$$\bar{j} = f(i) = (n^{1-\beta} - i^{1-\beta})^{1/(1-\beta)}. \quad (2.34)$$

З (2.33)-(2.34) також випливає, що межа підсумовування в (2.32) визначається умовою  $i = \bar{j}$ . Таким чином,

$$k = 1 + \left\lfloor n \cdot 2^{-1/(1-\beta)} \right\rfloor. \quad (2.35)$$

Апроксимуючи суму (2.32) інтегралом та враховуючи (2.26) та (2.35), отримаємо, що

$$N_3^{\min} \approx \frac{2c^3}{2\beta - 1} n^{-\beta}. \quad (2.36)$$

Підставляючи (2.29)-(2.31) та (2.36) у (2.21), отримуємо асимптотичну оцінку нижньої межі коефіцієнта асортативності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\min} \approx -\chi(\beta) \cdot n^{-(1-\beta)}, \quad (2.37)$$

де

$$\chi(\beta) = \frac{(1-\beta) \cdot \zeta^2(2\beta)}{\zeta(3\beta)}. \quad (2.38)$$

У випадку максимізації критерія (2.23) (тобто під час розгляду екстремально асортативної безмасштабної мережі) перші  $d_1 = c$  вершин (тобто «найбагатші»), пов'язані між собою, утворюючи найбільший кластер («голівка стрілки» на рисунку 2.11). Вклад цього кластера в цільову функцію (2.23) дорівнює

$$N_{31} = \sum_{i=1}^{d_1+1} \sum_{j=1}^{d_i+1} d_i d_j. \quad (2.39)$$

Абстрагуючись від цілочисельності усіх параметрів, можна апроксимувати цю суму. Згідно з (2.26) маємо:

$$N_{31} = \sum_{i=1}^{c+1} d_i \sum_{j=1}^{d_i+1} d_j \approx \frac{c}{1-\beta} \sum_{i=1}^{c+1} (d_i)^{2-\beta} \approx \frac{c^{3-\beta}}{1-\beta} \sum_{i=1}^{c+1} i^{-\beta(2-\beta)} \approx \frac{c^{4-3\beta+\beta^2}}{(1-\beta)^3}. \quad (2.40)$$

Загальний внесок від усіх інших кластерів («тіла стрілки» на рис.2.11) зростає набагато повільніше, ніж (2.40). Таким чином  $N_3 \approx N_{31}$  та відповідно до (2.29)-(2.31), (2.30) верхню межу коефіцієнта асортативності (2.21) можна оцінити як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\max} \approx \eta(\beta) \cdot c^{1-3\beta+\beta^2}, \quad (2.41)$$

де

$$\eta(\beta) = \frac{1}{(1-\beta)^3 \cdot \zeta(3\beta)}. \quad (2.42)$$

Як було зазначено раніше, фактор  $c$  в (2.26) (і, отже, в (2.40)-(2.41)), не є постійним, а залежить від розміру мережі ( $n$ ). Цю залежність можна отримати з (2.39), оскільки  $S_1$  дорівнює загальній кількості зв'язків. Позначимо як  $\lambda$  ( $1 \leq \lambda < 2$ ) коефіцієнт еластичності [6] мережі, тобто коефіцієнт масштабування числа зв'язків відносно кількості вузлів:

$$S_1(n) = \frac{2\Gamma(n-1+\lambda)}{\Gamma(n-1)\Gamma(\lambda+1)} \approx \text{const} \times n^\lambda. \quad (2.43)$$

Якщо SF-мережа не є строго еластичною, то співвідношення (2.43) виконується асимптотично. Порівнюючи (2.29) і (2.43), можемо виразити  $c$  через  $n, \lambda, \beta$ :

$$c = v(\lambda, \beta) \cdot n^{\lambda-1+\beta}, \quad v(\lambda, \beta) = \frac{2(1-\beta)}{\Gamma(\lambda+1)}. \quad (2.44)$$

Таким чином асимптотична оцінка для верхньої межі коефіцієнта асортативності має вигляд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\max} \approx \sigma(\lambda, \beta) \cdot n^{(\lambda-1+\beta)(1-3\beta+\beta^2)}, \quad (2.45)$$

де

$$\sigma(\lambda, \beta) = \eta(\beta) \cdot (v(\lambda, \beta))^{1-3\beta+\beta^2}. \quad (2.46)$$

Моделювання еластичних SF-мереж та експериментальне дослідження досяжності нижньої (2.37) та верхньої (2.45) меж коефіцієнта асортативності є метою експериментальних досліджень.

### **3 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕЖ ПОКАЗНИКА АСОРТАТИВНОСТІ ЕЛАСТИЧНИХ МЕРЕЖ**

#### **3.1 Вибір програмних засобів реалізації**

У якості програмного засоба / середовища реалізації елементів системи моделювання еластичних мереж та оцінювання меж показника асортативності було обрано середовище MatLab [11], [12].

MatLab (скорочення від англ. «Matrix Laboratory – пакет прикладних програм для вирішення задач технічних обчислень, який має вбудовану мову програмування. MatLab використовують більше одного мільйона інженерних і наукових працівників, він працює на більшості сучасних операційних систем, включаючи Linux, Mac OS, Microsoft Windows.

MatLab як мова програмування був розроблений Клівом Моулером в кінці 1970-х років коли він був деканом факультету комп'ютерних наук в Університеті Нью-Мексико. Метою розробки було надати студентам факультету можливість використання програмних бібліотек Linpack і Eispack без необхідності вивчення Фортрана. Незабаром нова мова поширилася серед інших університетів і була з великим інтересом зустрінута вченими, які працюють в області прикладної математики. До сих пір в Інтернеті можна знайти версію 1982 року, написану на Фортрані, поширювану з відкритим вихідним кодом. Інженер Джон Літл познайомився з цією мовою під час візиту Кліва Моулера в Стенфордський університет в 1983 році. Зрозумівши, що нова мова має великий комерційний потенціал, він об'єднався з Клівом Моулером і Стівом Бангертом. Спільними зусиллями вони переписали MatLab на C і заснували в 1984 компанію The MathWorks для подальшого розвитку. Ці переписані на C бібліотеки довгий час були відомі під ім'ям JASCRAS. Спочатку MatLab призначався для проектування систем управління (основна спеціальність Джона Літла), але швидко завоював популярність у багатьох інших наукових і інженерних областях. Він також

широко використовувався і в освіті, зокрема, для викладання лінійної алгебри та чисельних методів.

Мова MatLab є високорівневою мовою програмування, яка інтерпретується. Середовище MatLab підтримує засновані на матрицях структури даних, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості і інтерфейси до програм, написаних на інших мовах програмування.

Програми, написані на MatLab, бувають двох типів - функції і скрипти. Функції мають вхідні і вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання проміжних результатів обчислень і змінних. Скрипти ж використовують загальний робочий простір. Як скрипти, так і функції не компілюються в машинний код, а зберігаються у вигляді текстових файлів. Існує також можливість зберігати так звані pre-parsed програми - функції і скрипти, оброблені в вид, зручний для машинного виконання. У загальному випадку такі програми виконуються швидше звичайних, особливо якщо функція містить команди побудови графіків.

Основною особливістю мови MatLab є її широкі можливості щодо роботи з матрицями, які творці мови висловили в гаслі «думай векторно» (Think vectorized).

MatLab надає користувачеві велику кількість (кілька сотень) функцій для аналізу даних, які покривають майже всі області математики, зокрема:

- матриці і лінійна алгебра – алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення і вектора, факторизація матриць та інші;
- багаточлени і інтерполяція – корені многочленів, операції над багаточленами і їх диференціювання, інтерполяція і екстраполяція кривих і інші;
- математична статистика і аналіз даних – статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші;
- обробка даних – набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування та інші;

- диференціальні рівняння – рішення диференціальних і диференціально-алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь із запізненням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в часткових похідних і інші;
- розріджені матриці – спеціальний клас даних пакету MatLab, що використовується в спеціалізованих додатках;
- цілочисельна арифметика – виконання операцій цілочисельний арифметики в середовищі MatLab.

MatLab надає зручні засоби для розробки алгоритмів, включаючи високорівневі з використанням концепцій об'єктно-орієнтованого та функціонального програмування. У ньому є всі необхідні засоби інтегрованого середовища розробки, включаючи відлагоджувач та профайлер.

У складі пакету MatLab є велика кількість функцій для побудови графіків, в тому числі тривимірних, візуального аналізу даних і створення анімованих роликів. Вбудована середовище розробки дозволяє створювати графічні інтерфейси користувача з різними елементами управління, такими як кнопки, поля введення і іншими.

Програми MatLab, як консольні, так і з графічним інтерфейсом користувача, можуть бути зібрані за допомогою компоненти MatLab Compiler в незалежні від MatLab виконувани програми або динамічні бібліотеки, для запуску яких на інших комп'ютерах, проте, потрібна установка вільно розповсюдженого середовища MatLab Compiler Runtime (MCR).

Пакет MatLab включає різні інтерфейси для отримання доступу до зовнішніх підпрограм, написаних на інших мовах програмування, даних. Підтримуються технології Component Object Model (COM) та Dynamic Data Exchange (DDE). Багато з цих можливостей відомі під назвою MATLAB API.

Пакет MatLab в Microsoft Windows надає доступ до програмній платформі .NET Framework. Є можливість завантажувати .NET збірки (Assemblies) і працювати з об'єктами .NET класів з середовища MatLab. У версії MatLab 7 підтримується .NET Framework версій 2.0, 3.0, 3.5 і 4.0.

Пакет MatLab містить функції, які дозволяють йому отримувати доступ

до інших додатків середовища Windows, так само як і цим програмам отримувати доступ до даних MatLab, за допомогою технології динамічного обміну даними (DDE).

В MatLab існує можливість викликати методи веб-сервісів. Спеціальна функція створює клас, ґрунтуючись на методах API веб-сервісу.

MatLab взаємодіє з клієнтом веб-сервісу за допомогою прийняття від нього посилань, їх обробки і посилань відповіді. Підтримуються наступні технології: Simple Object Access Protocol (SOAP) і Web Services Description Language (WSDL).

Пакет MatLab включає інтерфейс взаємодії з зовнішніми додатками, написаними на мовах С і Фортран. Здійснюється це взаємодія через MEX-файли. Існує можливість виклику підпрограм, написаних на С або Фортрані з MatLab, як ніби це вбудовані функції пакета. MEX-файли являють собою спільні бібліотеки, які можуть бути завантажені і виконані інтерпретатором, вбудованим в MatLab. MEX-процедури мають також можливість викликати вбудовані команди MatLab.

Інтерфейс MatLab, що відноситься до загальних DLL дозволяє викликати функції, що знаходяться в звичайних DLL-бібліотеках, прямо з MatLab. Ці функції повинні мати С-інтерфейс.

Крім того, в MatLab є можливість отримати доступ до його вбудованих функцій через С-інтерфейс, що дозволяє використовувати функції пакета в зовнішніх додатках, написаних на С. Ця технологія в MatLab називається С Engine.

Для MatLab є можливість створювати спеціальні набори інструментів (toolbox), що розширюють його функціональність. Набори інструментів є колекції функцій, написаних на мові MatLab для вирішення певного класу задач. Компанія Mathworks поставляє набори інструментів, які використовуються в багатьох областях, включаючи наступні:

– цифрова обробка сигналів, зображень та даних: DSP Toolbox, Image Processing Toolbox, Wavelet Toolbox, Communication Toolbox, Filter Design

Toolbox – набори функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр завдань обробки сигналів, зображень, проектування цифрових фільтрів і систем зв'язку;

– системи управління: Control Systems Toolbox,  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox, Robust Control Toolbox, System Identification Toolbox, LMI Control Toolbox, Model Predictive Control Toolbox, Model-Based Calibration Toolbox – набори функцій, що полегшують аналіз і синтез динамічних систем, проектування, моделювання та ідентифікацію систем управління, включаючи сучасні алгоритми управління, такі як Робастне управління,  $H_{\infty}$ -управління,  $\mu$ -синтез та інші;

– фінансовий аналіз: GARCH Toolbox, Fixed-Income Toolbox, Financial Time Series Toolbox, Financial Derivatives Toolbox, Financial Toolbox, Datafeed Toolbox – набори функцій, що дозволяють швидко і ефективно збирати, обробляти і передавати різну фінансову інформацію;

– аналіз і синтез географічних карт, включаючи тривимірні: Mapping Toolbox;

– збір і аналіз експериментальних даних: Data Acquisition Toolbox, Image Acquisition Toolbox, Instrument Control Toolbox, Link for Code Composer Studio – набори функцій, що дозволяють зберігати і обробляти дані, отримані в ході експериментів, в тому числі в реальному часі. Підтримується широкий спектр наукового і інженерного вимірювального обладнання;

– візуалізація і уявлення даних: Virtual Reality Toolbox дозволяє створювати інтерактивні світи і візуалізувати наукову інформацію за допомогою технологій віртуальної реальності і мови VRML;

– засоби розробки: MatLab Builder for COM, MatLab Builder for Excel, MatLab Builder for NET, MatLab Compiler, Filter Design HDL Coder – набори функцій, що дозволяють створювати незалежні програми з середовища MatLab;

– взаємодія з зовнішніми програмними продуктами: MatLab Report Generator, Excel Link, Database Toolbox, MatLab Web Server, Link for

ModelSim – набори функцій, що дозволяють зберігати дані в різних видів таким чином, щоб інші програми могли з ними працювати;

- бази даних: Database Toolbox - інструменти роботи з базами даних;
- наукові та математичні пакети: Bioinformatics Toolbox, Curve Fitting Toolbox, Fixed-Point Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox, OPC Toolbox, Optimization Toolbox, Partial Differential Equation Toolbox, Spline Toolbox, Statistic Toolbox, RF Toolbox – набори спеціалізованих математичних функцій, що дозволяють вирішувати широкий спектр наукових і інженерних задач, включаючи розробку генетичних алгоритмів, вирішення завдань в приватних похідних, цілочисельні проблеми, оптимізацію систем та інші;

- нейронні мережі: Neural Network Toolbox – інструменти для синтезу та аналізу нейронних мереж;

- нечітка логіка: Fuzzy Logic Toolbox – інструменти для побудови і аналізу нечітких множин;

- символічні обчислення: Symbolic Math Toolbox – інструменти для символічних обчислень з можливістю взаємодії з символічним процесором програми Maple.

Крім перерахованих вище, існують тисячі інших наборів інструментів для MatLab, написаних іншими (сторонніми) розробниками.

### 3.2 Генерація масштабно-інваріантної мережі

Алгоритм побудови МІМ заснований на правилі переважного приєднання (1.14): ймовірність того, що новий вузол (з номером  $k$ ) приєднається до існуючого (з номером  $i$ ), пропорційна кількості зв'язків у цього вузла ( $s_i$ ):

$$p_i(k) = \frac{s_i}{2(k-1)}. \quad (3.1)$$

Мережа зберігається у вигляді одновимірного масиву розміром  $2(n-1)$ . Непарні елементи являють собою порядкові номери вузлів в порядку їх «появи» в мережі, тобто  $k=2, \dots, n$ , а парні – номери вузлів, до яких вони були приєднані. Для зберігання МІМ достатньо одновимірного масиву розміром  $n-1$  (тобто вдвічі меншого) для зберігання тільки номерів батьківських вузлів, до яких приєднуються поточні. Проте, така реалізація хоч і економить пам'ять, але різко уповільнює генерацію МІМ, що було підтверджено профілюванням першої версії функції.

За допомогою вбудованої функції MatLab `randi(...)` генерується випадкове число від 1 до  $2(k-2)$ , яке є номером батьківського вузла для «новонародженого»  $k$ -го. При обраному способі зберігання МІМ на момент виклику цієї функції (тобто появи  $k$ -го вузла) всі попередні зустрічаються в масиві стільки раз, чому дорівнює їх ступінь. Таким чином, правило переважного приєднання (3.1) виконується.

Ім'я функції: `genSF`.

Вхідні параметри:  $n$  – кількість вузлів у мережі ( $n > 1$ ),  $Lam$  – показник еластичності.

Значення, що повертається:  $x$  – масив-рядок  $2(n-1) \times 1$ , який описує МІМ.

Схема алгоритма цієї функції наведена на рис.3.1, а текст – в додатку А. Приклад згенерованої еластичної SF-мережі наведений на рис. 3.2.

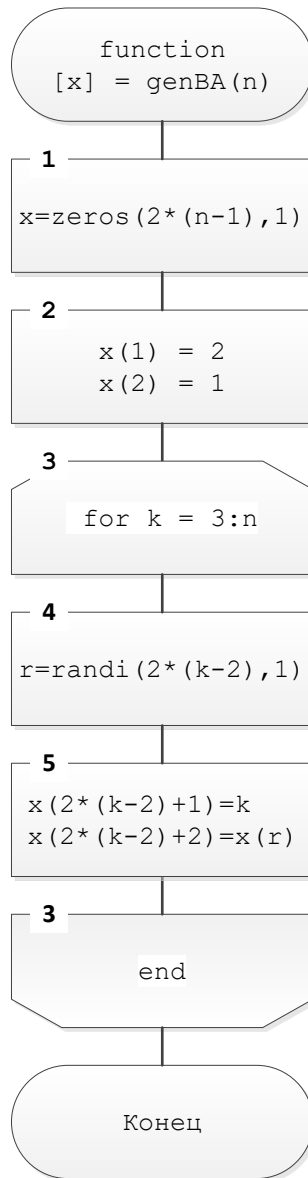


Рисунок 3.1 – Схема алгоритма функції genSF

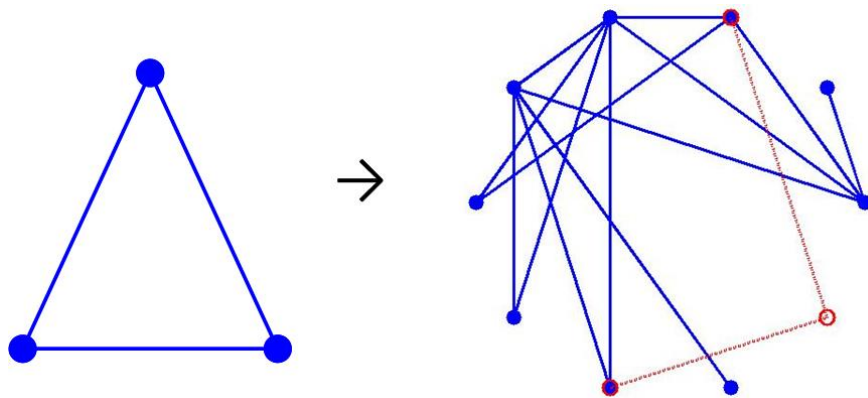


Рисунок 3.2 – Приклад генерації еластичної безмасштабної мережі

### 3.3 Моделювання структури та розрахунок меж коефіцієнта асортативності еластичної мережі

Дослідженню значень досяжних меж коефіцієнта асортативності безмасштабних мереж було присвячено розділ 2.3. Розрахунковими формулами є (2.27)-(2.28) та (2.45)-(2.46) відповідно для нижньої (екстремально дзасортативний випадок) та верхньої (екстремально асортативний випадок) меж.

Було проведено моделювання структури безмасштабних мереж з екстремальними значеннями показника асортативності. Приклад показаний на рисунку 3.3. Синій колір відповідає максимальному, а чорний – мінімальному значенню коефіцієнта асортативності.

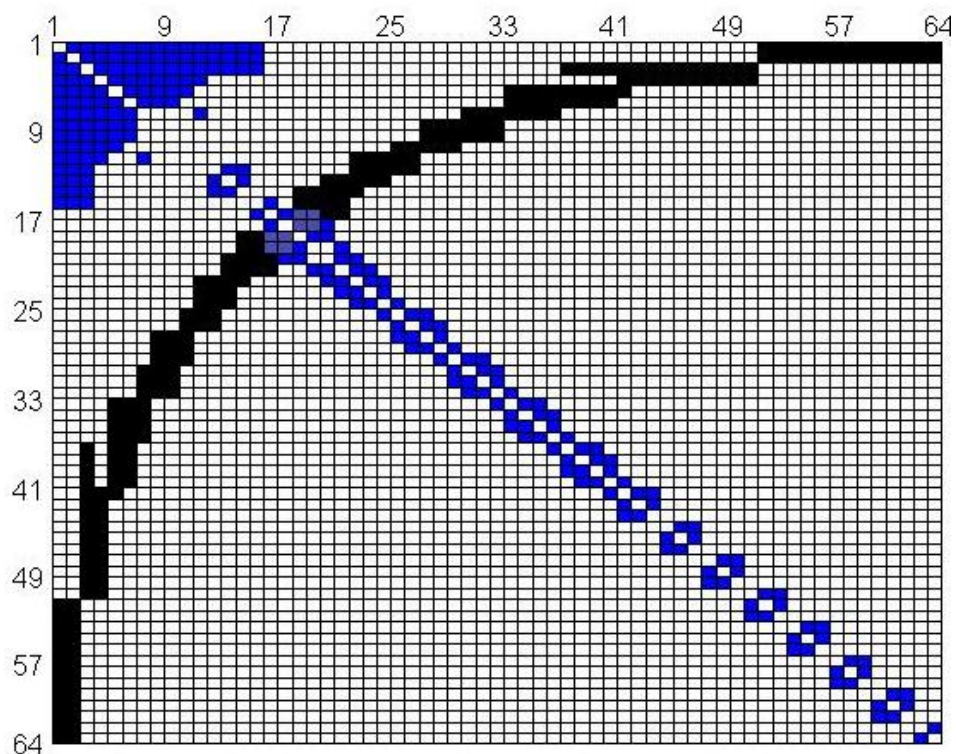


Рисунок 3.3 – Матриця суміжності екстремальних безмасштабних мереж розміром  $n = 64$ .

Оцінки нижньої (2.27) та верхньої (2.45) меж коефіцієнта асортативності загальної SF-моделі у порівнянні з відповідними показниками БА-моделі наведено на рисунку 3.4. Значення коефіцієнта еластичності у цьому чисельному експерименті складало  $\lambda = 1.3$ , а показник рангового розподілу варіювався від  $\beta = 0.5$  (що відповідає БА-моделі) до  $\beta = 0.6$

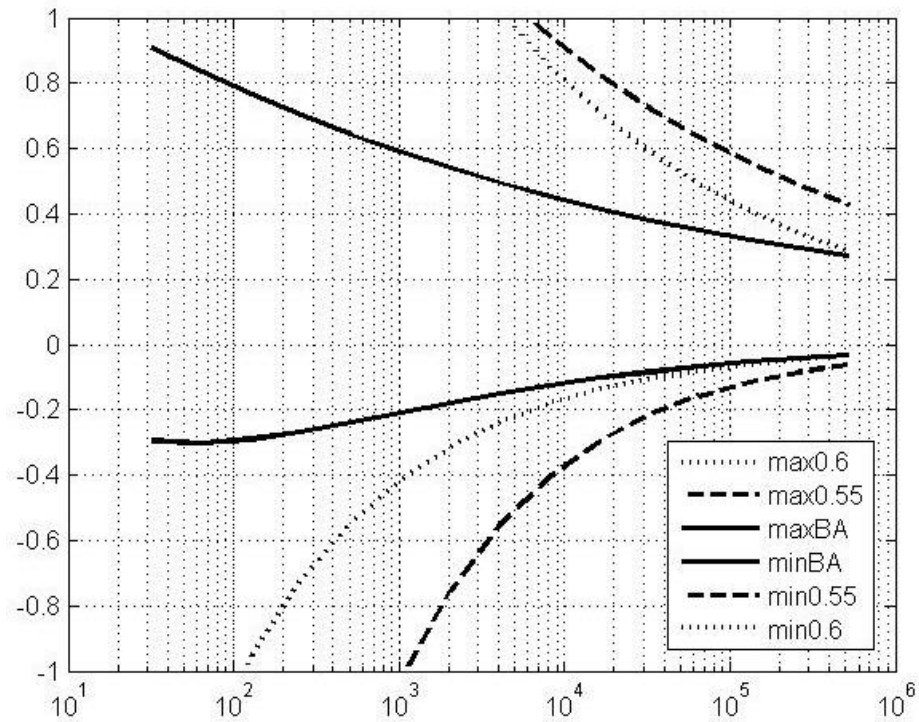


Рисунок 3.4 – Оцінки меж коефіцієнта асортативності для SF-мереж.

Як можна побачити з рисунку 3.4, межі коефіцієнта асортативності розширюються з зростанням показника рангового розподілу  $\beta$  (2.26), та відповідно, з зменшенням показника розподілу вершин за ступенями  $\gamma$  (2.25).

Можна також зробити висновок, що з зростанням розміру мереж ( $n \rightarrow \infty$ ) межа з позитивної сторони значно ширша, ніж з негативної. Тому той факт, що коефіцієнти асортативності технічних та біологічних мереж значно менші за абсолютним значенням, ніж для мереж соціальної природи, можна пояснити знаком цього коефіцієнта.

## ВИСНОВКИ

В роботі вивчено поняття складних мереж (complex networks), виявлено особливості, що роблять мережі складними, вивчені приклади складних мереж, проаналізовано основні математичні моделі складних мереж, зокрема модель Барабаші-Альберт – масштабно-інваріантної мережі.

Вивчено поняття еластичності, модель еластичної мережі, властивості показника еластичності. Встановлено зв'язок між еластичністю та фрактальною розмірністю мережі.

Виявлено, що важливою характеристикою складних мереж є, окрім показника розподілу вузлів та показника еластичності, показник асортативності. Показник асортативності характеризує схильність вузлів з'єднуватись з подібними собі за кількістю зв'язків, чи навпаки з протилежними. Виявлено, що штучні моделі мереж мають нульову (нейтральну) асортативність, в той час як технічні та біологічні мережі є дизасортативними, а соціальні – асортативними.

Проведено дослідження структури еластичних мереж з екстремальною асортативністю. Проаналізовано вплив показника розподілу вузлів та коефіцієнта еластичності на максимально/мінімально досяжні значення показника асортативності. Виявлено, що межі коефіцієнта асортативності розширюються з зменшенням показника розподілу вершин за ступенями. Крім того, з зростанням розміру мереж межа з позитивної сторони значно ширша, ніж з негативної. Тому той факт, що коефіцієнти асортативності технічних та біологічних мереж значно менші за абсолютним значенням, ніж для мереж соціальної природи, можна пояснити знаком цього коефіцієнта.

Для експериментальної перевірки отриманих результатів був розроблений набір функцій, призначених для генерування еластичних мереж з нейтральною, мінімальною та максимальною асортативністю та для обчислення показника асортативності. Моделювання проводилося в середовищі MatLab, отримані результати повністю збіглися з передбаченими теоретично.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ландэ Д.В., Снарский А.А. Моделирование сложных сетей: учебное пособие. К. : НТУУ «КПИ», 2015. 212 с.
2. Barnes, J.A. Class and Committees in a Norwegian Island Parish // Human Relations. №7. P. 39-58.
3. Mandelbrot Benoit B. The fractal geometry of nature. New York : W/H/Freeman and Co., 1982.
4. Федер Е. Фракталы : пер. с англ. М. : Мир, 1991, 254 с.
5. Масштабно-инвариантные сети. URL : [http://www.cognitivist.ru/er/kernel/prologi\\_11\\_scale\\_free\\_network.xml](http://www.cognitivist.ru/er/kernel/prologi_11_scale_free_network.xml) (дата звернення 10.11.2019).
6. Шергін В.Л., Чала Л.Е., Удовенко С.Г. Еластична модель масштабно-інваріантної мережі // Практичне застосування нелінійних динамічних систем в інфокомунікаціях – матеріали VI міжнародної конференції. Чернівці : «Місто», 2017. С. 108-109.
7. Albert R., Barabasi A.-L Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 42-97.
8. Newman M.E.J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics. 2005. №46(5). P.323-351.
9. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of Networks: From Biological Networks to the Internet and WWW. Oxford, USA : Oxford University Press, 2003. 280 p.
10. Shergin V.L., Chala L.E.. The concept of elasticity of scale-free networks: Problems of Infocommunications // Science and Technology (PIC S&T'). 2017. V. 62. P. 254-258.
11. Shergin V.L., Chala L.E., Udovenko S.G. Fractal dimension of infinitely growing discrete sets // Advanced trends in radioelectronics, telecommunications and computer engineering (TCSET-2018). 2018. No. 348.
12. Евин И.А. Введение с теорию сложных сетей : учеб. пособие. М. :

Университет, 2010. Том 2. С. 121-141.

13. Райгородский А. М. Модели случайных графов и их применения : учеб. пособие. Киев, 2009. 117 с.

14. Dorogovtsev S. N., Mendes J. F. F., Samukhin A. N. Structure of growing networks with preferential linking // *Phys. Rev. Lett.* 2000. 85. 4633.

15. Олемской А.И. Статистика сложных сетей (обзор). «Вісник СумДУ». 2006. №6 (90). С.21-47.

16. Albert R., Barabasi A.- L. Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Mod. Phys.* 2002. V. 74. P. 42-97.

17. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории : пер. с англ. М. : Постмаркет, 2000. 352 с.

18. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая : пер. с англ. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528с.

19. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008. 512 с.

20. Newman M. *Networks. An Introduction.* Oxford : Oxford University Press, 2010.

21. Sydsaeter K., Hammond P. *Mathematics for Economic Analysis* // Englewood Cliffs. NJ : Prentice Hall., 1995. P. 173–175.

22. MATLAB. URL : <https://ru.wikipedia.org/wiki/MATLAB> (дата звернення 25.11.2019).

23. Matlab. URL : <http://matlab.ru/products/matlab> (дата звернення 25.11.2019).